

LP 2020 : Systèmes couplés

14 juin 2021

Clément Gidel & Pascal Wang

Niveau :

Commentaires du jury

Bibliographie

✦ *Le nom du livre, l'auteur*¹

→ Expliciter si besoin l'intérêt du livre dans la leçon et pour quelles parties il est utile.

Prérequis

➤ prérequis

Expériences

☞ Biréfringence du quartz

Table des matières

Passage : Etienne Pinard

Niveau : L1, prérequis : force de rappel, PFD, oscillateur harmonique, décomposition de Fourier

Plan :

I) Oscillateur isolé. Nous allons étudier de systèmes non-habituel, et nous rattacher à l'exemple de l'oscillateur harmonique. Le couplage désigne la mise en contact de deux système qui entraîne la modification du comportement individuel de chaque système par rapport à la configuration isolé. Le couplage type $E(a) = 0$ se transforme dans le cadre d'un couplage par $E(a) = f(b)$ c'est le terme de couplage. Si f est linéaire, alors le couplage est linéaire et on peut écrire f sous un développement de Taylor $f(b) = a_{-1} + a_0 b + a_1 \frac{db}{dt} + \dots$. Si f en cb alors couplage élastique, si f en $c \frac{db}{dt}$ alors couplage dissipatif, si f en $c \frac{d^2 b}{dt^2}$ alors le couplage est inertiel. A) Définitions. Pour un oscillateur linéaire X , on a $\frac{d^2 X}{dt^2} + \alpha \frac{db}{dt} + \beta X = 0$. ON définit l'oscillateur harmonique et amortie. B) Oscillateur harmonique réel. En réalité il y a le champ de pesanteur. On prend l'exemple du système masse-ressort en TP, on a $M\ddot{x} = k(2l_0 - x - l_0) - k(x - 0 - l_0) + Mg \tan(\theta)$. d'où pour $s = x - l_0$ et $s \ll L$, $\theta = \frac{s}{L}$ on a $\ddot{s} + (\frac{2k}{M} - \frac{g}{L})s = 0$. B) Mise en équations. On fait un dessin du système pour une chaîne de ressort à l'emplacement $i, i-1, i+1$. On applique le PFD à un ressort i , et on a : $M\ddot{x}_i = k(x_{i+1} - x_i - l_0) - k(x_i - x_{i-1} - l_0) + Mg \tan(\theta_i)$. Pareil on pose $s_i = x_i - x_i^e$ avec $x_i^e = i.l_0$. On a la fin $\ddot{s}_i \frac{g}{L} s_i - \frac{k}{M}(s_{i+1} - 2s_i - s_{i-1}) = 0$. On a donc des termes de couplages élastique.

C) Cas $N=2$ ressort. On fait un beau dessin. On a donc un système de deux équations :
$$\begin{cases} \ddot{s}_1 = \frac{g}{L} s_1 + \frac{k}{M}(s_2 - s_1) \\ \ddot{s}_2 = \frac{g}{L} s_2 + \frac{k}{M}(-2s_2 + s_1) \end{cases}$$

II) Oscillateur couplés en régime libre. On fait un changement de variable pour résoudre, on obtient une combinaison linéaire de cosinus et de sinus, appelé mode propre du système, on a également des termes caractéristique du couplage. Les modes sont ici pour certains lent, rapide, symétrique, anti-symétrique. D) Retour à N quelconque. La propriété fondamentale des OH couplé de manière linéaire non dissipative : N évolution être la somme de de N sinusoïde de fréquence fixées (modes propres). Le calcul matriciel donne $\omega_P, N^2 = -\frac{g}{L} + 2\frac{k}{M} - \frac{2k}{M} \cos(\frac{p\pi}{N+1})$. On peut avoir une levée de dégénérescences. On donne la valeur théorique des fréquences propres, et on fait l'acquisition de ces fréquence avec l'expérience. III) Oscillateur couplés en régime forcé. A) Résonance vs mode propre. on explique que sur un spectre continu on a des pics de résonances mais que ces pics ne sont pas nécessairement aux pulsations propres, sauf si ce sont des oscillateurs harmoniques. Equation générale d'un oscillateur amorti, cas limite de l'OH avec $Q \rightarrow \infty$ On montre des modes symétrique et anti-symétrique et lent sur le système physique, on peut remplir un tableau donnant l'ordre du mode propres et le caractère symétrique/anti-symétrique, rapide/lent. On observe une alternance symétrique/anti-symétrique.

remarques/commentaires

- et au niveau des conditions aux limites ?
- on aurait pu faire une résolution informatique pour N quelconque.
- L'aspect énergétique est abordé un peu tard, c'est dommage.
- Le passage par N oscillateurs peut être pas utile. On peut commencer à 2.
- La partie sur la résonance peut sauter, on peut faire autre chose à la place. La partie sur l'énergie est très importante.
- En dernière partie, on peut parler d'un couplage dans un modèle en particulier.
- On aurait pu parler de couplage paramétrique, ici le paramètre est la pulsation.
-

Questions :

- Sur la def de couplage : si je prend un OH simple en régime forcé c'est un système couplé ? Oui ça doit marcher avec la def donnée. Comment la différence avec le cas isolé doit être importante ? Notamment en thermo avec les thermostats : il y a effectivement couplage en quelque sorte. Si on a juste un oscillateur on peut trouver la fréquence propre en "diagonalisant" la matrice associée ? On peut s'en sortir en disant que dans la définition de couplage on exclut la dépendance explicite en temps pour éviter le cas limite du forçage.
- Petite précision : quand on parle de élastique, dissipatif, inertiel, il faut qu'on parle des dérivées vis à vis de la position. Motivation des différents termes ? Discussion physique autour de tout ça. Quel vocabulaire si on regarde des couplages inductifs ? Si on prend la tension alors on peut trouver les analogues, la raideur c'est la capacitif, l'inertiel l'inductif, le frottement le résistif.

- Oscillateur anharmonique ? Dès que c'est pas harmonique ? Le pb c'est avec l'oscillateur harmonique amorti par exemple... Finalement on dit que c'est quand c'est pas linéaire.
- Oscillateur réel ? Les non linéarités sont négligeables (frottements visqueux, mécaniques, ...). L'idée est qu'on présente un modèle : le mot plus approprié c'est plutôt ?
- Pourquoi avoir choisi de faire à N qcq pour revenir à 2 oscillateurs ? Cela permet de faire un exemple pas trop dur mathématiquement.
- Théorème générale sur la répartition des modes rapides et lents ?
- Energetiquement qu'est ce qui se passe ? L'énergie se répartie dans les modes propre essentiellement : il peut y avoir transfert d'énergie entre les modes ? Admettons qu'on donne de l'énergie dans le mode symétrique, évolution ? Les modes symétriques et antisymétriques sont découplés donc conservent l'énergie par analogie avec le cas découplé !
- Si on a N oscillateurs avec un couplage linéaire amorti, on peut quand même écrire N équations découplées avec des solutions harmoniques amorties.
- Quid du couplage NL non amorti ? Métronomes qui se synchronisent ? Structure des modes ? Oscillateur paramétrique (cf St Jacques de Compostelle)
- Qu'attendre de la décomposition en SF ? Juste identifier les pics aux différentes fréquences.
- Spectre IR : ODG des fréquences ? 3-400 THz
- Systèmes Quantiques couplés ? Couplage spin-orbite, interaction champ éom et charge ?