

LP 2020 – Oscillateurs

16 mai 2021

Clément Gidel & Pascal Wang

Niveau : L2

Commentaires du jury

Bibliographie

↗ *Mines PC physique 1 2016, ?*¹

→ Expliciter si besoin l'intérêt du livre dans la leçon et pour quelles parties il est utile.

Prérequis

- Oscillateur harmonique
- Résonance dans un circuit RLC

Expériences

- ✎ Biréfringence du quartz

Table des matières

1	Oscillations sur le Le Millennium Bridge	2
2	Oscillateur simple	2
2.1	Régime forcé	4
3	Oscillateurs auto-entretenus	5
3.1	Vers l'équation d'un oscillateur auto-entretenu l'équation de Rayleigh	5
3.2	L'équation de Van der Pol	7
3.3	Bifurcation et portraits de phase	8
3.4	Régime faiblement non linéaire	8
3.5	Régime fortement non-linéaire et oscillations de relaxation	8

Bon là j'ai pas trop d'idées, introduire les oscillations dans un plasma c'est pas mal, VDP c'est pas mal aussi, ya des ressources en ligne. L'idée selon moi serait de faire une première parties sur les oscillations libres d'un système et forcées mais sans dissipations / NL, montrer les limites avec le manque de dissipation et le fait que les systèmes biologiques on observe des oscillateurs auto-entretenus qui sont des systèmes qui engendrent des oscillations périodiques, étant alimentés par une source d'énergie qui compense la dissipation, inévitablement présente.

Les exemples sont nombreux, oscillations en chimie, des gènes (cf Pascal), l'oscillation est naturelle quand on connaît un équilibre stable associé.

Nouvelle idée : En partie 1 on peut parler des oscillations dans le Millenium Bridge, dire qu'on a un oscillateur libre au début (mais amorti), et puis forcé avec la marche des piétons. On peut dire pq c'est problématique, balancer l'animation http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.html. Ensuite en transition on peut dire Ok on a considéré des oscillateurs qui dépendent des perturbations extérieures, mais en pratique on a souvent des systèmes qui sont auto-entretenus et hop partie 2 sur Modèle de Rayleigh, équation de Van der Pol, discuter dessus, trouver une bonne animation et une application un peu rapide car on aura surement pas trop le temps

Introduction

L'idée d'oscillateur est associée à une notion de stabilité et de manière sous-jacente à une notion de rétroaction stabilisatrice. Quand on pense par exemple à l'oscillation de notre température du corps : In all mammals, body temperature shows a clear 24-hour rhythm, whose amplitude can be as much as 1° . This daily rhythm is not the result of simple external cues such as the light-dark cycle, because it persists even in continuous darkness.

Cependant on peut avoir des problèmes quand l'amplitude des oscillations devient trop importante parfois du à une forçage extérieur. Dans cette leçon, on va s'intéresser aux oscillations du Millenium Bridge et voir comment on cherche à s'affranchir de l'influence extérieure au système (forçage) et en partie 2 on va voir comment on peut s'en émanciper par nature de l'oscillateur.

1 Oscillations sur le Le Millennium Bridge

↪ Mines Pont PC 2016 [Lien sujet](#), [Lien correction](#)

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle à été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix huit mois de recherches furent nécessaire pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés. L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres. https://www.youtube.com/watch?v=eAXVa__XWZ8

2 Oscillateur simple

Un oscillateur est constitué d'une masse m dont le centre d'inertie G est repéré par la position x dans le référentiel galiléen (O, \hat{u}_x) – voir figure 1 . L'origine O se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité α , exerçant sur m une force de frottement $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \hat{u}_x$, avec $\alpha > 0$. A tout instant t , on assimile la distance OG à la longueur $\ell(t)$ du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \hat{u}_x$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Expression de l'équation différentielle sur la position X du centre d'inertie :

Appliquons la loi de la quantité de mouvement au barycentre G , de masse m , dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \dot{x} \hat{u}_x - mg \hat{u}_x - k(\ell - \ell_0) \hat{u}_x$$

D'après l'énoncé, $\ell = OG = x$. Projetons cette relation sur \hat{u}_x :

$$m\ddot{x} = -\alpha \dot{x} - mg - k(x - \ell_0)$$

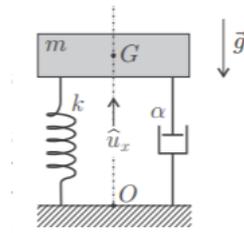


FIG. 1 – Oscillateur

Divisons cette égalité par m et posons : Il vient

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(x - \ell_0) + g = 0$$

Notons \tilde{x} la valeur de x à l'équilibre. Alors,

$$\omega_0^2(\tilde{x} - \ell_0) + g = 0$$

Il s'ensuit que

$$\tilde{x} = \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2}$$

Posons $x(t) = X(t) + \tilde{x}$, où $X(t)$ représente la position de G par rapport à sa position à l'équilibre. L'équation du mouvement devient :

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2\left(X + \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} - \ell_0\right) + g = 0$$

Après simplification, il apparaît que

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2X = 0$$

$\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}}$ La constante ω_0 est la pulsation propre, c'est la pulsation naturelle de l'oscillateur en l'absence d'amortissement. Le coefficient ξ est le facteur d'amortissement, il croit proportionnellement avec le coefficient de frottement α .

Régime libre avec $X_0 \neq 0$ et $V_0 \neq 0$: $\xi = 0$ et $0 < \xi < 1$:

Pour $\xi = 0$, l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{X} + \omega_0^2X = 0$$

Il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation ω_0 . La solution $X(t)$ est de la forme :

$$X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

Avec les conditions initiales imposées, on obtient que : Par conséquent,

$$A = X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad B\omega_0 = \dot{X}(0) = V_0$$

$$X(t) = X_0 \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (\text{pour } \xi = 0)$$

$0 < \xi < 1$: Pour $0 < \xi < 1$, en cherchant des solutions sous forme $X(t) = Ae^{pt}$, on aboutit à l'équation caractéristique :

$$p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant est

$$\Delta = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) < 0$$

$$p = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$$

Il s'ensuit que Ainsi, $X(t)$ est de la forme :

$$X(t) = (A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t) e^{-\xi\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad \omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$$

Cette fois, les conditions initiales se traduisent par

$$A = X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad -A\xi\omega_0 + B\omega_a = \dot{X}(0) = V_0$$

si bien que

$$X(t) = \left(X_0 \cos \omega_a t + \frac{1}{\omega_a} [V_0 + \xi\omega_0 X_0] \sin \omega_a t \right) e^{-\xi\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad \omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$$

On observe des pseudo-oscillations.

Effet d'une force de vent $F = \beta \dot{X}$:

Enfin, l'ajout d'une force due au vent revient à changer α en $\alpha - \beta$, c'est-à-dire à redéfinir le facteur d'amortissement ξ et à l'écrire :

$$\xi = \frac{\alpha - \beta}{2m\omega_0}$$

Si $\beta > \alpha$, $\xi < 0$ et l'oscillateur devient instable. Sous l'effet du vent, l'oscillateur peut se mettre à osciller spontanément.

2.1 Régime forcé

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi ft)$. Le vecteur \vec{F}_0 correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence f correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que $\vec{F}_1 = 0, 4\vec{F}_0$. Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme $-\hat{u}_x$. On note $F_0 = \|\vec{F}_0\|$ le module de la force statique, $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ la réponse en déplacement de l'oscillateur et $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$ sa représentation complexe.

Bonus : Calcul de $\underline{H} = \underline{Y}/\underline{E}$. On définit H comme la fonction de transfert du système, avec Y défini ci-dessus et $E = \frac{1}{m} F_1$.

La nouvelle équation du mouvement est

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(x - \ell_0) + mg = -F_0 - F_1 \cos \omega t$$

Divisons par m et introduisons X , comme à la question 1,

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos \omega t$$

Comme $X = Y - F_0/(m\omega_0^2)$, il vient :

$$\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m} \cos \omega t$$

En régime sinusoïdal forcé (en posant $\underline{E}_1 = -F_1$), on a : Par conséquent,

$$\underline{Y}(-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2) = \frac{\underline{E}_1}{m}$$

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{E}} = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2}$$

donc

$$\underline{H} = \frac{1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega}$$

On obtient alors par analogie avec circuit RLC et tension aux bornes de la capacité, résonance si $\xi > 1/\sqrt{2}$ (il ne faut pas un trop fort amortissement). **On ne fait pas le calcul de la résonance de \underline{H} , on raisonne par analogie avec le RLC et on peut directement dire qu'on se place dans le cas de la résonance en calculant les ODGs correspondants.**

ODG: A partir de la figure ?? on peut trouver un odg de $\xi \simeq 0.18$ et $\omega_0 \simeq 12 \text{ rad/s}$ (voir correction pour comment on les obtient).

Afin d'étudier précisément les propriétés du for_cage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.

L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée représentée sur la figure ?. On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en $N = 300$ points équidistants sur un intervalle $[t_{min}, t_{max}]$. Les différents spectres obtenus sont rassemblés sur la figure ?.

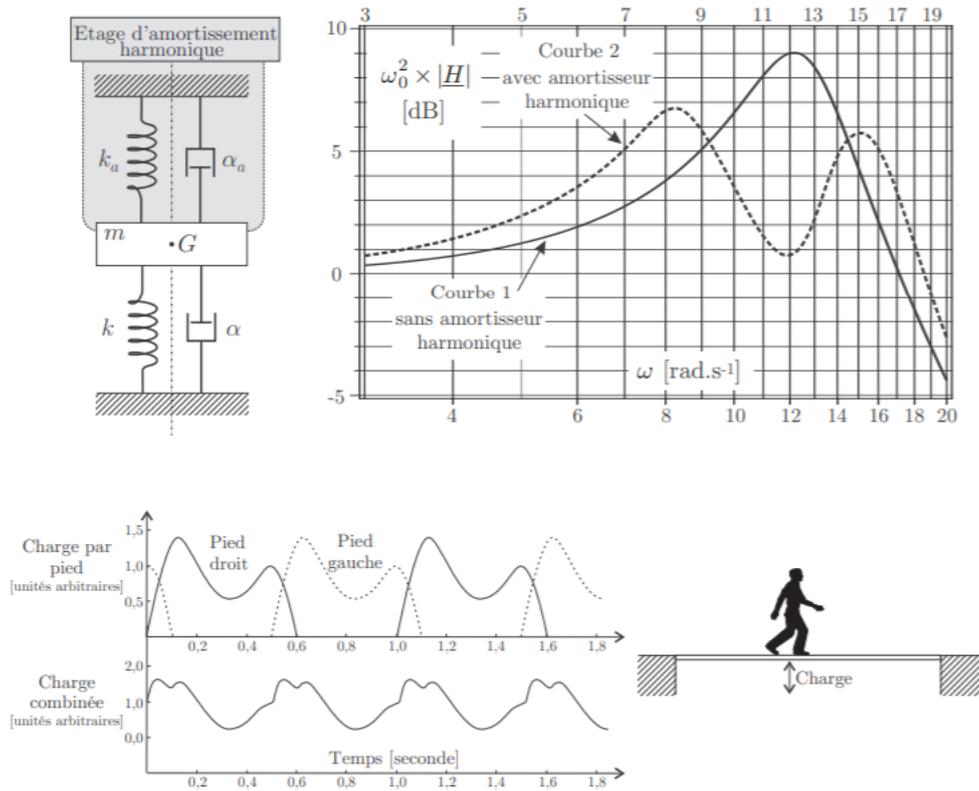


FIGURE 2 – Forçage d’une passerelle par la marche d’un piéton.

On voit alors sur le spectre de la marche qu’on a un fondamental à 2 Hz, une harmonique à 4Hz e tune à 6Hz.

Morale Le problème du millénium bridge est d’avoir une fréquence de résonance proche de celle des piétons ($f \sim 1.9Hz$), ainsi on a des problèmes de résonance de la structure à cette fréquence. Les amortisseurs harmoniques permettent de déplacer les résonances et réduit également les amplitudes de celles ci (voit correction).

C’est à mon avis le bon moment de montrer l’animation http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.html.

↓ Si on perturbe un OH en augmentant l’amplitude : le système va osciller à une plus grande amplitude et le system “remembers” the perturbation forever. Comment obtient-on alors des oscillations auto-entretenus indépendem-ment de ce qu’on impose au système, sous entendu, indépendant du forçage ?

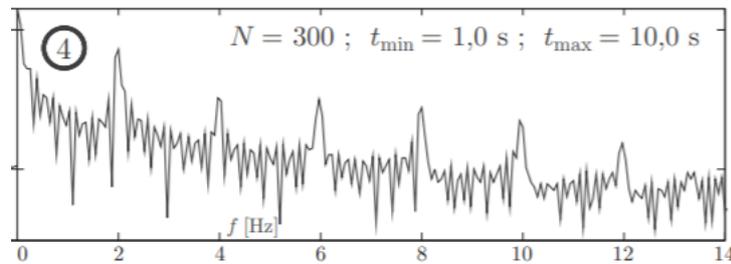
3 Oscillateurs auto-entretenus

3.1 Vers l’équation d’un oscillateur auto-entretenu l’équation de Rayleigh

↪ Garfinkel, Modeling Life, Rayleigh’s Clarinet: vidéo avec de super explications

Oscillateurs auto-entretenus, cycle limite Dans la nature, on observe des oscillateurs auto-entretenus qui sont des systèmes qui engendrent des oscillations périodiques, étant alimentés par une source d’énergie qui compense la dissipation, inévitablement présente. Par exemple :

- la température du corps : In all mammals, body temperature shows a clear 24-hour rhythm, whose amplitude can be as much as 1°. This daily rhythm is not the result of simple external cues such as the light–dark cycle, because it persists even in continuous darkness.
- Expression des gènes : Genes are often under regulation that causes them to express in an oscillatory pattern, with cycles ranging from hours to days. Oscillatory gene expression has been detected in many genes, including Hes1, which is critical in neural development.



- Les instruments de musique : on souffle en continu et il en ressort des notes bien déterminées.
- Battements du coeur
- Grincement d'une porte, couinement des freins (stick-slip)
- Les oscillations des ponts et ailes d'avions dues à l'écoulement d'air (détachement de tourbillons de von Karman, pont de Tacoma : bifurcation de Hopf sous-critique)

Cependant, ils présentent une différence fondamentale avec l'oscillateur harmonique libre ou l'oscillateur amorti forcé : leur fréquence d'oscillation est une caractéristique intrinsèque de l'oscillateur : elle n'est pas imposée par une fréquence particulière du forçage extérieur ou par les conditions initiales.

Différence avec l'OH L'OH ne peut pas décrire ces systèmes. En effet, si on perturbe un OH en augmentant l'amplitude : le système va osciller à une plus grande amplitude et le system "remembers" the perturbation forever. This is generally undesirable in a biological system. For instance, the body temperature rhythm should be stable to perturbations : if you have a fever one day, you want to be able to return to the normal oscillation. On observe des oscillations robustes, de nature complètement différent des oscillateurs harmoniques/amorti : la forme des oscillations n'est pas imposée par une fréquence particulière du forçage extérieur ou par les conditions initiales.

Cycle limite Contrairement aux oscillateurs harmoniques, les oscillations en régime permanent ne dépendent pas l'état initial : quel que soit la CI, le système converge vers les mêmes oscillations : on parle de cycle limite. Le cycle limite est un attracteur, qui est aussi une trajectoire fermée *topologiquement isolée*. Si on perturbe le système, il relaxe vers le cycle limite. de L'OH présente aussi des trajectoires fermées, mais ce ne sont pas des cycles limites car si on perturbe l'OH il ne relaxe pas vers un trajectoire particulière.

Le clarinette de Rayleigh ↗ [Rayleigh's Clarinet: vidéo avec de super explications](#)

Ainsi, on veut combiner l'idée des oscillations avec l'idée de robustesse en fréquence. Une des premières personnes à avoir compris cela était Lord Rayleigh est dans le contexte musical. En effet, un instrument de musique est un objet mécanique permettant de produire des oscillations alors que le forçage du musicien à travers son souffle est continu. L'oscillation est la note musicale. Pour un instrument musical, une propriété critique est que la fréquence d'oscillations ne peut pas dépendre de l'amplitude de l'oscillation. On veut juste une amplitude plus grande. C'est ce qui traduit une oscillation stable ou un cycle limite.

Modèle de Rayleigh Pour cela, Rayleigh a effectué un modèle physique puis mathématique de la clarinette. L'objectif est de trouver un modèle physique qui peut expliquer pourquoi la anche peut osciller à une fréquence donnée, indépendamment du forçage. [On montre le schéma](#). On note x la position verticale du roseau. Le PFD donne $\ddot{x} = F(x, v)$. 🌟 **Dans cette section, on raisonne toujours en grandeurs adimensionnées.** Que mettre dans $F(x, v)$?

- Sans le clarinettiste, l'anche de la clarinette est comme un ressort qui exerce une force de rappel $-x$.
- Comment modéliser le clarinettiste ? Le clarinettiste éloigne le système de l'équilibre. Il rend l'origine instable. Si l'anche est penchée, le courant d'air va le faire pencher encore plus. [On fait un dessin](#). C'est comme une porte dans le vent : si elle s'entrouvre elle s'ouvre en grand. Mathématiquement, cela se traduit par une friction négative, qui fait diverger le système du point d'équilibre. [On trace une force de friction \$g\(v\)\$ avec une pente positive proche de l'origine](#). Le coefficient de friction est du sens opposé aux systèmes dissipatifs, le système est alors instable est a tendance à diverger de l'origine. C'est le comportement à basse vitesse.
- La trajectoire ne peut pas diverger vers un état d'énergie infinie, ce n'est pas physique. A haute vitesse, les frottements de l'air deviennent dominants et tendent à freiner les mouvements de la anche. [On trace une force de friction avec une pente négative à \$|v|\$ grand](#).

Résumons, à basse vitesse, on veut une déstabilisation qui se traduit par un amortissement négatif. A haute vitesse, on veut un amortissement positif. Comment coudre les bouts? [On relie les bouts au tableau](#). On prend la fonction lisse la plus simple : une fonction cubique

$$g(v) = v - v^3$$

Pour les faibles vitesses et les grandes vitesses, on a bien les comportements voulus.

Système dynamique En rassemblant tout, on se retrouve avec l'équation du mouvement

$$\ddot{x} = -x - v - v^3$$

Elle se réécrit sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x + v - v^3 \end{cases} \quad (1)$$

Intuition d'un cycle limite Rayleigh n'avait pas les outils pour résoudre le système. Mais il fait le raisonnement suivant : pour des grandes vitesses, la force de frottement en $-v^3$ fait spiraler vers l'origine. [On fait un dessin](#). Pour des petites vitesses, on spirale hors de l'origine à cause du terme en $+v$ [On poursuit le dessin](#). Donc il doit y avoir une orbite fermée [On achève le dessin!](#). Son raisonnement géométrique, avec le portrait de phase, fut prouvé mathématiquement par Poincaré 50 ans plus tard par des arguments topologiques *avec le théorème de Poincaré Bendixon..* Ainsi, Rayleigh, en réalisant un modèle on a trouvé comment avoir des oscillations stables et donc une note stable.

Forme du cycle limite Le cycle limite n'est pas rond/elliptique, sinon, la clarinette aurait le son pur d'un diapason. La non-ellipticité est caractéristique du son de l'instrument/des harmoniques.

Bonus : cahier des charges mathématiques ∇ suivre Bergé p25. Reprenons l'équation de l'OH amorti. Si $\gamma > 0$, il y a dissipation et toutes les trajectoires convergent vers l'origine, qui est un attracteur. Si $\gamma < 0$, l'énergie diverge, ce qui n'est pas physique. De plus, l'OH amorti est une équation linéaire donc en particulier homogène : si $x(t)$ est solution, alors $\alpha x(t)$ aussi : il y a invariance d'échelle ou invariance par dilatation. Donc pour obtenir l'équation d'un oscillateur entretenu, il faut :

- rompre l'homogénéité en espace (ou invariance par dilatation) : un cycle limite ne peut être présent que dans des systèmes non-linéaires.
- introduire un apport continu d'énergie pour empêcher la relaxation vers l'origine
- éviter la divergence de l'énergie

De plus, un cycle limite est impossible pour un système gradient

3.2 L'équation de Van der Pol

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/vanderpol.html>

De Rayleigh à Van der Pol ∇ [Par ici](#) En dérivant l'équation de Rayleigh, on arrive à l'équation de Van der Pol. [Le calcul est sur la fiche](#). A un changement d'échelle près,

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

On remarque l'expression d'une force de frottement qui dépend de l'amplitude x . Si $\mu > 0$, le terme de frottement apporte de l'énergie lorsque $x < 1$ et le terme dissipe de l'énergie lorsque $x > 1$. On voit encore ici comme un cycle limite peut apparaître. [On aurait pu introduire l'équation de Van der Pol en faisant un raisonnement similaire sur la clarinette](#). Mais historiquement, Rayleigh est arrivé au modèle présenté en premier, puis Van der Pol a donné son équation.

Obsolète : l'équation de Van der Pol Partant du constat ci-dessus, Van der Pol a remarqué qu'un moyen mathématiquement très simple consiste à faire dépendre de frottement γ de l'amplitude θ des oscillations. On veut s'arranger pour que si l'amplitude des oscillations est faible, $\gamma < 0$ et si l'amplitude est grande, $\gamma > 0$. Similairement à l'approche de Landau des transitions de phase, on peut faire un développement de γ en puissance de θ en s'arrêtant à l'ordre le plus bas compatible avec les symétries. Comme seul le module de l'amplitude a une importance et pas son signe, on cherche une dépendance $\gamma(x^2)$. La dépendance la plus simple est alors [expression]. On a introduit une amplitude de référence, qui brise l'invariance par dilatation. En fait, l'oscillateur de Van der Pol est le prototype des oscillateurs auto-entretenus.

3.3 Bifurcation et portraits de phase

A mon avis on peut donner les comportements qualitatifs sans rentrer dans le détail des bifurcations de Hopf

Oscillateur de Van der Pol numérique

On sort le script "Van der Pol.py" Si $\mu < 0$, les trajectoires convergent vers l'origine. Si $\mu > 0$, on montre que différentes conditions initiales convergent vers un cycle limite ($\mu = 0.3$ est joli). Sinon, on peut montrer la vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=KzInKpTw0MY>

Régime $\mu < 0$, l'origine est attracteur Lorsque R_{NL} est supérieure à une valeur critique déterminée par les autres constituants, le coefficient μ est négatif. On peut montrer que le portrait de phase possède un unique attracteur en $(0, 0)$. C'est clair puisque pour des petites perturbations autour du point fixe, le terme de frottement est dissipatif, les oscillations sont amorties : $(\mu(x^2 - 1) > 0)$

Régime $\mu > 0$, cycle limite Diminuer R_{NL} jusqu'à environ $17k\Omega$. On observe sur l'oscilloscope, l'apparition d'une trajectoire fermée. Lorsque R_{NL} est inférieure à la valeur critique, μ est positif. On peut montrer que $(0, 0)$ devient un point fixe instable, et que l'attracteur est désormais une courbe fermée appelée cycle limite. On peut encore une fois le comprendre avec l'équation : les petites oscillations sont amplifiées ($\mu(x^2 - 1) < 0$) jusqu'à une certaine valeur, puis amorties. La forme du cycle limite ne dépend pas des conditions initiales, uniquement des valeurs des constituants du circuit. *Ouvrir la boucle contenant l'élément non-linéaire pour placer le système en $(0, 0)$ puis refermer. Court-circuiter la boucle non-linéaire pour créer une condition initiale différente puis retirer. Le cycle limite est le même.*

Obsolète : Bifurcation de Hopf surcritique Quand μ devient positif, le point fixe stable devient instable, et un cycle limite apparaît. On parle de bifurcation de Hopf.

On voit que le cycle limite pour des valeurs de μ faibles ressemble fortement à une ellipse. C'est cohérent avec l'équation de Van der Pol : pour $\mu \rightarrow 0$ l'équation se ramène à celle de l'oscillateur harmonique. Ce régime dit faiblement non-linéaire est donc caractérisé par un signal de sortie quasi-sinusoïdal (une fois le régime permanent atteint)

3.4 Régime faiblement non linéaire

⚡ Bergé.

Energie du système A la force de rappel on associe une énergie potentielle, qui est la même de l'oscillateur harmonique. L'énergie du système est donc finalement $E = \dot{x}^2/2 + \omega_0^2 x^2/2$.

Approche énergétique Par définition du cycle limite, l'énergie totale est conservée en moyenne sur une période, on peut donc écrire, avec $\langle \cdot \rangle$ la moyenne sur une période :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \ddot{x}\dot{x} + \omega_0^2 x\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = \mu\dot{x}^2(1 - x^2) \\ \langle \frac{dE}{dt} \rangle &= \mu \langle \dot{x}^2 \rangle - \mu \langle x^2 \dot{x}^2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Approximation du régime quasi-sinusoïdal Pour caractériser ce régime, nous allons calculer l'amplitude des oscillations. On se place dans l'approximation d'un signal quasi-sinusoïdal : $x(t) = x_0 \sin(t)$ Connaissant la forme de la solution, on peut calculer ces moyennes. On obtient donc

$$\langle \dot{x}^2 \rangle = \langle x^2 \dot{x}^2 \rangle \Rightarrow \frac{1}{2}\omega_0^2 r^2 = \frac{1}{8}\omega_0^2 r^4 \Rightarrow r = 2$$

L'amplitude des oscillations ne dépend pas de μ . Cependant, il s'agit ici de la tension adimensionnée par le changement de variable fait en début de partie. En réalité, les oscillations du cycle limite varient comme $\sqrt{\mu}$.

Lorsque μ augmente, les oscillations sont de plus en plus anharmoniques. Puis, on entre dans le régime fortement non-linéaire, où les oscillations comportent une phase rapide et une phase lente : ce sont les oscillations de relaxation.

3.5 Régime fortement non-linéaire et oscillations de relaxation

⚡ Strogatz.

Oscillations de relaxation

On augmente μ et on voit des oscillations de relaxation : on montre l'évolution temporelle avec séparation d'échelle, sur Python ou sur vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=4y1BhSy9srQ>

Reformulation de l'équation Manifestement, il y a une séparation d'échelle de temps, avec une variation rapide et une variation lente. Pour mieux les comprendre, on va faire un changement de variable. Nous allons récrire l'équation de Van der Pol sous la forme d'un système, en prenant une définition différente de la vitesse généralisée y . On voit que l'on peut faire apparaître une dérivée temporelle contenant les deux premiers termes de l'équation (on revient à l'équation de Rayleigh en fait) :

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{x} + \mu \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \right] + x = 0$$

En définissant $F(x) = \frac{x^3}{3} - x$ et $y = \frac{\dot{x}}{\mu} + F(x)$ on obtient le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(y - F) \\ \dot{y} = -\frac{x}{\mu} \end{cases}$$

Sur le portrait de phase modifié (x, y) on fait apparaître $F(x)$. On se place dans le cas $\mu \gg 1$. On a alors

$$\begin{cases} \dot{x} \gg 1 & \text{et } |y| \ll 1 & \text{pour } y > F(x) \\ \dot{x} \ll -1 & \text{et } |y| \ll 1 & \text{pour } y < F(x) \end{cases}$$

Résolution graphique On s'appuie sur le schéma de la fiche Le fait que $\mu \gg 1$ fait apparaître deux échelles de temps très différentes en y et x . On part haut sur la branche $y = F(x)$. Comme \dot{x} domine sur \dot{y} , x relaxe vite vers $F(x)$. Ensuite, $\dot{y} = -x/\mu < 0$ donc y diminue en suivant la courbe $y = F(x)$, jusqu'au moment où si y diminue, le $\dot{x} \ll 1$ va faire sauter le système de l'autre côté.

Interprétation graphique, oscillations de relaxation On voit des oscillations de relaxation. Elles sont constituées d'une alternance de variations de tension très rapides puis très lentes. On parle d'oscillations de relaxation. C'est un phénomène très courant dans plein de domaines : collé-glissé en frottement solide, de la corde de violon, les battements du coeur...

Calcul de la période C'est optionnel, c'est sur fiche.

Le succès de l'équation de Van der Pol est de pouvoir modéliser des oscillations quasi-harmoniques auto-entretenus mais aussi des oscillations de relaxation à séparation d'échelles de temps, simplement en faisant varier un paramètre.

Conclusion

Bonus / Compléments

Oscillations dans un plasma

On va considérer un premier modèle simple, unidimensionnel pour voir la réponse du plasma à une petite perturbation extérieure qui fera bouger les électrons (et non les ions, ainsi n_i est une constante).

On considère une tranche de plasma de longueur dz , on note la perturbation ξ et on suppose les ions de charge unité ($q = +e$).

Avant la perturbation $n_{i0} = n_{e0} \equiv n$.

Le nombre d'électrons dans la tranche avant la perturbation est $N_e = n_{e0} dz = n dz$. Après la perturbation :

$$N_e = n_e(z + dz + \xi(z + dz) - (z + \xi(z))) = n_e dz \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \quad (2)$$

Par conservation du nombre d'électrons on a donc :

$$n_e \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = n \quad (3)$$

On se place dans le cadre d'une petite perturbation ainsi $\frac{\partial \xi}{\partial z} \ll 1$ et ainsi $n_e \simeq n \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)$.

La densité de charge est donc $\rho = -n_e e + n_i e$.

Ainsi :

$$\rho = ne \left(1 - \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \right) = ne \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (4)$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss on a :

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{ne}{\varepsilon_0} \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (5)$$

Après intégration :

$$\vec{E} = \frac{ne}{\varepsilon_0} \xi \vec{u}_z \quad (6)$$

On applique le principe fondamental de la dynamique à un électron :

$$m_e \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -e \frac{ne}{\varepsilon_0} \xi \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0} \xi \quad (8)$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation d'oscillation ω_p telle que :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}} \quad (9)$$

On appelle donc ω_p la pulsation plasma. **ODG:** $n = 10^{11} m^{-3}$ donne $\omega_p = 2.9 MHz$ (cas de l'ionosphère) : vibrations "importante" pour notre échelle.

Remarque : L'équation montre que l'action du champ électrique créé par une perturbation mécanique initiale est équivalente à une force de rappel ce qui se comprend aisément : le champ électrique est dirigé des tranches dilatées (globalement positives) vers les tranches comprimées (globalement négatives) et donc provoque le retour des électrons (penser à $\vec{F} = -e \mathcal{E} \vec{E}$). En fait, en l'absence de frottements, mouvement (terme inertiel) et champ (terme de rappel) s'entretiennent mutuellement : c'est l'équivalent d'un système masse-ressort comme en acoustique.

Message : Les électrons d'un plasma oscillent à une fréquence bien particulière. Les caractéristiques de l'oscillation sont dépendantes des conditions initiales, seule la fréquence est fixée par la nature du milieu.