

LP 2020 – Ondes de surface

16 mai 2021

Clément Gidel & Pascal Wang

Niveau :

Commentaires du jury

Bibliographie

- ✦ *Vibration, ondes*, Janine Brunneaux¹ → Plan de la leçon. Qq exemples illustratifs et applications.
✦ *Polydon*, <https://arxiv.org/pdf/1510.05508.pdf>² → Meilleures notations et compléments.

Prérequis

➤ Equation d'Euler

Expériences

☞ Biréfringence du quartz

Table des matières

1 Ondes de gravité	2
1.1 Hypothèses et positionnement du problème	2
1.2 Mise en équation	3
1.3 Effet de la profondeur	4
1.4 Trajectoire des particules	4
2 Ondes Capillaires	5
2.1 Relation de dispersion	5
3 Ondes gravito-capillaires	5
3.1 Analyse de la relation de dispersion	5
3.2 Applications : retour sur les exemples introductifs	6

A mon sens, la leçon se porte ici sur les ondes de gravité et les ondes capillaires. On peut prendre un fil conducteur deux images de vagues : une en eau profonde où on voit dispersion car série de petite longueur d'onde en premier et l'autre en eau peu profonde, on peut prendre vague à la surface de la plage où on a pas de dispersion donc une seule série de vague qui arrive.

Le plan de la leçon est assez naturel en suivant la ref Ondes et vibrations :

Intro : Perturbations d'une surface plane

I) Ondes de gravités. 1) Hypothèses et position du problème 2) Mise en équation 3) Effet de profondeur finie 4) Trajectoire d'une particule fluide II) Ondes capillaires 1) Relation de dispersion 2) Vitesse de phase et de groupe

CC1 : Retour sur l'hypothèse faible amplitude : Ouverture sur les solitons.

Introduction

On peut montrer la vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=dsrUxhaaWks> où on voit bien deux séries d'ondes de longueur d'onde différentes qui se propagent à des vitesses différentes : petites longueur d'ondes rapides et grand longueur d'onde plus lente. On peut aussi montrer des vidéos de petites vagues sur la plage, on a généralement qu'une seule vitesse. L'objectif de cette leçon est d'expliquer tout ça.

1 Ondes de gravité

🔗 Vibrations, ondes, Bruneaux

1.1 Hypothèses et positionnement du problème

Penser à justifier toutes les hypothèses

On considère une perturbation à la surface libre plane. On a 3 dimensions mais la dimension transversale Oy ne joue aucun rôle ici, on va négliger ses variations et prendre une dépendance seulement selon x . On prend aussi une perturbation harmonique donc proportionnelle à $e^{i\omega t}$. On note ψ_x et ψ_y les déplacements des particules fluides situées en (x, z) .

Hypothèses : 1) Le fluide est **homogène** et **incompressible** et il n'y a ni source ni puits susceptible de faire apparaître ou disparaître du fluide. L'équation de conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$, se réduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(x, z, t) = 0$$

$\vec{v}(x, z, t)$ est le vecteur vitesse de l'élément de fluide entourant le point déplacé de Ψ_x, Ψ_z et a pour composantes $\frac{\partial \Psi_x}{\partial t}$ et $\frac{\partial \Psi_z}{\partial t}$.

2) On suppose le mouvement **irrotationnel** (L'écoulement étant parfait, la vorticité est conservée, et puisque le fluide est initialement au repos, elle est nulle), donc $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$. Dans ces conditions, $\vec{v}$ est le gradient d'un potentiel de vitesse Φ . De $\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi$ et de $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, on tire $\vec{\nabla}^2 \Phi = 0$, soit écoulement **potentiel** :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

Bonus : Par analogie avec l'équation de propagation $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0$, dont les solutions générales sont de la forme : $\zeta = f(x - ct) + g(x + ct)$, on déduit (en remplaçant c par i) :

$$\Phi = f(x + iz) + g(x - iz)$$

3) L'écoulement du fluide est alors décrit par l'équation d'Euler :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P$$

En utilisant le fait que $(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{\nabla} (v^2/2)$, on peut écrire l'équation d'Euler pour un écoulement irrotationnel :

$$\vec{\nabla} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + P \right) = \vec{0}$$

Nous considérons enfin que l'onde est de faible amplitude, c'est-à-dire que la vitesse de l'écoulement et le déplacement du fluide sont d'ordre 1 : nous préciserons par la suite les grandeurs auxquelles il faut les comparer (cf remarque ci dessous). On peut négliger le terme quadratique et obtenir ainsi la relation de Bernoulli pour un écoulement lent, parfait, incompressible, irrotationnel et instationnaire ⁽¹⁹⁾ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g z + \frac{P}{\rho} = K$$

où K désigne une constante ⁽²⁰⁾.

Remarque : À strictement parler, K peut dépendre du temps. Cependant il s'agira alors d'un terme non propagatif, qui ajoutera une contribution indépendante de l'espace au potentiel : cette contribution disparaîtra donc dans la vitesse, qui est la quantité physique intéressante. On peut donc librement choisir K comme indépendante du temps.

Justification vitesse particulaire petite devant célérité équivaut à ampli petite devant longueur d'onde : Si on appelle A l'amplitude du potentiel Φ , chaque composante de la vitesse est proportionnelle à kA et chaque composante du déplacement est proportionnelle à $A \frac{k}{\omega} = B_0$ qui représente l'amplitude de la vague. Dire que l'amplitude B_0 est petite devant la longueur d'onde revient à écrire que $B_0 k$ est très petit devant 1, ce qui s'écrit $A \frac{k^2}{\omega} \ll 1$ soit $\frac{Ak}{\omega/k} = \frac{Ak}{V} \ll 1$. Cette dernière écriture montre que la vitesse particulaire est très petite devant la vitesse de phase de la vague, ce qui est bien la condition requise pour pouvoir rir l'équation d'Euler sous sa forme simplifiée.

4) On néglige la dissipation par viscosité, valable sur un temps $\tau \ll \lambda^2/\nu$. En terme de longueur, la longueur d'atténuation typique en régime capillaire est 30cm et de 1 km dans le régime gravitaire. *Munis des vitesses de phase approximatives, on peut évaluer les distances typiques d'atténuations dans les deux régimes. Dans le régime capillaire, on trouve $L^* \sim (\rho\gamma\lambda^3)^{1/2}/\eta$. Pour $\lambda = 1\text{mm}$ par exemple, on obtient $L^* \simeq 30\text{cm}$. Dans le régime gravitaire, $L^* \sim \rho g^{1/2} \lambda^{5/2}/\eta$ et les longueurs d'atténuation deviennent rapidement très élevées (quelques kilomètres pour $\lambda \sim 1\text{m}$). Les vagues en mer correspondent à ce second régime..*

5) **Faible perturbation :** l'amplitude de la déformation de l'interface doit être suffisamment lisse pour que l'on puisse assimiler la normale à la surface libre à la verticale : il faut pour cela $\partial_x z_0 \ll 1$. De plus, l'amplitude de la déformation de l'interface doit être suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que les conditions aux limites sont prises en $z = h$: il faut donc $|z_0 - h| \ll h$.

Remarque : Il n'existe pas, pour les grandeurs dynamiques de la vague (essentiellement le potentiel (1) d'équation de propagation de type Helmholtz $(\nabla^2 + k^2)\Phi = 0$. On ne peut donc pas affirmer que les solutions habituelles, comme les ondes planes, sont des solutions générales de l'équation dynamique. Tout ce qu'on peut faire est de tenter de voir dans quelles circonstances et à quelles conditions des solutions de ce genre sont acceptables.

1.2 Mise en équation

Conformément à ce qu'on vient de dire, on va étudier si des solutions harmoniques $Ae^{i(kx-\omega t)}f(z)$, se propageant dans la direction des x croissants avec un vecteur d'onde de module k , sont des solutions acceptables.

Compte tenu de la nature des solutions imposées par l'équation $\nabla^2\Phi = 0$, qui dépendent des variables x et z par des fonctions de la variable composée $x \pm iz$, la forme qu'on vient de prendre pour la dépendance en x et t ne laisse le choix pour la dépendance spatiale totale qu'entre les fonctions $Ae^{ikx}e^{kz}$ et $Ae^{ikz}e^{-kz}$.

Milieu infiniment profond : On prend l'axe Oz dirigé vers la profondeur. La solution doit rester finie quelle que soit la profondeur, ce qui restreint le choix à la fonction $Ae^{ikx}e^{-kz}$. Nous choisissons donc la forme suivante pour le potentiel de vitesses :

$$\Phi(x, z, t) = Ae^{i(kx-\omega t)}e^{-kz}$$

La composante normale de la vitesse de l'interface est égale à la composante normale de la vitesse du fluide au niveau de la surface libre. Pour des déformations de faible amplitude, la normale à l'interface s'identifie à la verticale et on obtient

$$v_z(x, z = z_0(x, t), t) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)(x, z = z_0(x, t), t) = \frac{\partial z_0}{\partial t}$$

Dans l'hypothèse d'ondes de faible amplitude, les relations (33) et (35) peuvent être prises en $z = h$ plutôt qu'en $z = z_0(x, t)$, les corrections induites étant d'ordre supérieur.

Si nous reportons dans cette équation l'expression du potentiel des vitesses, nous voyons qu'elle est satisfaite à condition que les grandeurs ω et k obéissent à la relation $\omega^2 = gk$ qui constitue la relation de dispersion des vagues de gravité en eau profonde.

On trouve donc une relation de dispersion donnant une vitesse de phase dépendant de la longueur d'onde :

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk}}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}}$$

Plus grande est la longueur d'onde, plus rapides sont les vagues.

$$\text{Si } \lambda = 10\text{m} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{10 \times 9,81}{2\pi}} = 4 \text{ ms}^{-1} = 14,2 \text{ km.h}^{-1}$$

$$\text{Si } \lambda = 100\text{m} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{100 \times 9,81}{2\pi}} = 45 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Remarque : Si on appelle A l'amplitude du potentiel Φ , chaque composante de la vitesse est proportionnelle à kA et chaque composante du déplacement est proportionnelle à $A \frac{k}{\omega} = B_0$ où B_0 représente l'amplitude de la vague. Dire que l'amplitude B_0 est petite devant la longueur d'onde revient à écrire que $B_0 k$ est très petit devant 1, ce qui s'écrit $A \frac{k^2}{\omega} \ll 1$ soit $\frac{Ak}{\omega/k} = \frac{Ak}{V} \ll 1$. Cette dernière écriture montre que la vitesse particulaire est très petite devant la vitesse de phase de la vague, ce qui est bien la condition requise pour pouvoir écrire l'équation d'Euler sous sa forme simplifiée.

1.3 Effet de la profondeur

On considère maintenant que la distance h du fond à la surface n'est plus infiniment grande par rapport à la longueur d'onde des vagues.

On ne peut plus négliger la seconde solution pour Φ , qu'on doit maintenant écrire :

$$\Phi = e^{i(kx - \omega t)} [Ae^{-kz} + Be^{kz}]$$

On sait que pour $z = h$, la composante verticale de la vitesse s'annule :

$$\frac{\partial \Phi(x, z = h, t)}{\partial z} = ke^{i(kx - \omega t)} [-Ae^{-kh} + Be^{kh}] = 0$$

On en déduit :

$$A = \frac{C}{2} e^{kh} \quad \text{et} \quad B = \frac{C}{2} e^{-kh}$$

dou :

$$\Phi = Ge^{i(kx - \omega t)} \frac{e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)}}{2}$$

$$\Phi = Ce^{i(kx - \omega t)} \cosh[k(h - z)]$$

Une fois obtenue l'expression du potentiel des vitesses, l'obtention de la relation de dispersion se fait de la même façon que dans le cas de la profondeur infinie : on reporte cette expression dans la relation dynamique écrite pour un point de la surface. On obtient la nouvelle relation de dispersion :

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

On voit bien que dans la limite $kh \rightarrow \infty$, on retrouve la relation précédente. En revanche, dans la limite $kh \rightarrow 0$, ou plus exactement $\frac{2\pi}{\lambda} \ll \frac{1}{h}$, $\lambda \gg h$, on trouve $\omega^2 = ghk^2$ et $V = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}$: la vitesse de phase ne dépend plus de λ .

En fait, la limite du domaine des grandes profondeurs est très vite atteinte : pour $\lambda = h$, le terme $\tanh(kh)$ vaut 0,999993...

On peut tracer une courbe de dispersion de $V(\lambda)$ pour différentes valeurs de la profondeur h (figure 8-2).

En eau profonde, la courbe $V(\lambda)$ est une parabole : $V_\varphi = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ et si $h = 10$ m, on a :

$$V_\varphi = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}} \approx 9,9 \text{ ms}^{-1}$$

En eau peu profonde, $\lambda \gg h$ et pour $h = 5$ m, on a : $V = \sqrt{gh} = 7,0036 \text{ ms}^{-1}$.

Ici on peut mettre le code Python qui donne la vitesse en fonction de la longueur d'onde selon la profondeur

1.4 Trajectoire des particules

8.3.3 Circulation de l'eau dans une vague On peut calculer complètement, à partir du potentiel Φ , la vitesse et le déplacement :

$$\Phi = Ac^{i(\lambda x - \omega t)} \cosh[k(h - z)]$$

$$\text{Composantes de l'amplitude} \begin{cases} \Psi_x = -A \frac{k}{\omega} e^{i(kx - \omega t)} \cosh[k(h - z)] \\ \Psi_z = -iA \frac{k}{\omega} e^{i(kx - \omega t)} \sinh[k(h - z)] \end{cases}$$

Composantes de la vitesse $\begin{cases} v_x = ikAe^{i(kx - \omega t)} \cosh[k(h - z)] \\ v_z = -kAe^{i(kx - \omega t)} \sinh[k(h - z)] \end{cases}$ En écrivant ces valeurs, on néglige des constantes d'intégration qui ne feraient qu'à déplacer l'origine du mouvement. Avec les notations :

$$a = -A \frac{k}{\omega} \cosh[k(h - z)]$$

ct

$$b = -iA \frac{k}{\omega} \sinh[k(h-z)]$$

et en ne gardant que les parties réelles de Ψ , on a :

$$\begin{bmatrix} \Psi_x = a \cos(kx - \omega t) \\ \Psi_z = b \sin(kx - \omega t) \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\Psi_x^2}{a^2} + \frac{\Psi_z^2}{b^2} = 1$$

C'est une ellipse dont le rapport des axes est : $\frac{b}{a} = \tanh[k(h-z)]$.

Animation : <https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/waves/wavemotion.html>

2 Ondes Capillaires

2.1 Relation de dispersion

La surface de séparation air/liquide est équivalente à une pellicule tendue qui exerce une force vers l'intérieur de la courbure, d'où résulte une pression, dite pression capillaire, dont l'expression est donnée par la loi de Laplace :

$$\Delta P = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

ou T est une constante caractéristique de la nature de l'interface, appelée constante de tension superficielle ; R_1^{-1}, R_2^{-1} sont les courbures principales de l'interface (figure 8-8). Dans le cas des vagues, il n'y a qu'une seule courbure, dans le plan xz , qui vaut $\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial x^2}$. Il apparaît donc dans l'eau une surpression d'origine capillaire $p = T \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial x^2}$ qu'il faut introduire dans l'équation dynamique : $\frac{\partial \Phi^S}{\partial t} = -\frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial x^2}$ (on néglige pour l'instant le terme de gravité).

Cette équation, couplée à l'équation du mouvement de surface $\frac{\partial \Psi_z}{\partial t} = \frac{\partial \Phi^S}{\partial z}$, permet d'écrire l'équation :

$$\frac{\partial^2 \Phi^S}{\partial t^2} = -\frac{T}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \Psi_z^S}{\partial t} \right) = -\frac{T}{\rho} \frac{\partial^3 \Phi^S}{\partial x^2 \partial z}$$

qui donne pour les ondes harmoniques habituelles :

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho} k^3 \rightarrow V = \sqrt{\frac{Tk}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho \lambda}}$$

Plus la longueur d'onde est courte, plus la vitesse est grande. Ce terme est donc dominant pour les très courtes longueurs d'onde ; il vient compléter le diagramme $V(\lambda)$ précédent (figure 8-9).

3 Ondes gravito-capillaires

3.1 Analyse de la relation de dispersion

On peut maintenant écrire directement une relation de dispersion regroupant les termes de gravitation et de tension superficielle :

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho} k^3 + gk \Rightarrow V^2 = \frac{T}{\rho} k + \frac{g}{k} = V_{cap}^2 + V_{grav}^2$$

Le calcul complet tenant compte de la profondeur h donne :

$$\omega^2 = \left(\frac{T}{\rho} k^3 + gk \right) \tanh(kh)$$

On peut rechercher la valeur du minimum de la vitesse de phase :

$$2V \frac{dV}{dk} = \frac{T}{\rho} - \frac{g}{k^2} \Rightarrow k_m^\lambda = \frac{\rho g}{T} \quad \text{et} \quad \lambda_{1n} = 2\pi \sqrt{\frac{T}{\rho g}}$$

Numériquement, pour l'eau, on a :

$$T = 7,2 \cdot 10^{-2} \text{ kg s}^{-2} \quad \text{et} \quad \lambda_m = 6,28 \sqrt{\frac{7,2 \cdot 10^{-2}}{9,81 \cdot 10^3}} = 1,7 \text{ cm}$$

La vitesse correspondante vaut 23 cm s^{-1} .

On peut alors tracer la relation de dispersion et différencier les régimes (eau profonde/peu profonde et capillaire / gravitaire). **Sortir le graphe dans le Polydon pour discuter des différents régimes**

Régime gravitaire $v_g \sim v_\phi/2$: c'est l'ingrédient pour l'angle de Kelvin des bateaux. Wake pattern from ships often fall into this category. The single waves seem to roll faster than the “plow” or “fan” that follows the boat. As a result, the single waves roll in a way past the “fan” and disappear soon afterwards.

Régime capillaire $v_g \sim (3/2)v_\phi$ In this case, the group velocity is actually greater than the phase velocity (corresponding to anomalous dispersion). In this case, individual waves seems to appear from nothing at the front of the group of waves, and then move “backwards” through the group and disappear. However, relative to the water, the single waves will always propagate away from the source that created the waves (as long as we do not have reflection), but the illusion of walking backwards is because the group velocity is even greater than the phase velocity

Limite La limite se situe à $\lambda \sim \lambda_c$ la longueur capillaire. La relation de dispersion $v_\phi(\omega)$ possède un minimum à 23 cm/s . *C'est la vitesse minimale qu'un objet doit avoir pour laisser un sillage stationnaire. Former un sillage dissipe de l'énergie, c'est la résistance de vague. Les trajectoires des particules de fluide sont elliptiques.*

Complément : houle Lorsque la houle déferle sur la plage, il s'agit d'un changement de régime (eaux profondes à eaux peu profondes) des ondes de surface.

Complément : sillage des bateaux  Physics of Waves, Arnt Inge Vistnes, chap 8.4.4 [image](#), [Talk Marc Rabaud](#), [Article Marc Rabaud](#), [Contruction géométrique du sillage \(APJ\)](#), [encore plus clair pour la construction géométrique](#)

Observation : l'angle du sillage est souvent de 19 degrés, indépendamment de la taille ou de la vitesse du mobile. Pour les bateaux, on est dans le régime gravitaire : l'ingrédient clef est $v_g \sim v_\phi/2$. Comme le cône de Mach, lorsque $v > v_\phi$, il y a un cône d'accumulation des vagues dont l'angle dépend de la vitesse du mobile : $v_\phi = v_0 \sin \theta$. Mais l'angle qu'on voit est celui de la vitesse de groupe, obtenu par construction géométrique (quand on trace le cône de Mach on retient le point milieu, ce qui fait un nouveau cône : celui qu'on voit). Comme le milieu est dispersif, à chaque longueur d'onde est associée un cône, dont l'angle varie. L'angle présente un maximum à un certain angle donné constant : c'est l'angle dominant qu'on observe, en supposant que toutes les longueurs d'ondes sont excitées. C'était la théorie de Kelvin. En fait, l'angle devient plus étroit quand la vitesse augmente (dépendance en le nombre de Froude), comme le cône de Mach. En disant que le bateau ne peut émettre des longueurs d'ondes plus grandes que sa taille, on retrouve le cône de Mach aux grandes vitesses.

Pour expliquer les arcs aux centre dans la trajectoire du bateau, on considère les ondes de vitesse de phase au voisinage de $v_\phi = U$ la vitesse du bateau (paquet d'onde quasi-monochromatique), qui sont les seules qui donnent un motif stationnaire dans le référentiel du bateau. Ainsi, lorsque le bateau passe au point M, il excite un onde sphérique dont le front progresse à même vitesse que le bateau. Comme $v_g \sim v_\phi/2$, à distance $2L$ de M, le paquet d'onde excité se trouve à distance L de M. On en déduit la règle : à distance L du bateau, le rayon de courbure du motif est L .

Complément : atténuation des ondes gravito-capillaire La viscosité atténue les ondes gravito-capillaires. En fait, une petite tension de surface augmente l'atténuation (même si la tension de surface tend à lisser l'interface). En effet, la longueur caractéristique d'atténuation est $L = v_g \tau$ et $\tau = \lambda^2/\nu$ où ν est la viscosité cinématique. Or v_g diminue avec la tension de surface γ .

3.2 Applications : retour sur les exemples introductifs

Interprétation des observations Dans l'expérience du caillou tombant dans un lac, le caillou crée une impulsion qui excite toutes les fréquences. La série d'ondes rapides de courte longueur correspond aux ondes capillaires, alors que la série d'onde lentes et de grande longueur d'onde correspond aux ondes gravitaires. On remarque en outre que la vitesse des ondes passe par un minimum non nul $c_{\min}$ pour $k\ell_c = 1$. Il s'agit de la vitesse relative minimale à laquelle un obstacle doit se déplacer par rapport au fluide environnant pour laisser un sillage stationnaire, en forme de V comme celui que l'on peut observer derrière un canard ou un bateau. Si l'obstacle se déplace à une vitesse inférieure à $c_{\min} = 23 \text{ cm/s}$ à température ambiante, la perturbation restera localisée autour de lui. L'émission d'un sillage dissipe de l'énergie, intervenant dans les problèmes de résistance à la progression en surface d'un fluide (on parle de résistance de vague). *Ce type de critère se retrouve dans de multiples domaines, dès qu'une relation de dispersion présente une vitesse minimale non-nulle : critère de Landau pour la superfluidité, amortissement Landau dans les plasmas, rayonnement Cherenkov.*

Retour à l'expérience introductive : Interprétation des observations Dans l'expérience du caillou tombant dans un lac, le caillou crée une impulsion qui excite toutes les fréquences. La série d'ondes rapides de courte longueur

correspond aux ondes capillaires, alors que la série d'onde lentes et de grande longueur d'onde correspond aux ondes gravitaires. On remarque en outre que la vitesse des ondes passe par un minimum non nul $c_{\min}$ pour $k\ell_c = 1$. Il s'agit de la vitesse relative minimale à laquelle un obstacle doit se déplacer par rapport au fluide environnant pour laisser un sillage stationnaire, en forme de V comme celui que l'on peut observer derrière un canard ou un bateau. Si l'obstacle se déplace à une vitesse inférieure à $c_{\min} = 23\text{cm/s}$ à température ambiante, la perturbation restera localisée autour de lui. L'émission d'un sillage dissipe de l'énergie, intervenant dans les problèmes de résistance à la progression en surface d'un fluide (on parle de résistance de vague). *Ce type de critère se retrouve dans de multiples domaines, dès qu'une relation de dispersion présente une vitesse minimale non-nulle : critère de Landau pour la superfluidité, amortissement Landau dans les plasmas, rayonnement Cherenkov.*

Vagues de gravité en eau profonde : ondes dispersives

L'observation attentive des ondes engendrées par un caillou dans l'eau montre que la vitesse des rides est supérieure à celle du train d'ondes. Les rides naissent à l'intérieur, trament le train et disparaissent à l'avant. Un bel exemple d'ondes de gravité en eau profonde est la houle océanique : une tempête située dans l'océan Atlantique va se manifester d'abord par l'arrivée d'ondes de grande longueur d'onde, puisque ce sont elles qui se propagent le plus vite ($V_\phi = \sqrt{\lambda g/2\pi}$).

Typiquement, on détectera en Bretagne des ondes de faible amplitude mais de période de l'ordre de 30 sec, ayant une vitesse d'environ 50 m/s, ayant parcouru un trajet de 4000 km en une journée, soit bien plus que la tempête, qui peut prendre plusieurs jours pour traverser l'océan Atlantique. Lors de l'approche de la tempête, les ondes de plus courte longueur d'onde arrivent aussi, puisque leur vitesse est plus faible.

Ondes de gravité en eau peu profonde : ondes non dispersives Les ondes de gravité en eau peu profonde les plus familières sont celles qu'on observe sur les plages des bords de mer. En eau peu profonde la vitesse de phase est égale à $V_\phi = \sqrt{gh}$. Si h diminue, V_ϕ diminue de même que λ . Donc quand on s'approche du bord, l'onde ralentit et ainsi son amplitude augmente puisque l'énergie transportée reste constante. Certes, l'analyse n'est plus valable à grande amplitude, mais elle donne une tendance ; on peut oser aller plus loin et expliquer aussi le déferlement des vagues de cette façon : la vitesse de crête de la vague est plus grande que celle du fond : $V_{\text{crête}}/V_{\text{creux}} = \sqrt{h_2/h_1} > 1$. Les effets les plus spectaculaires sont dus aux tremblements de terre sous-marins (raz de marée ou tsunamis) : il s'agit en effet ici d'ondes en eau peu profonde mais à grande échelle x . Un mouvement de faille sous-marine génère une onde de grande longueur d'onde, suffisamment grande pour que l'océan Atlantique ou l'océan Pacifique soit peu profond en comparaison. À la source, l'onde, d'amplitude faible (environ 1 m), se propage à grande vitesse ($h = 4\text{ km}$ donc à une vitesse proche de 200 m.s^{-1}), mais elle ralentit considérablement à l'approche de la côte et augmente son amplitude en conséquence. La non dispersion entraîne que l'énergie est concentrée dans quelques vagues puissantes, avec les effets dévastateurs que l'on connaît.

Conclusion

Ouvertures sur les faibles NL, équation de $k\mathbf{dV}$, onde solitaire (c'est aussi un peu détaillé dans la ref).

Questions

- Questions : Comment tu as linéarisé Navier-Stokes ?
- C'est quoi l'hypothèse de faible déformation ? OGD des termes des NS ?
- Évolution de la longueur capillaire avec la température ?
- Avec ton équation de dispersion explique nous quelque chose que tout les plagistes peuvent voir ?
- Pourquoi les vagues sont toujours parallèle aux plages ?
- C'est quoi les ondes sismiques ?
- Calcul de la dérivée de la relation de dispersion en $k=0$?
- Qualificatif d'une dispersion dont la vitesse à un minimum par rapport à k ?
- OGD vitesse minimale des ondes ?

Compléments

Alternative : Il reste à établir la relation entre k et ω . On se place pour l'instant dans l'hypothèse où la seule force de rappel est la gravitation (nous verrons plus loin quel en est le domaine de validité) ; on a :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} (U + p + p_{\text{atm}})$$

Le premier terme représente l'effet des forces de pesanteur et le second celui de la pression. On peut faire rentrer l'expression de la pression atmosphérique, qui est constante dans Φ , sous la forme $\frac{p_{\text{atm}}}{\rho}$, grandeur indépendante des coordonnées.

On peut considérer la pression p comme la somme de deux termes : le premier est la pression dans le liquide au repos et le second, une surpression liée au passage de vague. Lorsque le liquide est au repos, chaque élément est en équilibre, ce qui signifie que le poids de cet élément est exactement compensé par la poussée d'Archimède, qui résulte du gradient vertical de pression. La surpression crée une force supplémentaire qui le liquide en mouvement. Cette surpression, qui est un effet dynamique, n'est pas simple à calculer en tout point du liquide. La seule région du liquide où elle est facile à exprimer est la surface, car c'est un effet perturbatif local qui se réduit par pression hydrostatique à la cote de la surface ψ^s multipliée par ρg . L'équation dynamique s'écrit alors :

$$\frac{\partial \Phi^s}{\partial t} = g \psi_z^s$$

Considérons un point M de la surface, de coordonnées initiales $x^S, \psi^S = 0$. Compte tenu de l'hypothèse de "cohésion", le petit volume entourant ce point au cours du mouvement a une vitesse :

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t}$$

Cette relation donne l'équation : $\frac{\partial \Phi^s}{\partial z} = \frac{\partial \Psi_z^s}{\partial t}$ pour le déplacement selon $0z$. Couplée à l'équation dynamique dérivée par rapport au temps, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \Phi^s}{\partial t^2} = g \frac{\partial \Psi_z^s}{\partial t} = g \frac{\partial \Phi^s}{\partial z}$$