TD4 - Programmation lineaire et en nombres entiers

OPTIMISATION ET RECHERCHE OPERATIONNELLE

M1 Info - semestre d'automne 2021-2022

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

Christophe Crespelle
christophe.crespelle@univ-lyon1.fr

Florian Ingels
florian.ingels@ens-lyon.fr

maximiser

benef $= 2x_1 + 7x_2$

x_1 : # de km de câble de 5

x_2 : # de km de câble de 10

Exercice 1. *Il faut parfois savoir couper les cables en 4.*

$x_1 + 4x_2 \leq 20$

$x_1 \leq 15$

$x_2 \leq \frac{4}{10}(x_1 + x_2)$

Une usine produit des cables de cuivre de 5mm et de 10mm de diametre, sur lesquels le benefice est de respectivement 2 et 7 euros au metre. Le cuivre dont dispose l'usine permet de produire 20 km de cable de 5 mm de diametre par semaine. La production de cable de 10 mm demande 4 fois plus de cuivre que celle de cable de 5mm. Pour des raisons de demande, la production hebdomadaire de cable de 5mm ne doit pas depasser 15 km et pour des raisons de logistique la production de cable de 10 mm ne doit pas representer plus de 40% de la production totale.

a. Ecrivez un programme lineaire ayant pour objectif de maximiser le benefice hebdomadaire de l'usine, en supposant que dans les contraintes enoncees, tout se qui est produit est vendu.

Solution. Il y a deux variables dans le probleme d'optimisation : le nombre de kilometres de cable de 5mm produit, qu'on note x_1, et le nombre de kilometres de cable de 10mm produit, note x_2.
La fonction objectif a maximiser est le chiffre d'affaire, note z : $z = 2x_1 + 7x_2$. Il y a une contrainte sur la quantite de cuivre disponible : $x_1 + 4x_2 \leq 20$. Et deux contraintes additionnelles liees a la demande et a la logistique : $x_1 \leq 15$ et $x_2 \leq \frac{4}{10}(x_1 + x_2)$. Ce qui donne le programme lineaire suivant :

$$
\begin{array}{lllll}
\multicolumn{5}{l}{\text{Maximiser } z = 2x_1 + 7x_2 \text{ sous conditions}} \\
\hline
\text{(a)} & x_1 & +4x_2 & \leq & 20 \\
\text{(b)} & x_1 & & \leq & 15 \\
\text{(c)} & & x_2 & \leq & \frac{4}{10}(x_1 + x_2) \\
\multicolumn{5}{l}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

b. Mettez le programme lineaire en forme standard.

Solution. Seule la troisieme contrainte n'est pas en forme standard. Il faut faire passer les deux variables du cote gauche de l'inegalite : $-4x_1 + 6x_2 \leq 0$. Ce qui donne le programme lineaire en forme standard :

maximiser

$\text{benef} = 2x_1 + 7x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ x_1 \leq 15 \\ x_2 \leq \frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{10}\,5}(x_1 + x_2) \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$x_2 = \frac{5}{4}$

$x_1 + 4x_2 = 20$

$\underline{\max}\ 2x_1 + 7x_2 = z$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 20 \\ x_1 &\leq 15 \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

forme standard.

$7x_2 = z - 2x_1$

$$\begin{aligned} 7x_1 + 4z - 8x_1 &\leq 140 \\ x_1 &\leq 15 \\ -14x_1 + 3z - 6x_1 &\leq 0 \end{aligned}$$

$x_2 =$

$$\boxed{\begin{aligned} z &= 38 + \tfrac{3}{4} \\ x_1 &= 15 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 4z &\leq 140 \\ x_1 &\leq 15 \\ -20x_1 + 3z &\leq 0 \end{aligned}$$

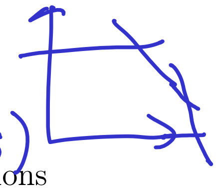
$z \leq 35 + \frac{1}{4}x_1 \rightarrow z \leq 35 + \frac{15}{4}$

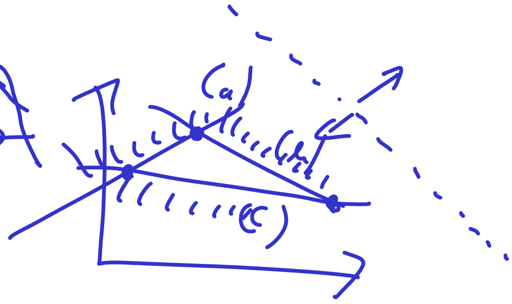
$x_1 \leq 15$

$z \leq \frac{20}{3}x_1 \rightarrow z \leq 100$

Maximiser $z = 2x_1 + 7x_2$ sous conditions				
(a)	x_1	$+4x_2$	$\leq$	20
(b)	x_1		$\leq$	15
(c)	$-4x_1$	$+6x_2$	$\leq$	0
$x_1, x_2 \geq 0$				

(0, 5)
(20, 0)
(0, 0)
(15, 10)





c. Resolvez ce programme lineaire a la main, en manipulant les inegalites et la fonction objectif.

Solution. On peut par exemple proceder ainsi. De la fonction objectif, on tire $7x_2 = z - 2x_1$. On s'en sert pour eliminer x_2 dans les contraintes (a) et (c) en multipliant au prealable ces inegalites par 7. Cela donne :

Maximiser z sous conditions				
(a)	$7x_1$	$+4z - 8x_1$	$\leq$	140
(b)	x_1		$\leq$	15
(c)	$-28x_1$	$+6z - 12x_1$	$\leq$	0
$x_1, x_2 \geq 0$				

Soit :

Maximiser z sous conditions				
(a)		z	$\leq$	$35 + \frac{1}{4}x_1$
(b)	x_1		$\leq$	15
(c)		z	$\leq$	$\frac{20}{3}x_1$
$x_1, x_2 \geq 0$				

Arrive a ce stade, on voit que pour maximiser z il faut prendre x_1 le plus grand possible, tout en respectant les contraintes, c'est a dire $x_1 = 15$. (a) donne alors $z \leq 35 + \frac{15}{4}$ et (b) donne $z \leq 100$. Pour satisfaire les deux contraintes on doit choisir $z = 35 + \frac{15}{4}$. On reinjecte dans la fonction objectif pour trouver la valeur de x_2 correspondante, on obtient $35 + \frac{15}{4} = 30 + 7x_2$, soit $x_2 = \frac{35}{28} = \frac{5}{4}$. Au final, une solution optimale est donc $x_1 = 15, x_2 = \frac{5}{4}$ et on realise un objectif de $z = 35 + \frac{15}{4} = 38 + \frac{3}{4}$.

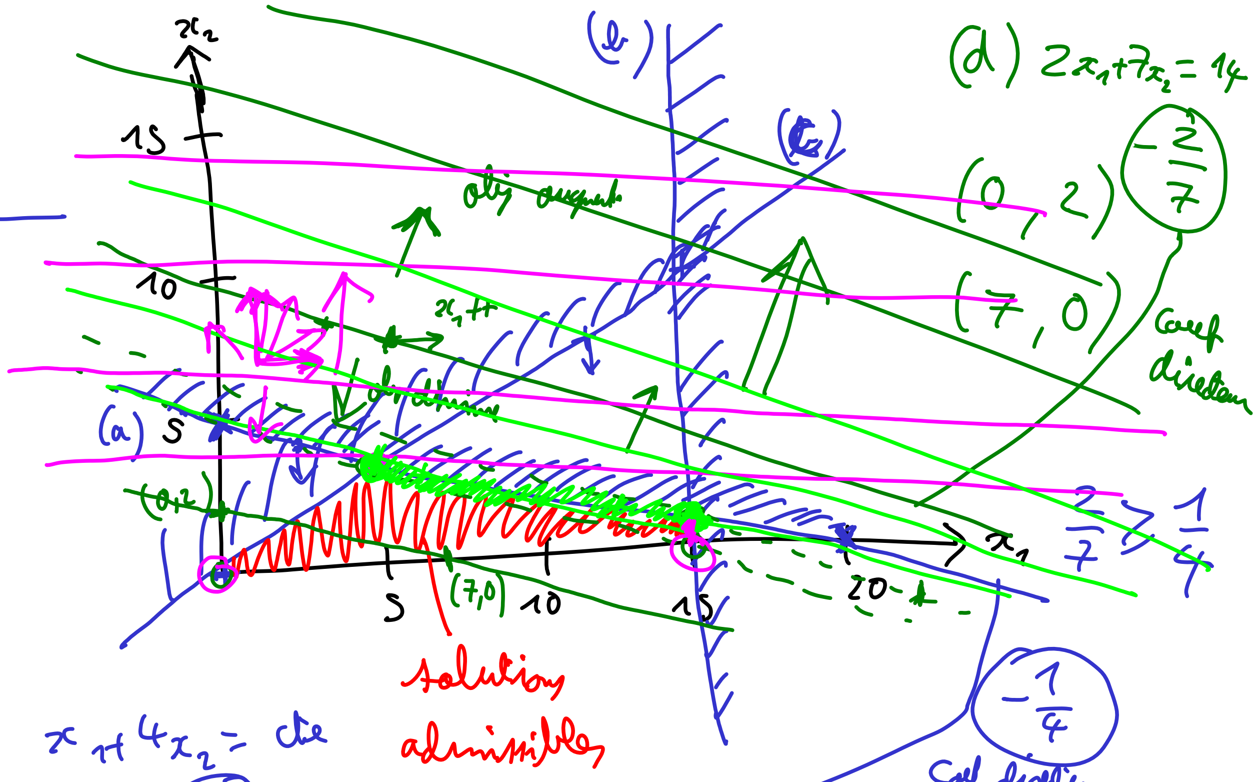
d. Resolvez ce programme lineaire par la methode graphique.

Solution.
La resolution graphique est donnee sur la figure 1. Pour l'obtenir, on procede comme suit. Pour chaque contrainte du programme lineaire, on trace la droite correspondante, qui separe le plan en deux : le demi-plan ou la contrainte est satisfaite et le demi-plan ou elle ne l'est pas. Sur le dessin, le demi-plan ou la contrainte N'EST PAS satisfaite est materialise par des hachures sur le bord de la droite de separation entre les deux demi-plans. Par exemple, la contrainte (a) donne la droite D d'equation $x_1 + 4x_2 = 20$. Pour tracer cette droite, le plus simple est de prendre deux points qui appartiennet a la droite. Par exemple, pour $x_1 = 0$, on a $x_2 = 5$ d'apres l'equation de la droite. Ainsi $(0, 5)$ est un point de la droite D. Lorsque $x_2 = 0$, toujours d'apres l'equation, on a $x_1 = 20$, ce qui donne un deuxieme point sur D, le point $(20, 0)$. On trace D entre ces deux points. Pour savoir de quel cote de la droite se trouve le demi-plan qui satisfait la contrainte, on remarque que dans la contrainte on a $x_1 + 4x_2 \leq 20$. Ainsi, si on est sur la droite D et qu'on a l'egalite parfaite entre le membre de gauche et le membre de droite de la contrainte, si on augmente x_1 ou qu'on augmente x_2 alors la contrainte n'est plus satisfaite, car son membre gauche augmente au dela de 20 (cela vient du fait

(a) $(0,5)$ $(20,0)$

(c) $(0,0)$ $(15,10)$

(b) $x_1 \leq 15$



(a) $x_1+4x_2 = \text{cte}$

$-\frac{1}{4}$

$obj' = 2x_1 + 9x_2$ $\qquad \frac{1}{4} > \frac{2}{9}$

$obj'' = 2x_1 + 8x_2$

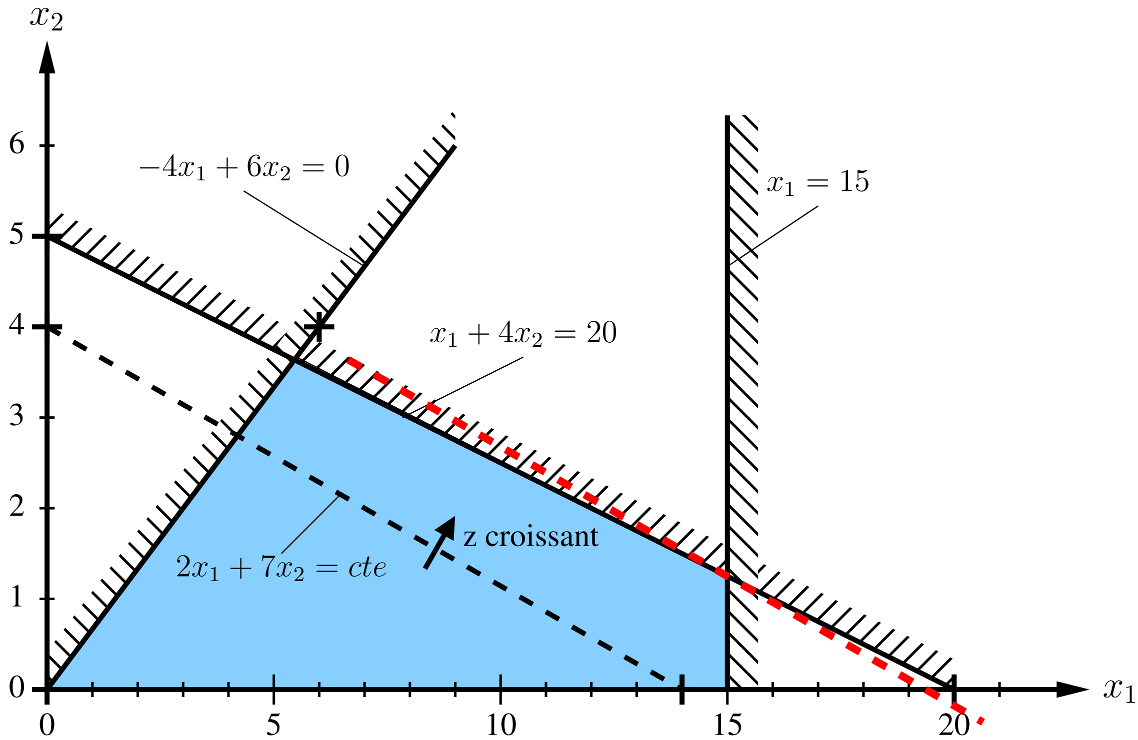


FIGURE 1 – Resolution graphique du programme lineaire en forme standard.

que les coefficients de x_1 et x_2 dans le membre gauche sont tous deux positifs). Donc, dans le demi-plan superieur droit (celui ou on se retrouve en augmentant x_1 ou x_2) la contrainte n'est pas satisfaite. On hachure donc le cote superieur droit de la droite D. On procede ainsi pour toutes les autres contraintes : on trace la droite dont l'equation est defini en changeant le $\leq$ par $=$, ensuite, on raisonne pour voir si lorsqu'on augmente une variable a partir de la position d'egalite, la contrainte reste satisfaite ou non, ce qui determine le cote a hachurer. une fois qu'on fait ca pour les trois contraintes, on obtient le dessin de la figure 1. remarquez qu'il y a deux contraintes supplememtaires dans le programme lineaire en forme standard : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. C'est a dire que seules les solutions dans le cadrant (quart de plan) superieur droit sont admissibles. La zone ou les 5 contraintes sont satisfaites est coloree en bleu.

Occupons nous maintenant de la fonction objectif a maximiser $z = 2x_1 + 7x_2$. Sur le dessin, on a choisit de la materialiser par une droite en pointilles dont l'equation est $2x_1 + 7x_2 = cte$. Toutes les solutions sur cette droite realise la meme valeur de la fonction objectif, en l'occurence $z = cte$. On peut choisir de dessiner la droite qui nous plait le mieux par sa situation sur le dessin, en choisissant la constante cte. Ici, on a choisi $cte = 2 \times 7 = 14$ car c'est le produit des coefficients des variables dans la fonction objectif. Cela permet de facilement trouver des points a coordonnees entieres sur la droite a tracer en prenant les deux points d'abscisse nulle ($x_1 = 0$) et d'ordonnee nulle ($x_2 = 0$). Une fois qu'une de ces droites d'equation $z = cte$, qu'on note O, est tracee, on cherche la valeur maximum que peut prendre cte dans la zone des solutions admissibles (ici en bleu). Pour cela on considere toutes les paralleles a la droite O qu'on a trace. Il faut donc determiner dans quelle direction la cte augmente lorsqu'on deplace

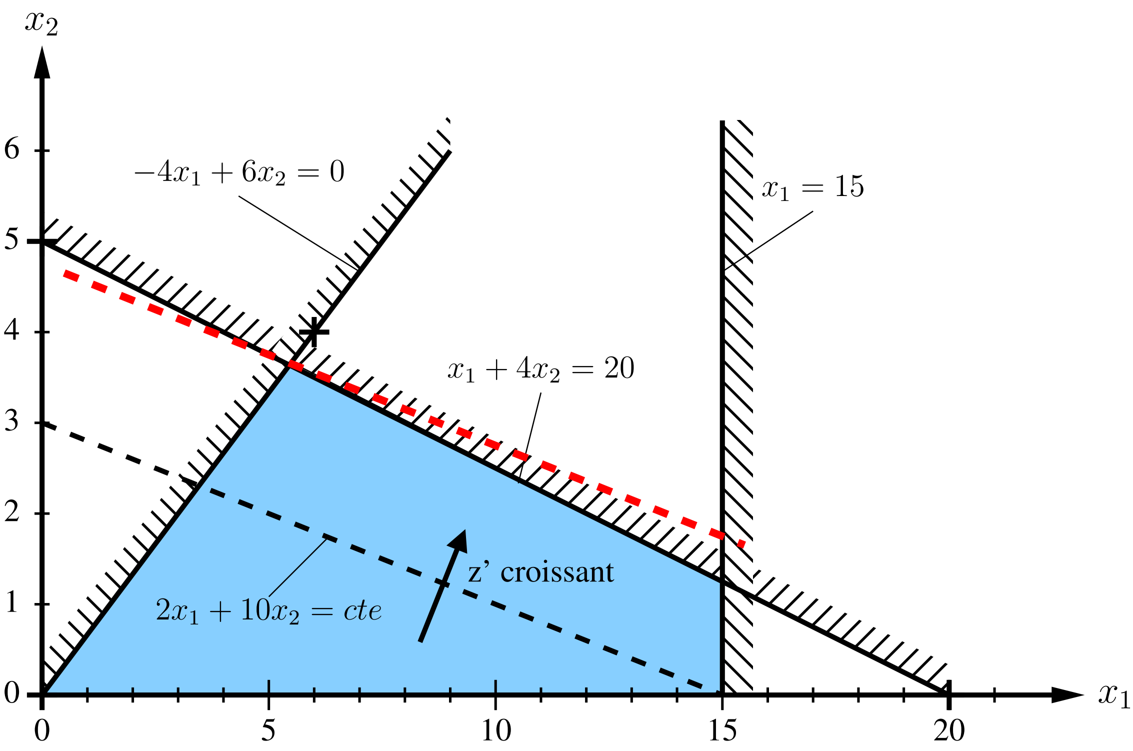


FIGURE 2 – Resolution graphique du programme lineaire en changeant la fonction objectif pour obtenir une unique solution optimale differente de la precedente.

la droite parallele a O. La encore, cela se voit en regardant l'equation $z = 2x_1 + 7x_2$, ou on voit que lorsque x_1 ou x_2 augmente, z aussi. Il faut donc se deplacer vers le cote superieur droit pour realiser des valeurs de z plus importantes, ce qui a ete materialise par une fleche sur la figure 1. Ainsi, on trouve la droite parallele a O, la plus eloignee dans cette direction et qui intersecte la zone bleue. Elle a ete materialisee en pointilles rouges sur la figure 1.

On voit que cette droite rouge intersecte la zone bleue en seulement un point, qui est a l'intersection des droites de contraintes d'equations $x_1 = 15$ et $x_1+4x_2 = 20$. On resoud donc ce systeme de deux equations a deux inconnues pour trouver les coordonnes de l'unique solution optimale. Il s'agit du point de coordonnees $x_1 = 15$ et $x_2 = \frac{5}{4}$. On realise alors une valeur objectif de $z = 2 \times 15 + 7 \times \frac{5}{4} = 30 + \frac{35}{4} = 38 + \frac{3}{4}$. On retrouve ainsi bien la solution obtenue par la resolution a la main du systeme.

e. Comment changer les prix de vente pour qu'il y ait toujours une unique solution optimale mais differente de la precedente ?

Solution.

Pour coller a la realite du probleme, on va se limiter a des benefices au metre qui soient strictement positifs. Ainsi, la droite $z = cte$ sera toujours une droite strictement decroissante et non verticale. Ce qui fait que jusqu'a maintenant la solution optimale est obtenue dans le coin droit de la zone bleue (au croisement des droites d'equation $x_1 = 15$ et $x_1 + 4x_2 = 20$) est que la doite O, d'equation $z = cte$, est plus pentue que la droite D d'equation $x_1 + 4x_2 = 20$. En effet, le coefficient directeur de la droite O est $-\frac{2}{7}$ alors que celui de la droite D est $-\frac{1}{4}$. C'est pour cela que la parallele la plus eloignee de O qui intersecte la zone bleue l'intersecte en son coin droit. Si on change les prix pour que le coefficient directeur de O soit moins negatif que celui de D (c'est a dire pour que O soit moins pentue que D) alors la parallele a O la plus eloignee de O et qui intersecte la zone bleue l'intersectera cette fois en son coin gauche (intersection de la droite d'equation $-4x_1 + 6x_2 = 0$ et de la droite D). Pour cela il suffit par exemple d'augmenter le prix du cable de 10mm pour que son benefice au metre soit de 10 euros, contre 7 actuellement. La droite O' decrivant la nouvelle fonction objectif $z' = 2x_1 + 10x_2$ a alors un coefficient directeur de $\frac{1}{5}$. Dans ce cas, la solution optimale est toujours unique mais est obtenue au croisement des droites d'equations $-4x_1 + 6x_2 = 0$ et $x_1 + 4x_2 = 20$. On resoud ce systeme de deux equations a deux inconnues et on trouve $x_2 = \frac{80}{22} = \frac{40}{11}$ et $x_1 = \frac{60}{11}$. Cette solution est differente de l'ancienne solution optimale precedente $x_1 = 15$ et $x_2 = \frac{5}{4}$. On voit que dans cette nouvelle solution, on produit plus de cable de 10mm que precedemment, en proportion, ce qui est logique vu qu'on a augmente le benefice sur ces cables. La nouvelle resolution graphique est donnee sur la figure 2.

> **Remarque.** Si on reste dans le cadre des coefficients strictement positifs pour x_1 et x_2 dans la fonction objectif, il n'y a que deux solutions optimales qui peuvent etre l'unique solution optimale au probleme : les deux que nous avons trouvees precedemment, a savoir $x_1 = 15, x_2 = \frac{5}{4}$ et $x_1 = \frac{60}{11}, x_2 = \frac{40}{11}$. Les deux autres coins du quadrilatere des solutions admissibles ne peuvent pas etre solution optimale sous la contrainte des coefficients strictement positifs pour x_1 et x_2 dans la fonction objectif. Ainsi, quelle que soit la fonction objectif a coefficients strictements positifs, s'il y a une unique solution optimale, c'est necessairement une de ces deux solutions. Par contre, la valeur de l'objectif realise par ces solutions ne sera pas toujours la meme et depend des coefficients de la fonction objectif.

f. Comment fixer les prix de vente pour qu'il y ait une infinite de solutions ?

Solution.

En restant dans la limite des benefices au metre strictement positifs, la seule maniere d'obtenir une infinite de solutions est de prendre la droite $z = cte$ representant la fonction objectif avec le meme coefficient directeur que la droite D. C'est ce qui se passe si on fixe le prix du cable de 10mm de sorte que le benefice au metre soit 8 euros. On obtient $z'' = 2x_1 + 8x_2$ et le coefficient directeur de la droite O'' decrivant le nouvelle fonction objectif est alors $-\frac{1}{4}$, comme celui de la droite D. Toutes les solutions se trouvant sur le segment de droite de la droite D entre ses points d'intersections avec les droites d'equations $x_1 = 15$ et $-4x_1 + 6x_2 = 0$ sont alors des solutions optimales realisant la meme valeur de la fonction objectif z''. Il y en a une infinite (autant que de points sur le segment). On peut calculer la valeur maximale ainsi atteinte pour la fonction objectif z'' en prenant un point quelconque du segment solution. Par exemple si on prend le point d'abscisse $x_1 = 15$ sur ce segment, on sait d'apres les questions c et d que son ordonnee est $x_2 = \frac{5}{4}$. On realise alors un objectif de $z'' = 30 + 10 = 40$. La resolution graphique dans ce cas est donnee sur la figure 3.

Exercice 2. *Beaucoup, a la folie... pas du tout.*

On donne les 3 programmes lineaires suivants.

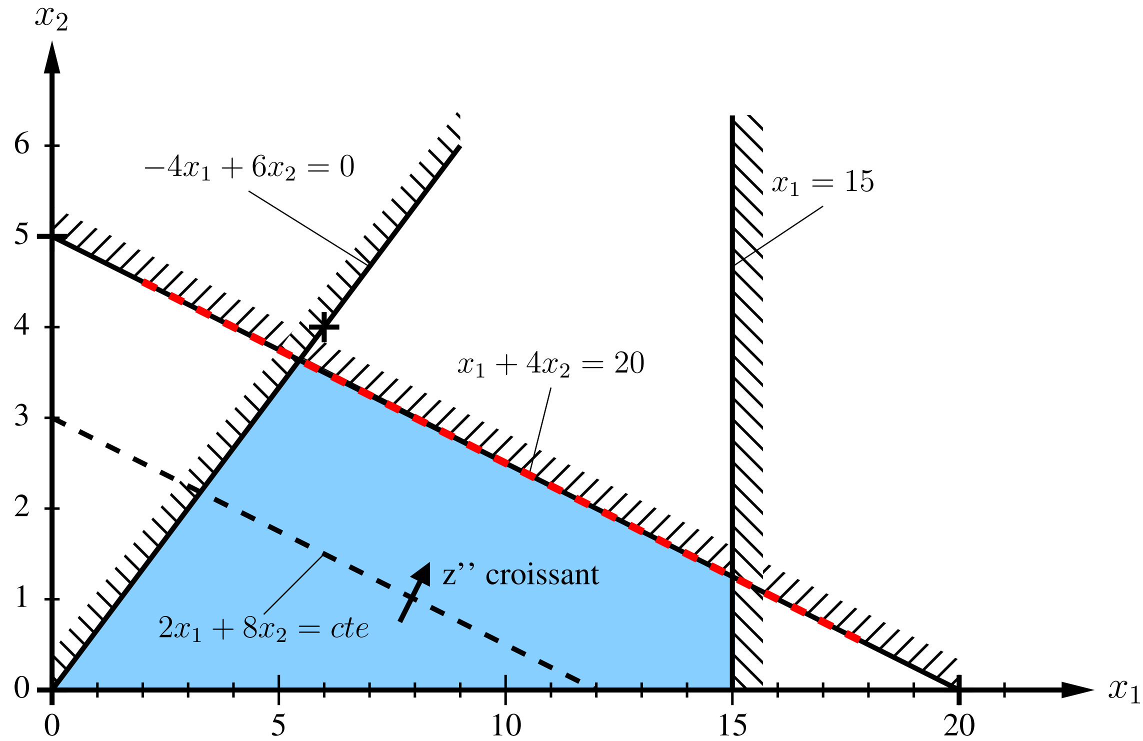


FIGURE 3 – Resolution graphique du programme lineaire en changeant la fonction objectif pour avoir une infinite de solution optimales.

Π_1 : maximiser $x + 2y$ sous conditions :

$$\begin{array}{llcll}
(a) & & -y & \leq & -1 \\
(b) & -x & +y & \leq & 1 \\
(c) & 2x & +3y & \leq & 10 \\
(d) & -2x & -y & \leq & -9
\end{array}$$

$x, y \geq 0$

Π_2 : maximiser $x + y$ sous conditions :

$$\begin{array}{llcll}
(a) & -3x & +y & \leq & -1 \\
(b) & x & -4y & \leq & 1 \\
(c) & -2x & -3y & \leq & -6 \\
(d) & -x & & \leq & -1
\end{array}$$

$x, y \geq 0$

Π_3 : maximiser $-4x + y$ sous conditions :

$$\begin{array}{llcll}
(a) & -3x & +y & \leq & -1 \\
(b) & x & -4y & \leq & 1 \\
(c) & -2x & -3y & \leq & -6 \\
(d) & -x & & \leq & -1
\end{array}$$

$x, y \geq 0$

a. Resolvez graphiquement les 3 problemes proposes.

b. Quelles sont leurs particularites ?

Solution.

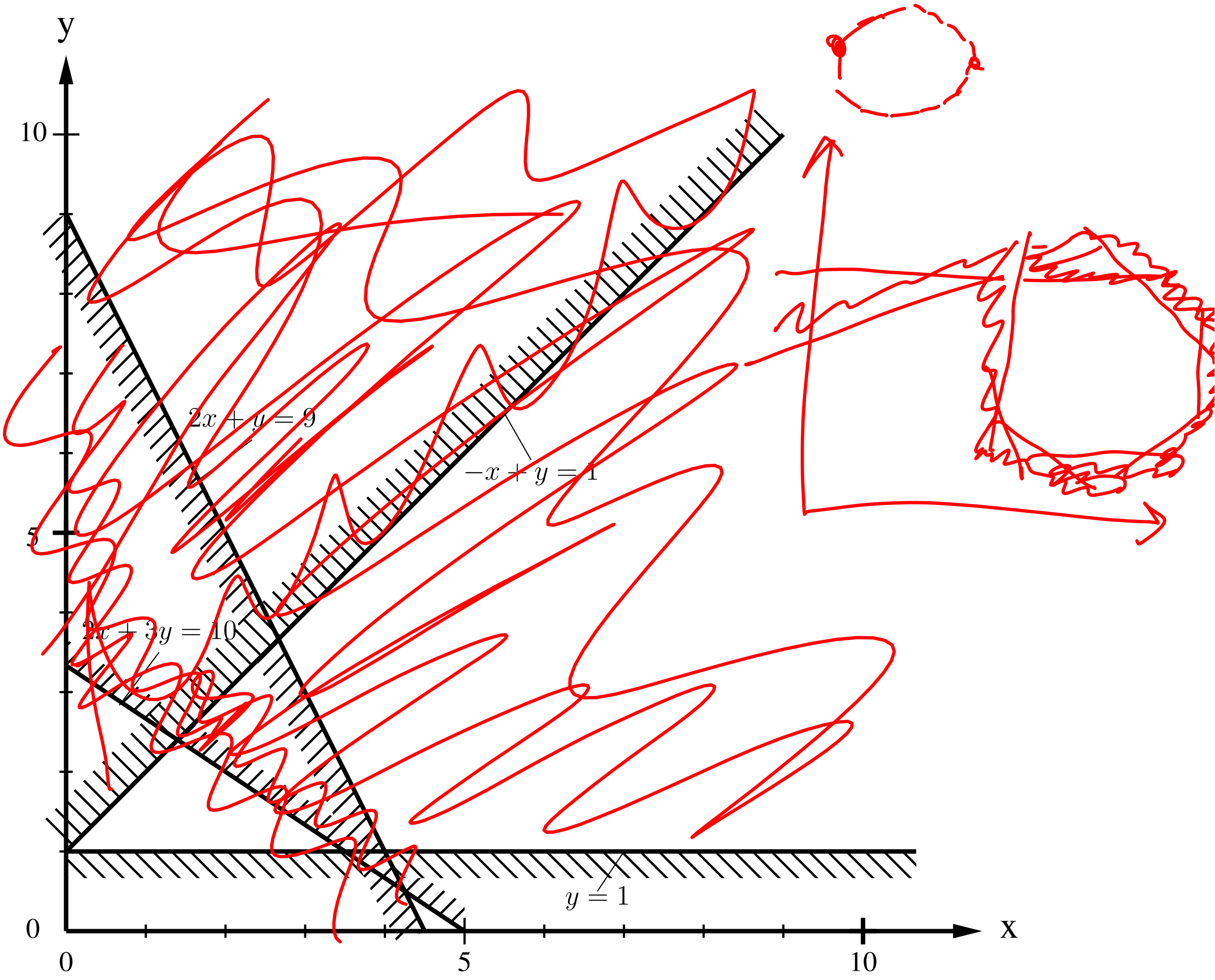


Figure 4 – Resolution graphique du programme lineaire Π_1.

On repond aux deux questions a la fois. La resolution du premier programme lineaire est donne sur la figure 4. On y voit que les 4 contraintes donnees ne sont pas satisfiables simultanement. Le programme lineaire n'a aucune solution admissible et il n'y a donc rien a optimiser.

La resolution du deuxieme programme lineaire est donne sur la figure 5. Dans ce cas, la zone des solutions valides, celles qui satisfont toutes les contraintes, n'est pas bornee (zone bleue sur le dessin), elle est ouverte vers le haut et la droite. Et comme la fonction objectif, $z = x+2y$, croit lorsque x croit (vers la droite) ou lorsque y croit (vers le haut), il n'y a pas de solution maximum : quelle que soit la valeur atteinte pour l'objectif, on peut toujours faire mieux en choisissant des valeurs plus grandes pour x et pour y. Cela ne veut pas dire pour autant qu'on puisse choisir ces valeurs n'importe comment, meme pour les grandes valeurs, il y a certaines contraintes a respecter, en l'occurence $x - 4y \leq 1$ et $-3x + y \leq -1$. En general, lorsqu'on se retrouve dans ce genre de situation, c'est a dire qu'on peut atteindre une valeur objectif aussi grande qu'on veut,

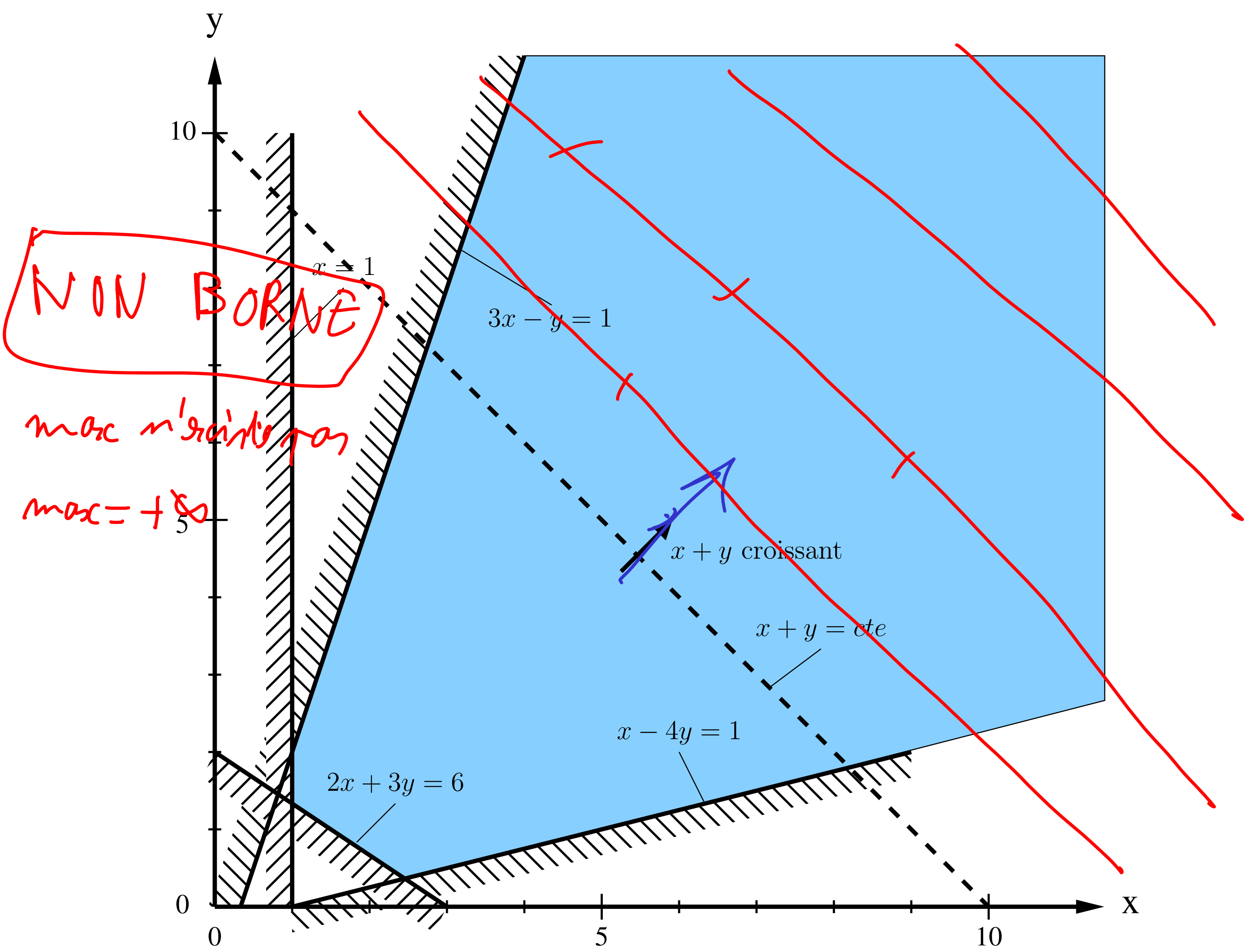


FIGURE 5 – Resolution graphique du programme lineaire Π_2.

on peut soupconner qu'il y a eu un probleme de modelisation : soit le probleme a mal ete modelise par des contraintes lineaires, soit certaines contraintes ont ete oubliees. En effet, dans les problemes provenant du monde reel, rien n'est illimite. Il n'est donc en general pas naturel de pouvoir atteindre un objectif aussi grand qu'on veut.

La resolution du troisieme programme lineaire est donne sur la figure 6. remarquez que la liste des contraintes est exactement la meme que pour le probleme precedant, seule la fonction objectif change ! Mais cela change completement la situation car dans ce cas, il y a une solution optimale et elle est unique. Cela peut paraitre etonnant car la zone des solutions admissibles est encore infinie. Mais la fonction objectif a maximiser ici, $z = -4x + y$, decroit lorsque x croit. Ainsi, la maximisation de cette fonction objectif ne nous "pousse" pas vers la partie non bornee de la zone des solutions admissibles (en bleu). Au lieu de cela, elle nous "pousse" dans la direction d'un des coins limite de la zone bleu. La solution admissible correspondant a ce point (croisement entre les droites d'equations $x = 1$ et $3x - y = 1$) est donc l'unique solution qui maximise la

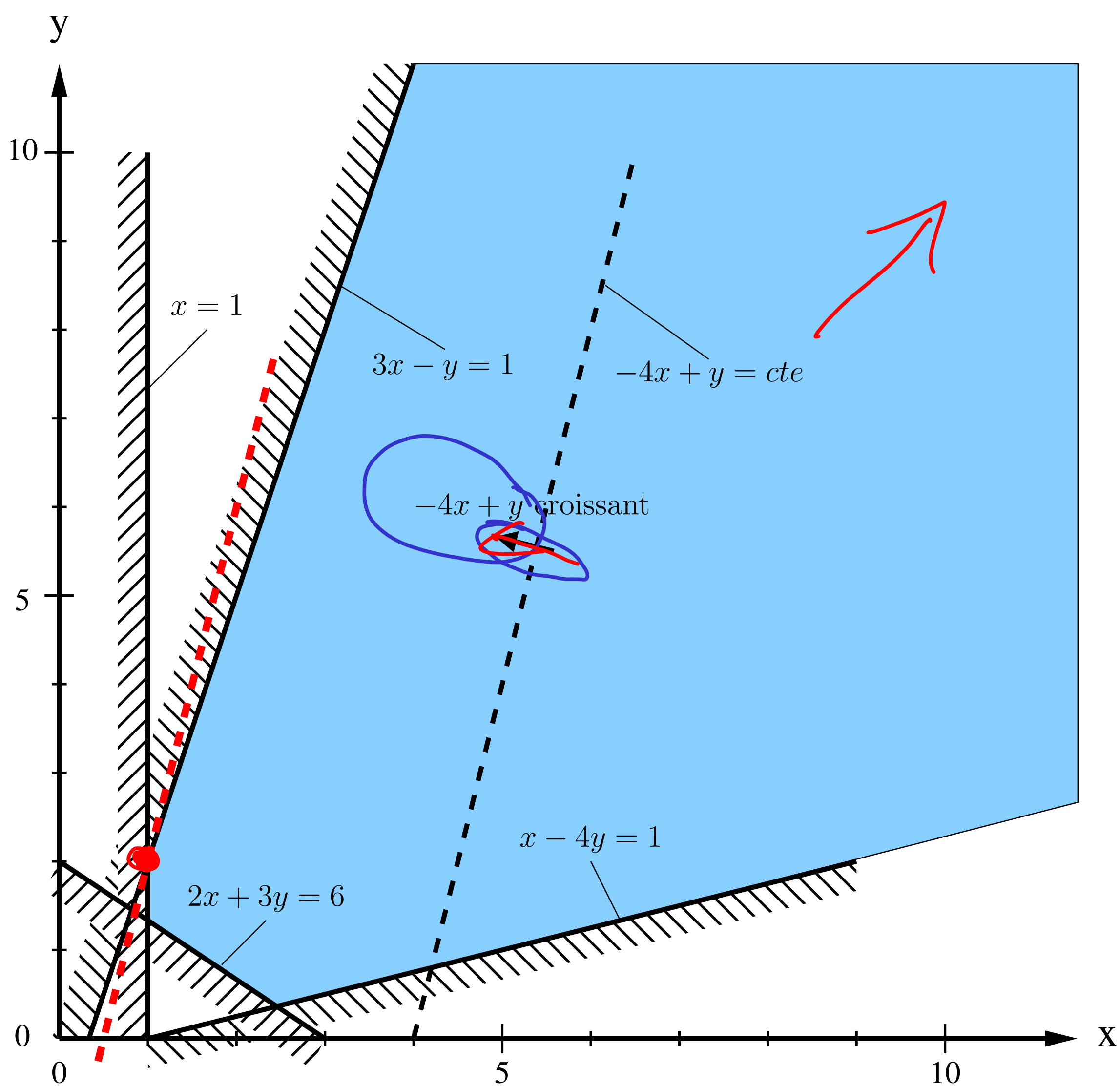


FIGURE 6 – Resolution graphique du programme lineaire Π_3.

fonction objectif $(-4x + y)$. Cette solution optimale est $x = 1$, $y = 2$ et elle atteint une valeur de la fonction objectif de -2.

Remarque. Le fait que le coefficient de x dans la fonction objectif soit negatif ne suffit pas a garantir l'existence d'une solution optimale au probleme. Par exemple, si la fonction objectif etait $z' = -2x + y$, on se retrouverait encore dans la situation precedente ou il n'y a pas de solution optimale. En effet, a partir d'une solution admissible, on pourrait toujours en obtenir une realisant un objectif plus eleve en augmentant y et en augmentant x de 3 fois moins que y, pour suivre la droite d'equation $3x - y = 1$. Ainsi, on reste dans la zone des solutions admissibles tout en augmentant la valeur de l'objectif $z' = -2x + y$.

Exercice 3. *Le voyageur de commerce*

On se propose d'ecrire un programme lineaire en nombre entiers pour resoudre le probleme du voyageur de commerce. On a donc un ensemble X de villes et on note $\mathcal{P}_2(X)$ l'ensemble des paires de X. A chaque paire $uv \in \mathcal{P}_2(X)$ est associee une distance d_{uv} entre u et v. Pour ecrire un programme lineaire en nombre entiers, on introduit une variable binaire $b_{uv} \in \{0,1\}$ pour chaque paire $uv \in \mathcal{P}_2(X)$ de villes, avec $b_{uv} = 1$ ssi la paire uv est selectionnee dans le tour, c'est a dire si u et v aparaissent consecutivement dans le tour.

a. Ecrivez la fonction objectif a minimiser.

Solution. La fonction objectif a minimiser est la longueur du tour, soit $\sum\limits_{uv \in \mathcal{P}_2(X)} d_{uv} b_{uv}$.

Il faut en plus encoder par des contraintes lineaires le fait que l'ensemble des paires selectionnees forment un cycle passant par tous les sommets.

b. Donnez l'ensemble de contraintes, appelees contraintes de parite, qui garantissent que chaque ville appartient a exactement 2 paires selectionnees dans le tour.

Solution. On introduit une contrainte pour chaque ville $u \in X$, qui s'ecrit $\sum_{v \in X \setminus \{u\}} b_{uv} = 2$.

A ce stade, on obtient la fomulation suivante pour le programme lineaire en nombres entiers que l'on est en train de construire, note P :

$$\begin{array}{l}
P : \text{minimiser } \sum_{uv \in \mathcal{P}_2(X)} d_{uv} b_{uv} \text{ sous contraintes :} \\
\hline
\text{(A)} \quad \forall u \in X, \quad \sum\limits_{v \in X \setminus \{u\}} b_{uv} \quad = \quad 2 \\
\forall uv \in \mathcal{P}_2(X), b_{uv} \in \{0,1\}
\end{array}$$

c. Donnez un exemple dans lequel chaque ville appartient a exactement 2 paires selectionnees dans P (c'est a dire pour lesquelles $b_{uv} = 1$) mais l'ensemble de ces paires ne forme pas un tour. Caracterisez tous les cas ou cela se produit.

Solution. C'est par exemple le cas si, avec les paires selectionnees, on forme deux cycles disjoints impliquant chacun une partie (disjointe) des villes. De maniere plus generale, on peut former autant de cycles disjoints qu'on veut. Et ce sont les seuls cas dans lesquels toutes les villes appartiennent a exactement 2 paires selectionnees mais l'ensemble de ces paires ne forme pas un tour (prouvez le !).

Soit maintenant un graphe non oriente $G = (V, E)$, avec $|V| = n$, et le programme lineaire suivant associe a G. On introduit une variable $x_{(u,v)}$ pour chaque couple (u, v) de sommets adjacents dans G. Attention, couple $\neq$ paire : il y a deux fois plus de couples que de paires car les paires uv et vu sont identiques alors que les couples (u, v) et (v, u) sont differents. Le programme lineaire propose, note Π_G, s'ecrit alors, en notant $N(u)$ le voisinage d'un sommet u dans G :

$$\begin{array}{l}
\Pi_G : \text{maximiser } \textit{rien} \text{ sous contraintes :} \\
\hline
\text{(a)} \quad \forall uv \in E, \quad x_{(u,v)} + x_{(v,u)} \quad = \quad 2 \\
\text{(b)} \quad \forall u \in V, \quad \sum\limits_{v \in N(u)} x_{(u,v)} \quad \leq \quad 2 - \frac{2}{n} \\
\forall u, v \in V^2 \text{ et } u \neq v,\ x_{uv} \in \mathbb{R}_+
\end{array}$$

d. Montrez que si G contient un cycle, alors le programme lineaire Π_G ci-dessus n'admet pas de solution faisable.

Solution. Soit C un cycle de G et l sa longueur. $\sum_{u \in C} \sum_{v \in N(u)} x_{(u,v)} \geq 2l$ car, d'apres l' ensemble de contraintes (a), pour toutes les aretes uv de C on a $x_{(u,v)} + x_{(v,u)} = 2$. Et comme il y a l sommets sur le cycle, cela implique qu'il existe au moins un d'entre eux tel que $\sum_{v \in N(u)} x_{(u,v)} \geq 2$, ce qui viole au moins une contrainte de l'ensemble (b).

e. Montrez que si G est un chemin, alors le programme lineaire ci-dessus admet au moins une solution faisable.

Solution. G est un chemin que l'on note $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On peut voir $x_{(u,v)}$ comme la charge que l'arete uv donne a u et $x_{(v,u)}$ comme la charge que l'arete uv donne a v. Au total l'arete uv donne exactement une charge de 2 (ensemble de contraintes (a)), repartie entre u et v comme on veut. Et on veut que chaque sommet recoive une charge d'au plus $2 - \frac{2}{n}$ (ensemble de contraintes (b)). Une facon de construire une solution est la suivante, en suivant l'idee qu'on veut essayer de donner le maximum de charge admissible a chaque sommet (pour decharger les autres), car la quantite totale que l'on donne a l'ensemble des sommets est fixe : exactement 2 par arete de G.

— x_1x_2 donne une charge de $2 - \frac{2}{n}$ a x_1 car c'est la seule arete qui le peut, et x_1x_2 donne le reste de sa charge a x_2, soit une charge de $\frac{2}{n}$
— x_2x_3 donne une charge de $2 - \frac{4}{n}$ a x_2 (c'est le max admissible puisque x_2 a deja recu $\frac{2}{n}$ de x_1x_2) et le reste, $\frac{4}{n}$, a x_3
— x_3x_4 donne une charge de $2 - \frac{6}{n}$ a x_3 et le reste, $\frac{6}{n}$, a x_4
— et ainsi de suite jusqu'a $x_{n-1}x_n$ qui donne $2 - \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2}{n}$ a x_{n-1} et $2 - \frac{2}{n}$ a x_n.

A la fin, tous les sommets ont recu exactement $2 - \frac{2}{n}$ et donc toutes les contraintes de Π_G sont satisfaites. On peut verifier que le total des charges recues par les n sommets du chemin $n(2 - \frac{2}{n}) = 2(n-1)$ est bien le total des charges distribuees par ses $n - 1$ aretes.

Soit w une ville quelconque de l'instance donnee du voyageur de commerce.

f. Montrez que si l'ensemble des paires selectionnees dans le programme lineaire P forme un tour alors le graphe $\tilde{G}$ forme par les paires selectionnees qui ne contiennent pas w est un chemin, et que sinon $\tilde{G}$ contient un cycle.

Solution. Lorsqu'on retire un sommet dans un cycle, on obtient un chemin. Ainsi, si l'ensemble des paires selectionnees forment un tour, celles qui ne contiennent pas w forment un chemin. A l'inverse, si l'ensemble des paires selectionnees ne forment pas un tour, comme tous les sommets sont incidents a exactement deux paires selectionnees (voir l'ensemble de contraintes (A) de P), alors l'ensemble des paires selectionnees est l'union d'au moins deux cycles disjoints, comme explique dans la reponse a la question c. Par consequent, lorsqu'on retire le sommet w, qui n'appartient qu'a un des cycles disjoints, il reste encore au moins un autre cycle intact dans l'ensemble des paires selectionnees.

g. Completez le programme lineaire en nombre entier P en ajoutant en plus des contraintes de parite, un ensemble adequat de contraintes pour que les solutions optimales de P soient les solutions optimales au probleme de voyageur de commerce.

Solution.
Les contraintes qu'on ajoute servent a forcer que les aretes selectionnees ne contiennent pas de cycle disjoint de w. Par rapport au programme lineaire Π_G qui precede, w est retiree de l'ensemble des villes et seules les paires selectionnees dans P (c'est a dire telles que $b_{uv} = 1$) distribuent de la charge :

$$\forall u, v \in X \setminus \{w\}, x_{(u,v)} + x_{(v,u)} = 2b_{uv}$$

et on a toujours les contraintes qui garantissent que la charge recue par une ville (autre que w qui a ete retiree) n'excede pas $2 - 2/n$:

$$\forall u \in X \setminus \{w\}, \sum_{v \in X \setminus \{u,w\}} x_{(u,v)} \leq 2 - \frac{2}{n}$$

Au final, dans son integralite, le programme lineaire en nombres entiers pour le voyageur de commerce, note TSP, s'ecrit comme suit.

TSP : minimiser $\sum_{uv \in \mathcal{P}_2(X)} d_{uv} b_{uv}$ sous contraintes :

$$\begin{array}{lrrcl}
\text{(A)} & \forall u \in X, & \sum_{v \in X \setminus \{u\}} b_{uv} & = & 2 \\
\text{(B)} & \forall uv \in \mathcal{P}_2(X \setminus \{w\}), & x_{(u,v)} + x_{(v,u)} & = & 2b_{uv} \\
\text{(C)} & \forall u \in X \setminus \{w\}, & \sum_{v \in X \setminus \{u,w\}} x_{(u,v)} & \leq & 2 - \frac{2}{n}
\end{array}$$

$\forall uv \in \mathcal{P}_2(X), b_{uv} \in \{0, 1\}$
$\forall (u, v) \in (X \setminus \{w\})^2$ et $u \neq v, x_{(u,v)} \in \mathbb{R}_+$

Notez que les variables sont les b_{uv} et les $x_{(u,v)}$, que les d_{uv} pour $uv \in \mathcal{P}_2(X)$ sont des donnees du probleme et que $w \in X$ est une ville choisie arbitrairement.