LP 2020 – Non linéarité, applications

16 mai 2021

Clément Gidel & Pascal Wang

Niveau :

Commentaires du jury

Bibliographie

✍ *Physique des solitons*, **Thierry Dauxois**[1] ⟶ Expliciter si besoin l'intérêt du livre dans la leçon et pour quelles parties il est utile.

Prérequis

➢ Ondes gravito-capillaires

➢ Portrait de phase

➢ Oscillateur harmonique

Expériences

☕ Biréfringence du quartz

Table des matières

Références

LP 49 de Pascal est très complét pour la partie I + livre de thierry Dauxois pour la partie II.

Pour cette leçon je vois bien trois parties qui se détachent : En premier on peut faire l'oscillateur harmonique, on fait du linéaire au non linéaire, perte d'isochronisme, enrichissement spectral. Les codes Python sur la page de Pascal sont vraiment propres. On manque cependant un peu d'ODG dans cette partie mais on compte se rattraper dans l'application. Cette partie a pour but de montrer une première manifestation des NL dans un cadre physique simple. Transition : On a étudié les premiers effets de la NL, plutôt des effets indésirables et propre à l'OH, on va alors s'intéresser à un autre domaine de la physique avec des effets surprenants !

En seconde partie on peut faire une introduction historique aux solitons, dire qu'on a eu l'intuition d'une manifestation NL avec les vagues dans le canal. On peut aussi sentir le NL avec la grande amplitude, si on met en prérequis ondes gravito-capillaires on peut mettre la limite des grandes ampli. L'idée dans cette partie est de donner une autre manifestation des NL, mais qui ne sont plus génantes cette fois ci car on peut transporter une information sur de longues distances. L'idée est de partir des observations expérimentales de J.S Russel, de donner la solution et de dire qu'on est en accord quantitatif. Ensuite on peut montrer compétition entre NL et dispersion en regardant version uniquement NL et uniquement dispersive. C'est bien fait dans la livre de T.Dauxois. On peut bien mettre en évidence les deux effets, donner un premier exemple sur le raz de marrées, avec des ODGs sur sa longueur d'onde, sa vitesse, ce qui se passe au bord du rivage. **Il reste à trouver une animation / un code Python pour montrer la propagaton d'un soliton** . http://tangentex.com/KdV.htm. Un point important qui peut aussi être mentionné est la perte du phénomène de superpostion quand on somme deux solitons. On peut faire le lien avec l'oscillateur harmonique éventuellement.

Une troisième partie en guise d'application peut être les ondes sanguines. On donne pas toutes les étapes du calcul, on peut faire une analyse qualitative en premier lieu en donnant les deux effets : Non linéarité hydrodynamique (Navier stokes non linéarisé !) et dispersion due à la paroi de l'artère. Le développement complet mène à une équation de dispersion non linéaire, et avec la NL on peut chercher des solutions de type soliton et hop on peut trouver vitesse typique, amplitude. **Finalement on va pas faire l'approche qui mène à l'équation KdV car c'est casse gueule. On va juste donner les équations adimentionnalisées, et des ODGs grâce au texte de fin**. Je pense qu'on aura pas le temps de développer les calculs mais on peut quand même arriver à donner les ingrédients.

Introduction

La linéarité est souvent une hypothèse simplificatrice dans de nombreux problèmes physiques. Citons l'exemple tout simple de l'OH :

L'oscillateur harmonique, intérêt Le point commun de la masse accrochée à un ressort, du pendule simple en mécanique ou encore du circuit LC en électrocinétique sont qu'ils présentent des comportements oscillants. De plus, en l'absence de dissipation et aux petites amplitudes, ils peuvent être modélisés par l'équation de l'oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Outre ces exemples en mécanique et en électronique, le grand intérêt de l'OH est qu'il représente l'approximation à l'ordre le plus bas de tout système à potentiel analytique autour d'une position d'équilibre stable *pas les potentiels en* $|x|$.

Propriétés remarquables de l'oscillateur harmonique L'OH présente des propriétés remarquables

- La période des oscillations est indépendante de leur amplitude, c'est l'isochronisme des oscillations. *C'est un cas très particulier !*
- L'énergie totale est conservée, il n'y a pas de dissipation.

Définition de la linéarité Informellement, dans un système linéaire, l'effet est proportionnel à la cause. Le système ne comporte que des termes linéaire. Plus formellement, un système est linéaire s'il vérifie le principe de superposition : si s_1 et s_2 sont des solutions associées éventuellement à des entrées e_1 et e_2 (pour l'OH, $e = 0$), alors $\lambda s_1 + \mu s_2$ sont solutions. A partir de maintenant, dans cette partie, on travaille en grandeurs x adimensionées. Il faut imaginer que x est un angle pour le pendule, une longueur pour un système masse-ressort ou une tension électrique.

Objectifs Les propriétés de l'oscillateur harmonique sont plutôt l'exception que la règle. L'objectif de cette leçon est d'aller au-delà de l'oscillateur harmonique dans un premier temps afin d'explorer les effets de la non linéarité sur le système. On verra dans un second temps que les manifestations de la non linéarité peuvent être singulièrement différentes dans un autre domaine de la physique : les ondes capillaires.

1 Oscillateurs à potentiel non linéaire

1.1 Pendule aux grands angles

Pendule aux grands angles On sort de l'approximation des petits angles, l'équation du mouvement est alors non linéaire : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ que l'on peut réécrire :

$$\begin{cases} y = \dot{\theta} \\ \dot{y} = -\omega_0^2 \sin\theta \end{cases}$$

Aux grands angles, la non-linéarité devient importante et on observe des comportements différents de ceux vus jusqu'à présent. *L'énergie potentielle vaut :* $E_p = mgl(1-\cos\theta)$. *Cette énergie potentielle non quadratique en* θ *conduit à des non-linéarités.*

Mesure du portrait de phase du pendule pesant
On utilise ce lien : `http://experiences.math.cnrs.fr/Pendule-simple.html` On commence par le cas sans dissipation

Portrait de phase aux grands angles Le portrait de phase est plus complexe et plus intéressant. Lorsqu'on s'écarte progressivement des petits angles, on voit que les trajectoires se déforment et ne sont plus elliptiques. Une orbite fermée est une courbe isoénergétique. Comme l'énergie potentielle vaut : $E_p = mgl(1-\cos\theta)$ et n'est pas quadratique, on n'obtient pas une ellipse.

Libration Si on lance le pendule avec une une vitesse suffisante, le pendule tourne sans arrêt dans la même direction, on a un mouvement de libration. On le montre en cliquant sur le quadrant en haut à gauche.

Bonus : homocline/hétérocline Si on part d'un angle $\theta = -\pi$ qui est un point fixe, on rejoint théoriquement un autre point fixe ($\theta = \pi$) en un temps infini. On peut d'ailleurs noter que l'origine n'est plus le seul point fixe, les différents points fixes correspondent aux différents extrema du potentiel. La trajectoire correspondante dans le portrait de phase est une séparatrice, qui est une trajectoire hétérocline (c'est-à-dire qui lie deux points fixes).

1.2 Enrichissement spectral

Enrichissement spectral sur le pendule aux grands angles Sur la transformée de Fourier, un pic apparait à 3ω, où ω est la pulsation du fondamental. Cet enrichissement spectral est une conséquence très générale de l'ajout de non-linéarités. On fait un commentaire les paramètres d'acquisition de la transformée de Fourier, il faut échantillonner suffisamment pour respecter le critère de Shannon et acquérir sur une durée assez longue pour que les pics de fréquence soient bien résolus.

Présente des harmoniques impairs Cela est dû à la symétrie du terme en $\sin(\theta)$ dont le développement en série entière ne comporte que des termes impairs.

1.3 Perte d'isochronisme

Perte d'isochronisme On a une perte d'isochronisme : la période des oscillations dépend de l'amplitude, donc des conditions initiales. On le montre avec le script 3 : l'évolution temporelle pour plusieurs conditions initiales donne des périodes différentes.

Régime faiblement non-linéaire, formule de Borda On calcule la formule de Borda, avec une approche perturbative de Lindstedt-Poincaré. On motive l'ansatz à 3ω avec la mesure de l'harmonique triple précédente. Le calcul est sur fiche.

Commentaires de la formule de Borda On la commente : le système a une symétrie $\theta \to -\theta$, donc il ne peut y avoir le terme à l'ordre 1 en θ doit être nul. On s'attend physiquement à une diminution de la pulsation aux grands angles. C'est le cas ! *Le prochain terme est en* $11\theta_0^4/3074$. *Le développement s'obtient avec les intégrales elliptiques, cf. cours physique NL.*

Message

- Les systèmes linéaires et l'isochronisme des oscillations sont l'exception plutôt que la règle.
- Les phénomènes non-linéaires en plus d'apporter des corrections à l'isochronisme, font apparaître des phénomènes nouveaux (enrichissement spectral).

On a vu des premières manifestations de phénomènes NL. On va maintenant voir que les NL, au delà d'être un effet perturbateur au cas harmonique, permettent l'apparition d'une nouvelle riche physique.

2 Ondes solitaires et Equation de KdV

2.1 Mise en évidence des ondes solitaires

La toute première observation d'un soliton est celle que til Iy- drodynamicien John Scott Russell en 1834 alors qu'il se promenait à cheval le long d'un canal près d'Édimbourg. Lorsqu'une péniche s'arrêta brusquement, il fut surpris par la vision de ce qu'il appela « la grande onde solitaire ˇ, $qu'i$ suivit pendant plusieurs kilomètres avant de la perdre dans les méandres du canal. La description qu'il en a faite traduit l'enthousiasme d'un scientifique qui a ensuite consacré une dizaine d'années à étudier le phénomène. Comme nous le verrons, elle contient déjà les éléments fondamentaux pour la mise en équation et la recherche de la solution permettant d'analyser les observations : (voir livre)

Linterprétation theorique de cette observation a cependant du attendre 1895 avec les travaux de Korteweg et de Vries qui ont propose l'équation wí maintenant porte leur nom (abrégée souvent en équation de KdV). (cette quation se trouvait pourtant de facon implicite [108] dans les travaus de oseph Valentin de Boussinesq (1842-1929) publiés en 1872 [31]. Cetce equation de KdV est l'une des équations prototypes de la thiorie as solitons car elle a des propriêtes mathématiques remarquables. Son etude rmet de comprendre les idées fondamentales de la notion de soliton, mais nobtention à partir des équations de lhydrodynamique en eau peu profonde un peu fastidieuse. Elle est présentée dans l'appendice A et n'est valable a lorsque la profondeur de fluide et la hauteur de la vague sont faibles vant sa largeur le long de la direction de propagation. On peut noter que premiere condition correspond à l'observation initiale de J.S. Russell qui le diune vague de 30 pieds de long pour un pied et demi en hauteur. La figure 1.1 schématise un dispositif analogue à ceux que J.S. Russell :

2.2 Propriétés de l'équation de KdV

En écrivant les equations d'Euler pour le fluide supposé incompressible et non visqueux, les conditions aux limites au fond, a la surface, et, en supposant que l'écoulement est irrotationnel, on peut parvenir à l'équation de Korteweg-de Vries, valable dans le cas faiblement non-lineaire (cf. appendice A)

$$\frac{1}{c_0}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{3}{2h}\pi\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}=0$$

Dit $c_0 = \sqrt{\text{gh est}}$ ln vitesse do propagation ries ondes linéaires dans la limit des grandes longueurs d'onde, h la profondeur, ot η la hauteur de la surfac de liquide au-cessus de soil miveall d'equilibre. Din passunt daus le repere mobile in lin vitesse c_0. la transformation $X = x - c_0 t$ ef $T = 1$, il est possible d'climiner le secom terme et l'équntion clevient

$$\frac{1}{c_0}\frac{\partial \eta}{\partial T}+\frac{3}{2h}\eta\frac{\partial \eta}{\partial X}+\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 \eta}{\partial X^3}=0$$

Enfin, en introduisant des variables adimensionnées bien choisies ($\phi = \eta/h$. $\varepsilon = X/X_0$ et $\tau = T/T_0$ oun X_0 est une longueur et T_0 un temps), on peut mettre cette équation sous sh forme standard :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}+6\phi\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3}=0$$

L'equation de KdV possede, entre autres, les solutions localisées spatialement suivantes

$$\phi = A\,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{A}{2}}(\xi - 2A\tau)\right] \quad (A>0)$$

oit la fonction sech $x = 1/\cosh x$. Ces solutions sont en accord quantitatif avec les observations de J.S. Russell. De plus la condition $A > 0$, nécessaire pour l'existence de ce type de solutions, correspond au fait que l'on n'observe pas d'ondes solitaires de type depression a lu surface de l'eau'. La largeur du soliton, que l'on peut definir par $L = \sqrt{2/A}$, décroit lorsque l'amplitude aug- mente, comme le montre la figure 1.3. Elle tend vers l'infini lorsque l'amplitude tond vers 0 .

En revenunt aux variables dimensionnees, dans le repère du laboratoire, la solution s'ecrit

$$\eta = \eta_0 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2h} \sqrt{\frac{3\eta_0}{h}} \left(x - c_0 \left[1 + \frac{\eta_0}{2h} \right] t \right) \right]$$

2.3 KdV sans le terme dispersif

Léquation de KdV (1.3) est une équation qui apparait, dans de tres nombreux domaines de la physique, à chaque fois que des ondes peuvent se propager dans un milieu faiblement non-linéaire et faiblement dispersif, comme nous le verrons par la suite.

Essayons tout d'abord de comprendre l'effet physique des différents termes, Le terme non-linéaire $\phi(\partial\phi/\partial\xi)$ tend a favoriser la formation de fronts raides ou d'ondes de choc. On sait que l'équation linéaire

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + v \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0$$

est une équation d'onde qui possede des solutions de la forme $\phi = f(\xi - v\tau)$ qui se propagent par conséquent à la vitesse 0. Si l'on considere maintenunt equation, dite de Burgers,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0$$

en assimilant le coefficient de $\partial\phi/\partial\xi$ a la vitesse de propagation de l'onde, il est facile de se convaincre qu'en première approximation, chaque portion du signal se propage à la vitesse o. Les portions correspondant aux grandes valeurs de vont par conséquent avoir tendance a se propager plus vite que les portions de plus faible amplitude. Le terme non-linéaire induit donc la formation d'ondes de choc, c'est-à-dire des solutions présentant des discontinuités à temps fini, ou le champ $\phi(\xi)$ présente une pente verticale, comme le confirme la solution exacte de l'équation de Burgers, représentée sur la figure 1.4.

2.4 KdV sans terme NL

$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^3} = 0$ Elle admet comme solution les ondes planes du type $\phi = Ae^{i(q\xi - \omega\tau)}$ à la condition que la pulsation ω et le nombre d'onde q soient relies par la relation de dispersion $\omega = -q^3$. Cette relation de dispersion peut sembler surprenante mais sa forme tient au fait que Péquation de KdV est écrite dans le repère mobile à la vitesse c_0. En partant de l'équation (1.2), on aurait obtenu $\omega' = c_0 q' \left(1 - q^{r2} h^2/6\right)$ qui a une forme plus habituelle.

Quel que soit le repère choisi, on observe que ces ondes possèdent une vitesse de phase $v_\phi = \omega/q$ qui dépend de la valeur du nombre d'onde q, ce qui caracterise un milieu dispersif. Dans un tel milieu, les composautes de Fourier diune impulsion étroite se propagent à des vitesses différentes, entrainant un étalement de l"impulsion comme le montre la figure 1.5.

L'existence de la solution soliton de l'équation de KdV résulte de l'equilibre entre ces deux effets, non-linéarité et dispersion : la non-linéarité a tendance à localiser l'excitation alors que la dispersion l'étale. Il est essentiel de noter que cest un équilibre stable. Si l'on part d'une condition initiale trop étroite, la dispersion prédomine et l'onde aura tendance à s'étaler jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint. Au contraire, si on part d'une condition initiale trop étalée, la dispersion sera nettement dominée par la NL qui aura tendance à localiser la solution jusqu'à ce que l'équilibre soit également atteint. **C'est cette propriété remarquable qui rend le concept de solution si utile et si fascinant.**

On peut rajouter en guise de mini conclusion l'exemple de la plage (p 12).

Tsunamis Les tsunamis sont décrits de manière très satisfaisante par l'équation de Korteweg-de Vries car, bien que se déplaçant dans des océans dont la profondeur moyenne est de 4000 m, leur longueur d'onde dépasse les 100 km, justifiant l'approximation de propagation d'ondes en eau peu profonde. Un rapide calcul met également en évidence qu'à ces profondeurs la vitesse de propagation des tsunamis, puisque supersonique, sera supérieure à $c_0 = \sqrt{gh} = 200$ m/s $= 700$ km/h : cela correspond à la vitesse d'un avion ! On comprend aisément qu'un tel soliton puisse traverser l'océan pacifique extrêmement rapidement. Il ralentira au voisinage des côtes, mais déferlera sur plusieurs centaines de mètres à l'intérieur des terres après que la localisation non-linéaire due à la diminution de profondeur lui ait donné une hauteur considérable.

Code Python / simulation : http://tangentex.com/KdV.htm

3 Application : ondes de pressions sanguines

Ici on aura pas le temps de détailler les calculs, mais c'est bien de donner les différents effets : dispersion avec élasticité et NL avec Naviers Stokes.

On veut répondre à la question simple : pourquoi peut-on prendre le pouls à l'extremité d'un membre ?

Cf le livre pour les détails.

4 Conclusion

On récapitule ce qu'on a mis en évidence dans cette leçon, on peut faire une ouverture sur les autres formes de NL (Sine-Gordon, Schrödinger NL)