

# LP 2020 – Conservation du moment cinétique

16 mai 2021

Clément Gidel & Pascal Wang

Niveau :

Commentaires du jury

Bibliographie

🔗 *Le nom du livre, l'auteur*<sup>1</sup>

→ Expliciter si besoin l'intérêt du livre dans la leçon et pour quelles parties il est utile.

Prérequis

Expériences

- Théorème fondamentaux de Mécanique newtonienne : PFD, TEC, TMC
  - Mécanique céleste : 3ème loi de Kepler
  - Coniques
- 👉 Biréfringence du quartz

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Conservation du moment cinétique comme réduction du nombre de dof</b>	<b>3</b>
1.1	Première approche : le patineur . . . . .	3
1.2	Mouvement à force centrale . . . . .	3
1.3	Retour sur le problème à 2 corps . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Applications</b>	<b>5</b>
2.1	Allongement distance Terre-Lune . . . . .	5
2.2	Dynamique Terrestre : Origine des alizés . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>7</b>

L'idée de cette leçon est de faire la continuité avec le cours précédent sur les lois de conservation. On peut alors dire qu'on a déjà étudié la conservation de l'impulsion et de l'énergie pour des systèmes avec un nombre de dof réduits (1 ou 2).

Par conséquent, on va ici s'attaquer à des problèmes avec bcp plus de dof, qui impliquent notamment des solides et on va utiliser un nouvel outil : conservation du moment cinétique.

On peut donner en intro des exemples qui ont pour points commun des conservations de moment cinétique.

**Prérequis :** On peut mettre conservation d'autres grandeurs dynamiques, théorèmes fondamentaux (PFD, TEC, TMC) et ici on se concentre seulement sur des applications dans des cas de conservation.

Pour le plan, je vois bien commencer doucement sur des exemples basiques comme avec le patineur, on peut donner des ODGs de moment d'inertie, de vitesse de rotation, agrémenter ça de vidéos. Dire qu'on a déjà pu faire une analyse semi quantitative avec et qu'on va maintenant utiliser ça sur des systèmes plus complexes en apparence mais dont la physique est (quasiment) la même. L'éllongation de la distance Terre-Lune est aussi pas mal mais assez complexe ! Francis le fait plutôt bien, ça peut être plutôt une bonne idée !

Ensuite, on peut faire le cas du pb à 2 corps, la loi des aires avec le code Python.

Une bonne idée est de développer l'origine des alizés.

Une idée de fil rouge serait de parler de mécanique céleste. On dit qu'on commence par un exemple simple pour se familiariser avec la notion de conservation de moment cinétique : le patineur.

Ensuite on fait un récap du pb à 2 corps : La conservation de l'impulsion nous fait passer à 6 ddl dans l'espace des phases. La conservation du moment cinétique nous donne un mouvement plan, 4 ddl. La loi des aires nous fait passer à 3 ddl. Puis l'énergie effective permet de passer à deux ddl,  $r$  et  $\dot{r}$ , donc on utilise Runge-Lenz.

Enfin on peut parler en partie 2 des applications à la conservation du moment cinétique en changeant de système à chaque fois (on passe de Terre Soleil à Terre Lune et à Terre uniquement).

## Introduction

Définition du système (solide déformable), des degrés de liberté. Mention du référentiel. On donne un cadre général qu'on va spécifier au cas par cas. On a déjà utilisé le TEC et PFD pour décrire les systèmes qui conservent l'impulsion et l'énergie, on va maintenant se servir du TMC pour décrire les rotations dans des systèmes solides.

On peut rappeler une def du moment cinétique  $\vec{L} = I\omega$  dans le cas d'un solide symétrique en rotation autour de son axe principal. Il est alors important de rappeler que le moment cinétique se décompose comme moment d'inertie et de vitesse de rotation. On se limitera à des cas simples où cette relation vectorielle est vérifiée.

On se place dans notre système, on fait le TMC par rapport au point O :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mathcal{M}_{Ext}(O); \vec{L} = \iiint_{(S)} \rho O\vec{M} \times \vec{v} d\tau$$

et  $\mathcal{M}_{Ext}(O) = O\vec{M} \times \vec{F}$ . Il y a conservation si le moment est nul  $\iff$  les moments se compensent/sont nuls ou si on a une force centrale.

On va alors examiner les deux cas dans cette leçon !

## 1 Conservation du moment cinétique comme réduction du nombre de dof

### 1.1 Première approche : le patineur

**Application : Le patineur en rotation**  $\nrightarrow$  Super explications par ici! On veut expliquer : <https://youtu.be/ORVyh3E9hY?t=59>. La patineuse arrive à tourner plus vite autour de son axe. Comment? On considère la projection du moment cinétique  $L_{\Delta}$  selon l'axe vertical de son corps  $\Delta$ . Le poids n'exerce pas de couple car la patineuse est approximativement droite. On suppose le contact ponctuel avec la glace : la réaction du support s'applique sur le point de contact qui se trouve sur l'axe  $\Delta$  donc n'exerce pas de couple (en fait : ce n'est pas exactement le cas, pour garder l'équilibre on plante une partie des patins cf. vidéo). On suppose le contact ponctuel parfait avec la glace : pas de moment résistant. Ainsi,  $L_{\Delta}$  est conservé. Lorsque la patineuse rapproche ses membres de l'axe de symétrie  $L = I\omega$  est conservé mais  $I$  diminue donc  $\omega$  augmente.

On va approfondir en analysant un extrait du champion du monde et double médaille d'or olympique en compétition : <https://youtu.be/23EfsN7vE0A?t=438> En l'air, le patineur rapproche les membres de son corps pour minimiser  $I$  et donc augmenter  $\omega$ . Pour enchaîner des sauts, le patineur lève une jambe à l'atterrissage pour ralentir sa vitesse de rotation tout en gardant son moment cinétique. C'est très important d'utiliser les jambes car ils contribuent autant voir plus que les bras au moment d'inertie : ils sont plus lourds et plus longs. Cela permet d'avoir un deuxième patin stable pour enchaîner un deuxième saut. Avant le deuxième saut, le patineur plante un patin au sol pour augmenter son moment cinétique :  $L_{\Delta}$  n'est pas conservé à cette étape. Ensuite, c'est la même chose que pour le premier saut, il essaie de rapprocher ses membres le plus possible pour maximiser sa vitesse de rotation. Pour l'atterrissage, le patineur étend encore une fois ses jambes et ses bras pour arrêter de tourner.

**AN :** Pour un patineur en position rotation faible, jambes écartées on peut estimer (approximations de cylindres) que  $\omega_1 = \text{tour/s}$  et  $I_1 = 3.5 \text{kg.m}^2$ . Quand on rapproche ses bras et jambes on change  $I_2 = 1.0 \text{kg.m}^2$ . On trouve alors  $\omega_2 = 3.5 \text{tour/s}$ .

**Message :** On a ici traité un premier exemple naïf de la conservation du moment cinétique. On a pas eu besoin de rentrer dans les détails du système (qui n'est pas un solide!) pour pouvoir faire une analyse qualitative et en déduire une évolution de vitesse de rotation.

↓ Ici on a fait une approche avec les mains en considérant notre système comme pseudo isolé. En pratique un système est soumis à des forces et la conservation du moment cinétique n'est pas immédiate

### 1.2 Mouvement à force centrale

**Invariance par rotation/isotropie** Origine : Potentiel en sphérique. Alors :  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r, \theta, \Phi)$ , donc

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{r} \times \vec{\nabla}U(r, \theta, \phi)$$

$$\text{Or, } \vec{\nabla}U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \Phi} \end{pmatrix}$$

. Donc le produit vectoriel est nul si les dérivées par rapport à  $\theta$  et  $\Phi$  sont nulles.

L'isotropie spatiale (aka invariance par rotation spatiale) implique la conservation du moment cinétique.  
**Mentionner que cela est naturel avec Noether mis en prérequis ? ?**

**Exemple : interaction gravitationnelle** Le potentiel gravitationnel créé par une masse ponctuelle  $m$  est :  $U(r) = -Gm/r + cte$ . Le moment cinétique est conservé.

**Application : loi des aires** On considère le Soleil et un astre du système solaire. La masse du Soleil est  $\sim 10^{30} kg$ . La masse de Jupiter est  $10^{27} kg$ . Ainsi, on considère que le Soleil est fixe dans le référentiel de Copernic (lié au centre de masse du système solaire). On place l'origine au centre du Soleil. On considère une planète repérée par  $\vec{r}$ . La première loi de Kepler donne que la planète suit une trajectoire elliptique. Soit  $A(t)$  l'aire de la surface balayée par le rayon vecteur  $\vec{r}$  durant le mouvement, alors la seconde loi de Kepler stipule que des aires égales sont balayées dans des temps égaux. La difficulté est essentiellement d'ordre géométrique. On va faire simple en rappelant l'interprétation géométrique du produit vectoriel. Le produit vectoriel  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  a une direction perpendiculaire à  $\vec{a}$  et sa norme est l'aire du parallélogramme engendré par  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ . **On montre un schéma**. L'aire  $dA$  balayée par  $\vec{r}$  en un temps  $dt$  est égale à l'aire du triangle formé par  $\vec{r}$  et  $d\vec{r}$ , soit la demi-aire du parallélogramme engendré par  $\vec{r}$  et  $d\vec{r}$  **on montre un schéma** :

$$dA = \frac{|\vec{r} \wedge d\vec{r}|}{2} = \frac{|\vec{r} \wedge \vec{v}|}{2} dt = \frac{|\vec{L}|}{2m} dt$$

Or  $\vec{L}$  est conservé donc  $dA/dt = cte$  d'où la loi des aires.

#### Animation python de la loi des aires

Pour le moment python, on peut lancer le programme du site de l'agreg "Illustration de la seconde loi de Kepler".

**Message :** En introduisant des forces centrales (i.e à symétrie sphérique) on arrive toujours à trouver une quantité conservée qui permet de trouver de nouvelles informations sur notre système.

↓ *Maintenant qu'on a vu une manifestation de la conservation du moment cinétique en mécanique céleste, on va voir son utilité dans la résolution du problème à 2 corps.*

### 1.3 Retour sur le problème à 2 corps

Jsp si c'est une bonne idée de le présenter sans aller jusqu'au bout du pb. A mon avis si on le fait on essaie de le faire propre au moins sur les hypothèses et ce qu'on apporte avec la 2nd loi. Trouver les orbites avec Runge Lenz c'est quand même bien de le faire l'idée serait de mettre en prérequis coniques.

**Idee :** Ensuite on fait un récap du pb à 2 corps (☛ **Préciser ici qu'on va se placer dans un autre référentiel que celui du soleil!**) : La conservation de l'impulsion nous fait passer à 6 ddl dans l'espace des phases. La conservation du moment cinétique nous donne un mouvement plan, 4 ddl. La loi des aires nous fait passer à 3 ddl. Puis l'énergie effective permet de passer à deux ddl,  $r$  et  $\dot{r}$ , donc on utilise Runge-Lenz. **On peut faire ça sur diapo!**

Pour le détail, suivre la fiche de Pascal. Au départ on a  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2), (\vec{p}_1, \vec{p}_2)$  donc 12 ddl. Le changement au mouvement du centre de masse et du mouvement relatif réduit à 6 ddl  $(\vec{r}, \vec{p})$  grâce à la conservation de l'impulsion (système isolé).

Ensuite, la conservation du moment cinétique implique le mouvement plan  $\frac{dL}{dt} = \vec{r} \times F = \vec{0}$   $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L} = cte$   $(\vec{r}, \vec{p})$  dans un plan constant généré par  $(\vec{r}(t=0), \vec{p}(t=0))$  dans les coordonnées cylindriques d'axe  $z$   $\|\vec{L}\|$ , et  $\|\vec{L}\| = pr^2\dot{\theta} = cst$ . On a donc réduit le nb de ddl à 4.

La loi des aires donne une relation entre la norme du moment cinétique et la constante des aires (qui s'interprète comme la vitesse aréolaire à un facteur 1/2 près)  $\|\vec{L}\| = C\mu$  donc on a 3 ddl. Ensuite l'écriture de l'énergie potentielle effective permet de se ramener à 1 ddl : la distance  $r$  et on peut discuter des trajectoires (**On le fait pas car c'est à mon avis un peu HS mais on le mentionne : l'important est de montrer la réduction du nombre de ddl grâce à la conservation du moment cinétique.**)

Il faut faire Runge Lenz, montrer que le vecteur est conservé, donner son utilité (il permet de calculer facilement les orbites possibles!) comme ça on peut conclure ce petit cas.

**Message :** On a réussi à réduire le nombre de degrés de libertés de notre problème grâce à plusieurs quantités conservées, dont le moment cinétique.

La conservation du moment cinétique permet de simplifier le problème en réduisant le nombre de ddl et la résolution se fait grâce aux autres quantités conservées. Peut-on réussir à traiter un problème de mécanique céleste avec ce seul outil ?

## 2 Applications

### 2.1 Allongement distance Terre-Lune

Se chauffer sur cette partie, c'est pas évident. Bien savoir d'où vient le ralentissement de la vitesse de rotation et comment on peut le calculer.

**Application : allongement de la distance Terre-Lune (Pascal), analyse qualitative** La Terre a une vitesse de rotation qui diminue à cause de la dissipation des forces de marées **ODG**: 3 TW. (cf schéma [https://en.wikipedia.org/wiki/Tidal\\_acceleration](https://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_acceleration)) Par conservation du moment cinétique du système "Terre-Lune", quand la Terre décélère, le moment cinétique de la Lune associé à son mouvement orbital augmente en compensation, ce qui se traduit par son accélération sur son orbite et, donc, son éloignement. **ODG**: 4cm par an. *Comment la lune "sait-elle" que la Terre ralentit ? Puisque donc le bourrelet de marée n'est pas dirigé exactement vers le centre de la Lune (cas idéal), et que les deux bourrelets (celui d'avant et celui d'arrière) ne sont pas situés aux mêmes distances de la Lune, celle-ci « sent » cette asymétrie. Le bourrelet situé face à la Lune a un effet plus important et l'accélère ; le bourrelet situé à l'arrière la ralentit, mais son effet est moins important car il est plus distant. Le résultat de ce couple est une force contribuant à accélérer la rotation de la Lune et à éloigner son orbite* La distance lunaire continue à augmenter jusqu'à ce que la Terre et la Lune soient verrouillées gravitationnellement et aient une rotation synchrone. Cela se produit lorsque la période de rotation du corps est synchrone avec sa période de révolution. C'est ce qui est arrivé à la Lune. Comme les forces de marées varient en  $M/d^3$ , l'effet des marées est plus marqué sur la Lune que sur la Terre. Les modèles prédisent que 50 milliards d'années seraient nécessaires pour que la Terre arrête de tourner. Les deux corps sont alors dans un équilibre et aucune autre énergie de rotation n'est échangée.

**Francis :** Conservation du moment angulaire du système Terre-Lune.

On suppose les deux astres parfaitement sphériques avec une vitesse de rotation constante, des trajectoires circulaires et ayant le même plan équatorial. (Important à mentionner : Le système n'est pas isolé, le Soleil exerce une grande force. Par conséquent il y a également des marées du Soleil, mais elles sont plus faibles d'un facteur 2. Et pour la contribution au moment, il faut regarder l'angle de déphasage également... Mais on va le négliger pour l'instant. Note perso : la Lune étant dans la sphère de Hill de la Terre, c'est bien l'interaction terrestre qui est prépondérante.

On part d'une observation (géologique) : La durée des jours rallonge de 2 ms/ siècle (dû aux marées). Si on fait le calcul,  $\frac{d\Omega_T}{dt} = -4.5 \times 10^{-22} \text{rad/s}$  Or, le système est isolé, donc il y a conservation du moment cinétique  $\sigma = I_T \Omega + M_L d_L^2 \omega$  où  $\omega$  est la pulsation de rotation de la Lune autour de la Terre. By the way, la rotation de la Lune sur elle-même est quasi-nulle (négligeable) due à ce même effet de marée, appliqué de la Terre sur la Lune. Or, en faisant le PFD sur un mouvement circulaire, on obtient  $\omega = \sqrt{\frac{GM_T}{d_L^3}}$  Via la conservation, on en déduit :

$$I_T \frac{d\Omega_T}{dt} = -\frac{\sqrt{GM_T}}{2\sqrt{d_L}} M_L \frac{d(d_L)}{dt}$$

$$\frac{d(d_L)}{dt} = -\frac{2\sqrt{d_L}}{\sqrt{GM_T M_L}} I_T \frac{d\Omega_T}{dt}$$

A.N. :

$$I_T = 8 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$-M_T = 6.0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$M_L = 7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

$$d_L = 3.8 \cdot 10^8 \text{ m}$$

On trouve 3.2 cm/ an, ça colle vraiment pas mal aux mesures de 3.8 cm/ an (mesures à afficher ?). Dans 10000 ans (? se renseigner sur ce nombre) on ne pourra plus avoir d'éclipses totales.

L'effet est un million de fois plus faible pour le Soleil sur la Terre sur le ralentissement des jours.

La conservation du moment cinétique se manifeste aussi à l'échelle Terrestre dans l'atmosphère



## 2.2 Dynamique Terrestre : Origine des alizés

Source : <https://www.lmd.jussieu.fr/~hourdin/PEDAGO/cours.pdf>

**Idée de cette partie :** Partir de la circulation de Hadley sans détailler et dire que la conservation du moment cinétique mène à des vents d'ouest qui est un frein à cette cellule de convection. On peut donner des ODGs de vitesse des vents, comparer la Terre et Venus pour cette dynamique (Venus tourne plus lentement donc moment cinétique plus faible).

A un mouvement vers le pôle est associé la création de vents d'ouest. La meilleure façon pour le comprendre est de considérer le moment cinétique des particules fluides par rapport à l'axe des pôles. Ce moment cinétique est le produit de la composante ouest-est de la vitesse absolue de la particule par la distance à l'axe de rotation. On peut montrer que, si on suit une particule de fluide, l'évolution de ce moment cinétique est égale au moment (produit par la distance à l'axe) de la composante ouest-est des forces exercées sur la particule. En l'absence de friction et si les gradients longitudinaux de pression sont nuls ( $\partial p / \partial x = 0$ ), la particule fluide conserve son moment cinétique dans son mouvement vers les pôles.

Qu'arrive-t-il par exemple à une particule d'air qui part de l'équateur et est emportée (advectée) vers les hautes latitudes dans la branche supérieure de la cellule de Hadley ? Comme une patineuse quand elle resserre les bras (Fig. 3.4), cette particule, en se rapprochant de l'axe des pôles, se met à tourner de plus en plus vite<sup>3</sup>. La vitesse relative des particules par rapport à la planète (le vent) croît encore plus vite que la vitesse absolue puisque, quand on se dirige de l'équateur vers le pôle, la vitesse absolue de la surface de la planète est de plus en plus petite.

Prenons au contraire une particule près de la surface qui part avec une vitesse relative (ou vent) nulle d'une certaine latitude, 30° par exemple. Cette particule est entraînée vers l'équateur par la circulation de Hadley, et elle s'éloigne donc de l'axe des pôles. La particule tourne alors moins vite que la planète. C'est l'origine des alizés, ces vents d'est intertropicaux, jadis utilisés par la marine à voile.

Pour déduire les équations mathématiques de la conservation du moment cinétique, il faut introduire quelques conventions supplémentaires.

**Coordonnées sphériques et composantes du vent** Un système de coordonnées particulièrement adapté aux études météorologiques est le système des coordonnées sphériques dans lequel la position d'un point est repérée par deux angles, la longitude  $\lambda$  et la latitude  $\phi$ , et la distance  $a$  au centre de la terre  $r$  (ou l'altitude  $z$  du point par rapport au géopotentiel de référence). Les conventions de définition de la longitude et de la latitude sont données sur la Fig. 3.5. Il est également commode d'introduire, à la surface de la terre un repère cartésien local  $(x, y, z)$ . On prend par convention  $x$  le long du parallèle local et orienté vers l'est,  $y$  le long du méridien et orienté vers le nord et  $z$ .

vertical orienté vers le haut. On note en général  $(u, v, w)$  les trois composantes du vent (ou vitesse relative)  $\vec{U}_r$ .

On voit facilement que les composantes du vent sont reliées aux coordonnées sphériques par les identités suivantes

$$u = a \cos \phi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v = a \frac{d\phi}{dt} \quad \text{et} \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

La dérivée temporelle dans ces expressions, notée  $d/dt$ , est calculée en suivant les particules fluides ; c'est la dérivée Lagrangienne. Les composantes  $u$  et  $v$  du vent sont appelées composantes zonale et méridienne.

**Expression mathématique de la conservation du moment cinétique** Avec ces conventions, le moment cinétique d'une particule autour de l'axe des pôles est le produit de sa masse  $m$ , de sa vitesse zonale absolue  $u_a = \Omega a \cos \phi + u$  et de la distance à l'axe  $d = a \cos \phi$  (se reporter à la Fig. 3.5)<sup>4</sup> soit

$$M = ma \cos \phi (\Omega a \cos \phi + u)$$

La conservation du moment cinétique particulière se traduit en disant que sa dérivée Lagrangienne est nulle

$$\frac{d}{dt} [\cos \phi (\Omega a \cos \phi + u)] = 0$$

ou encore

$$\cos \phi \frac{du}{dt} = (u \sin \phi + 2a\Omega \cos \phi \sin \phi) \frac{d\phi}{dt}$$

La variation Lagrangienne de la latitude au cours du déplacement d'une particule est simplement égale à  $v/a$  et l'accélération zonale d'une particule conservant son moment cinétique s'écrit finalement

$$\frac{du}{dt} = uv \frac{\tan \phi}{a} + 2v\Omega \sin \phi$$

Sur la Terre, le deuxième terme dans le membre de droite (accélération de Coriolis) est très supérieur au premier parce que la vitesse absolue d'une particule "immobile" au niveau de l'équateur  $a\Omega \sim 460 \text{ ms}^{-1}$ , est toujours très supérieure au vent zonal  $u$  qui dépasse rarement  $100 \text{ ms}^{-1}$ . On voit donc que la conservation du moment cinétique déviara les particules se dirigeant vers le pôle ( $v\phi > 0$ ) vers l'est et les particules se dirigeant vers l'équateur vers l'ouest. Il est important de remarquer que la simple conservation du moment cinétique par une particule partant avec une vitesse nulle de l'équateur, produit à  $30^\circ$  de latitude, un vent d'ouest

$$u = a\Omega \frac{1 - \cos^2 \phi}{\cos \phi} \sim 135 \text{ ms}^{-1}$$

**Remarque importante :** On peut montrer que les variations du moment cinétique dans l'atmosphère liées aux changements de la distance au centre de la terre (dues à la fois aux variations d'altitude et aux changements de forme du géopotential de référence) sont négligeables devant les variations liées aux déplacements horizontaux. On prend alors comme expression de la distance à l'axe des pôles  $d = a \cos \phi$ . Cette approximation qui revient à négliger les variations de la distance au centre de la terre au sein de l'atmosphère est appelée approximation de couche mince.

**Bonus :** La création de vents d'ouest dans la branche supérieure de la cellule est un frein très important pour la circulation de Hadley. En effet, par la même loi physique qui aplatit les planètes sous l'effet de leur rotation, une particule tournant plus vite que la planète est entraînée vers l'équateur. La force inertielle correspondante tend à contrecarrer la force de gradient de pression qui engendré les mouvements vers le pôle dans la branche haute de la cellule de Hadley.

Reprenons la figure de l'équilibre de la bille au repos (Fig. 1.1) mais en considérant cette fois une particule tournant plus vite que la planète, c'est à dire une particule animée d'une vitesse relative (ou vent zonal)  $u > 0$ . La bille tourne encore à une distance  $r = a \cos \phi$  de l'axe des pôles, mais cette fois avec une vitesse de rotation

$$\omega = \Omega + \frac{u}{a \cos \phi}$$

La force apparente centrifuge exercée sur la particule de masse  $m = \rho \delta V$  est alors égale à  $-m\omega^2 \vec{r}$  avec

$$\begin{aligned} \omega^2 r &= a \cos \phi \times \left( \Omega + \frac{u}{a \cos \phi} \right)^2 \\ &= \Omega^2 a \cos \phi + 2\Omega u + \frac{u^2}{a \cos \phi} \end{aligned}$$

Le terme  $\Omega^2 a \cos \phi$  est en fait déjà pris en compte dans la définition de la gravité (Eq. 1.1). Si on projette la somme de la gravité et de la force centrifuge sur l'axe horizontal défini par  $\vec{j}$  (cf. Fig. 3.6) la particule, en l'absence d'autre force, est entraînée vers l'équateur par une force apparente  $-m\vec{\gamma}_H$  avec

$$\vec{\gamma}_H = \left( 2\Omega \sin \phi u + \frac{u^2 \tan \phi}{a} \right) \vec{j}$$

La première partie de cette force est en fait la composante méridienne de la force de Coriolis qui dévie les vents d'ouest vers l'équateur. Sur la Terre à nouveau, ce terme l'emporte presque toujours sur le second.

La création de forts vents d'ouest par transport du moment cinétique produit donc une force dirigée vers l'équateur qui tend à stopper la circulation de Hadley. **Plus une planète tourne vite et plus cet effet de frein de la circulation méridienne est important.** Sur la Terre, la cellule de Hadley s'arrête à  $30^\circ$  environ de part et d'autre de l'équateur alors que sur Vénus, qui tourne sur elle-même en 240 jours, cette circulation s'étend jusqu'aux pôles.

### 3 Conclusion

Polyvalence de la conservation du moment cinétique : permet une approche qualitative puissante de certains pb mais permet aussi la résolution quasi directe de problèmes de mécanique céleste qui serait beaucoup compliqué avec une approche sans le moment cinétique.

**Ouverture ???**