On a vu précédemment qu'on avait les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$$

Où $\mathbb{A}$ correspond à l'ensemble des nombres algébriques (notation abusive).
On appelle d'ailleurs $\mathbb{R} \backslash \mathbb{A}$ l'ensemble des nombres transcendants (autrement dit des nombres qui ne sont pas algébriques).

On a également pu montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont tous deux infinis dénombrables.

Intéressons-nous maintenant à l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$:
Une propriété importante réside dans le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient des éléments de $\mathbb{Q}$.

Théorème : (Cantor – Bernstein)

Soient E et F deux ensembles quelconques. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F vers E, alors il existe une bijection entre E et F.

Remarque : on verra la démonstration plus tard

Exercice : Montrer que $\mathbb{Q}$ est (infini) dénombrable

Par définition, si $x \in \mathbb{Q}$: $\exists!\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$ et $p \hat{} q = 1$

On a déjà vu que $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^2$ et avec $\mathbb{Z}$, ce qui nous permet d'affirmer que $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{Z}^2$ (qui contient $\mathbb{Q}$).

Montrons qu'on a une injection entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$:

- Si $x \in \mathbb{Q}^*_+$ alors : $\exists!\ p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$ et $p \hat{} q = 1$

  Si on pose f_+ la fonction de $\mathbb{Q}^*_+$ dans $\mathbb{N}^2$ qui a tout $x = \frac{p}{q}$ (comme définis ci-dessus) associe le couple (p, q), on a bien f_+ **injective**.

- Si $x \in \mathbb{Q}_-$ alors : $\exists!\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$ et $p \hat{} q = 1$

  On pose f_- la fonction de $\mathbb{Q}^*_-$ dans $\mathbb{N}^2$ qui :
  - A tout $x = \frac{p}{q}$ (comme définis ci-dessus), $x \neq 0$, associe le couple (p, q)
  - A tous $x = 0$ associe le couple $(0,1)$

  On a alors f_- **injective**.

Or, on a déjà vu qu'on avait une injection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.
En particulier, on a :

$\mathbb{Q}^*+ \longrightarrow \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ pair}\}$

$\mathbb{Q}^*- \longrightarrow \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} \longrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ pair}\}$

Où les flèches bleues représentent des injections.

De plus, on a que : $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^*_+ \cup \mathbb{Q}_-$ et $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ pair}\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ impair}\}$
Ce qui entraîne qu'on a une injection entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$.
De plus, on a également une injection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$: il s'agit de l'identité (puisque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$)

Finalement : par le théorème de Cantor-Bernstein, on en conclut qu'il existe une bijection entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$.

Définition : (nombre algébrique)
Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est dit algébrique si et seulement s'il est solution d'une équation P(x) = 0 avec P un polynôme à coefficients rationnels

Remarque : (notation) $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$, $\forall$ i $\in \{0,\ldots,n\}$, $a_i \in \mathbb{Q}$ et où $n = \deg(P)$

Exemples : $1 \in \mathbb{A}$, $1 \in \mathbb{Q}$
ou $\sqrt{2} \in \mathbb{A}$ ¿avec $P(x) = x^2 - 2$

Remarque : Les réels qui ne sont pas algébriques sont transcendants. On y trouve notamment l'exponentielle exp (qu'on définit par : $\exp(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X^k}{k!}$) ou π

Propriété :

Si $x \in \mathbb{A}$ alors x est racine d'un polynôme à coefficients entiers

Preuve :

En effet : si $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$, $\forall$ i $\in \{0,\ldots,n\}$ $a_i \in \mathbb{Q}$ et où $n = \deg(P)$

On pose en particulier, $\forall$ i $\in \{0,\ldots,n\}$: $a_i = \frac{p_i}{q_i}$ et on prend $m = \text{ppcm}(q_i)$

(ou on peut aussi poser $m = \prod_{i=0}^{n} q_i$)

On pose finalement $Q = m^*P = \sum_{i=0}^{n} m \frac{p_i}{q_i} x_i$ et on a, par définition de m :

$$\forall \text{ i } \in \{0,\ldots,n\}, \ \frac{m}{q_i} \in \mathbb{N}$$

Donc Q est un polynôme à coefficients entiers qui admet pour racine $x \in \mathbb{A}$

Exercice : Montrer que $\mathbb{A}$est dénombrable
Indication : Montrer qu'on peut les énumérer

Gardons en tête qu'un polynôme (de degré $n \in \mathbb{N}$) a un nombre fini de racines (≤n).

- Idée 1 : énumérer tous les polynômes de degré fixé

On se rend tout de suite compte que c'est impossible, on a une infinité de possibilité pour chaque coefficient : dans un programme, si on fait une boucle qui énumère toutes les valeurs possibles d'un coefficient avant de passer au suivant, on aurait une boucle infinie...

- Idée 2 : énumérer les polynômes à somme des coefficients notés a_i

On pose $\sum_{❑}^{❑} ❑|a_i| = s$ et on se cantonne aux polynômes tels que deg(P)≤n et s ≤n

avec $n = \max \{ \deg(P),\ s \}$

(l'idée d'utiliser la somme des coefficients se déduit de la preuve que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on avait utiliser un programme qui utilisait cette condition)

Finalement : on peut introduire une nouvelle notion appelée "hauteur d'un polynôme" définie par : $h(P) = \sum_{❑}^{❑} ❑|a_i| + \deg(P)$. Cette dernière permet d'énumérer tous les polynômes dont la somme des coefficients vaut k et de la classer en fonction de leurs degrés.

On en conclut donc que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

On a réussi à montrer que jusqu'aux nombres algébriques, on avait des ensembles dénombrables.

On peut même dire que : $\mathbb{N}[x] \approx ¿k \in \mathbb{N}¿❑\mathbb{N}^k$

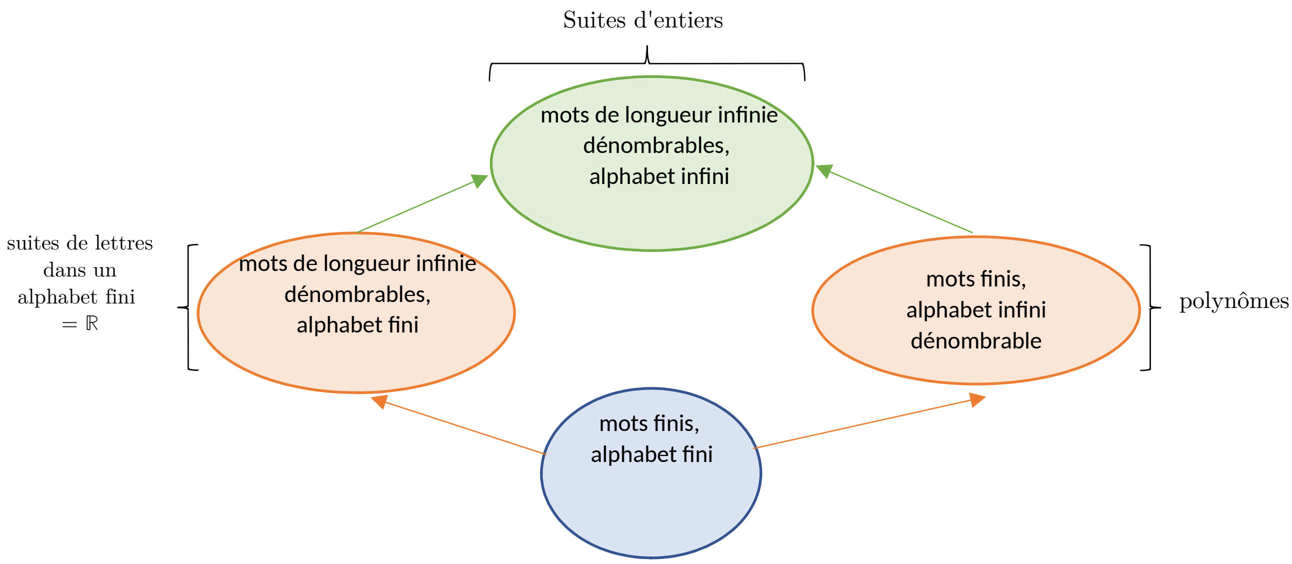
D'un point de vue plus informatique maintenant :

Soient Σ un alphabet fini et $\omega \in \Sigma^*$ un mot fini. Alors on peut décomposer ω comme :

$\omega = \omega_0\ \omega_1 \ldots \omega_k$ où k correspond à la longueur du mot (les $\omega_i \in \Sigma$)

Or avec ce qu'on vient de voir on peut aller plus loin : si Σ un alphabet infini dénombrable, on pourra tout de même décrire des mots de cet alphabet (cf. $\mathbb{N}[x]$)

On cherche à trouver un ensemble infini non dénombrable. Résumons ce qu'on sait par un schéma :



Il nous faut maintenant montrer que ℝ est indénombrable (on a vu que les trois autres le sont).

Propriété :

Tout réel a une écriture décimale.

En particulier : $\forall x \in [0, 1[\ ,\quad \exists! \ (a_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \quad$ tels que $x = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i 10^{-i}$

Et $\forall K \in \mathbb{N}, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad k \geq K \quad$ et $a_k \neq 9$

Exercice : Montrer que $[0, 1[$ est indénombrable

Par l'absurde : supposons que $[0, 1[$ est dénombrable. Donc $[0, 1[= \{ x_k \}_{k \in \mathbb{N}^*}$ (i.e. on énumère/numérote les éléments de $[0, 1[$).

Pour $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \sum_{i=1}^{+\infty} a_{k\,i} 10^{-i}$ et on peut dresser la tableau suivant :

$[0, 1[$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	….
x_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	
x_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	
x_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	
x_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	
…						

Soit $y \in [0, 1[$ défini par :

$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad y_i \in \{0,\ldots,9\} \backslash \{a_{i\,i}, 9\}$

Or, comme $y \in [0, 1[, \quad \exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x_k$ et donc $y_k = x_{k\,k}$

On a ici une contradiction avec la définition de y (puisqu'on doit avoir $y_i \neq x_{ii}$)

Conclusion : $[0,1[$ est indénombrable.

Finalement, par Cantor, on a alors que [0,1[n'est pas dénombrable, et que ℝ non plus.