LP2020 :

Systèmes couplés

Présentée le 24 février 2021 par Etienne Pinard

Corrigée par Camille Eloy et Eric Brillaux

Niveau : L1

Pré-requis :
- Force de rappel d'un ressort
- Principe Fondamental de la Dynamique
- Résolution de l'équation de l'oscillateur harmonique
- Décomposition de Fourier

Introduction :

couplage : mise au contact de deux systèmes qui entraîne une modification du comportement individuel de chaque système par rapport à leur comportement isolé.

Soit un système A de grandeur caractéristique régi par l'équation $\mathcal{E}(a) = 0$.

Si le couplage dû à un système B de grandeur caractéristique b transforme cette équation en $\mathcal{E}(a) = f(b)$, alors $f(b)$ est appelé le terme de couplage.

Si de plus $f(b)$ est une forme linéaire en b (i.e. combinaison linéaire d'une constante, de b et de ses dérivées), alors on dit que le couplage est linéaire.

Pour de nombreux systèmes mécaniques, la grandeur caractéristique est la position X. Dans ce cas, il y a un vocabulaire précis associé aux couplages linéaires :
- un terme de couplage en cX → couplage élastique
- ——— $c\dot{X}$ → couplage dissipatif
- ——— $c\ddot{X}$ → couplage inertiel

Dans ce chapitre, nous allons étudier le couplage de plusieurs exemplaires du même système. Nous commencerons par l'étude du système isolé puis nous établirons la comparaison avec les systèmes couplés.

Note au lecteur : cette leçon a été conçue pour ne pas être un 100% tableau/craie, elle a en effet une forte composante expérimentale, qui se base sur le dispositif P79.22/1.

I. L'oscillateur linéaire isolé

1) Définitions

Soit un système A de grandeur caractéristique a.
Si l'équation régissant son comportement est $\ddot{a} + m\dot{a} + na = 0$ alors on dit que le système A est un oscillateur linéaire.

Il existe une sous-catégorie d'oscillateurs linéaires : les oscillateurs harmoniques. Ce sont les oscillateurs dont le coefficient m est nul. Leur équation fondamentale est donc $\ddot{a} + na = 0$.
Comme vu précédemment, la propriété fondamentale des oscillateurs harmoniques est que leur grandeur caractéristique a une évolution sinusoïdale, i-e. de la forme $a(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$, où $\omega = \sqrt{n}$. La fréquence de cette sinusoïde est $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{n}}{2\pi}$.

Par opposition, les oscillateurs linéaires dont $m \neq 0$ sont qualifiés d'oscillateurs harmoniques amortis.

② Mise en place d'un oscillateur harmonique

Nous aimerions travailler sur un oscillateur harmonique "réel".
Suite au cours sur le ressort que nous avons eu plus tôt dans l'année, on aurait pu imaginer le système suivant :

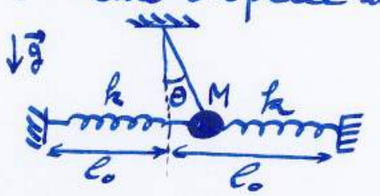
Problème : Sous l'effet du poids de la masse, non-compensé, le ressort se courberait, ce qui compliquerait grandement la lecture de son élongation et introduirait en prime une intervention parasite du poids.

Solution : Poser ce système sur un support 

Problème : Le contact masse/support va générer des forces de frottements parasites qui feront de notre oscillateur harmonique un amorti.

Solution : S'affranchir du contact avec le sol avec une suspension par fil, i.e. mettre en place un pendule mixte :

sur la paillasse :
$M = 0{,}3\,kg$
$L = 0{,}33\,m$
$k = 115\,N.m^{-1}$
$g = 9{,}81\,m.s^{-2}$



Système étudié : {masse} accroché à 2 ressorts et à 1 fil

→ mais est-ce que c'est toujours un oscillateur harmonique ?

Principe Fondamental de la Dynamique projeté à l'horizontal :

$$M\ddot{x} = Mg\tan\theta + k(2\ell_0 - x - \ell_0) - k(x - 0 - \ell_0)$$

soit $$M\ddot{x} = 2k\left[\ell_0 - x\right] + Mg\tan\theta$$

Remplaçons la position x par l'écart à la position d'équilibre $s = x - \ell_0$.

$s \ll L$ d'où $\tan\theta = \dfrac{s}{L}$

d'où $$M(\ddot{s} - 0) = -2ks + \frac{Mgs}{L}$$

d'où $$\ddot{s} + \left(\frac{2k}{M} - \frac{g}{L}\right)s = 0$$ → c'est bien un oscillateur harmonique !

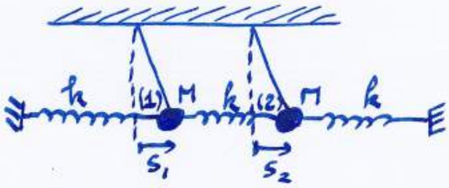
de grandeur caractéristique l'écart à l'éq. s et de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M} - \frac{g}{L}}$

Sa fréquence est $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2k}{M} - \dfrac{g}{L}} = 4{,}32\ Hz$ avec les valeurs réelles

II. Oscillateurs couplés en régime libre

(1) Deux oscillateurs

→ On couple en mettant en commun l'un des ressorts :



Le PFD appliqué à la masse 1 donne : $\ddot{s}_1 = \frac{g}{L} s_1 + \frac{k}{M}\left[s_2 - 2s_1\right]$

——————— 2 ——— $\ddot{s}_2 = \frac{g}{L} s_2 + \frac{k}{M}\left[-2s_2 + s_1\right]$

d'où
$$\begin{cases} \ddot{s}_1 + \left(\frac{2k}{M} - \frac{g}{L}\right) s_1 = \underbrace{\frac{k}{M} s_2} & (1) \\ \ddot{s}_2 + \left(\frac{2k}{M} - \frac{g}{L}\right) s_2 = \underbrace{\frac{k}{M} s_1} & (2) \end{cases}$$
termes de couplage élastique

Pour résoudre ce système d'équations, on va introduire les variables somme et différence : $\sigma = s_1 + s_2$ et $\delta = s_1 - s_2$

$$\left.\begin{array}{l} (1)+(2) \quad \ddot{\sigma} + \left(\frac{2k}{M} - \frac{g}{L}\right)\sigma = \frac{k}{M}\sigma \quad \text{d'où } \ddot{\sigma} + \left(\frac{k}{M} - \frac{g}{L}\right)\sigma = 0 \\ (1)-(2) \quad \ddot{\delta} + \left(\frac{2k}{M} - \frac{g}{L}\right)\delta = -\frac{k}{M}\delta \quad \text{d'où } \ddot{\delta} + \left(\frac{3k}{M} - \frac{g}{L}\right)\delta = 0 \end{array}\right\} \text{équation d'oscillateur harmonique sans couplage}$$

→ on qualifie donc σ et δ de variables normales

Résolution :
$$\begin{cases} \sigma(t) = A_\sigma \cos\left(\omega_\sigma t + \varphi_\sigma\right) = s_1 + s_2 \\ \delta(t) = A_\delta \cos\left(\omega_\delta t + \varphi_\delta\right) = s_1 - s_2 \end{cases}$$
avec
$$\begin{cases} \omega_\sigma = \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{g}{L}} \\ \omega_\delta = \sqrt{\frac{3k}{M} - \frac{g}{L}} \end{cases}$$

d'où
$$\begin{cases} s_1(t) = \frac{A_\sigma}{2}\cos(\omega_\sigma t + \varphi_\sigma) + \frac{A_\delta}{2}\cos(\omega_\delta t + \varphi_\delta) \\ s_2(t) = \frac{A_\sigma}{2}\cos(\omega_\sigma t + \varphi_\sigma) - \frac{A_\delta}{2}\cos(\omega_\delta t + \varphi_\delta) \end{cases}$$

⇒ l'évolution temporelle de la grandeur caractéristique de chaque système est la somme de deux sinusoïdes

=> ces sinusoïdes sont appelées modes propres (et leur pulsation/fréquence pulsation propre/fréquence propre)

Remarque : ces sinusoïdes ont une existence physique, ce sont des réelles solutions des équations, les seules solutions purement sinusoïdales.

point de vocabulaire :

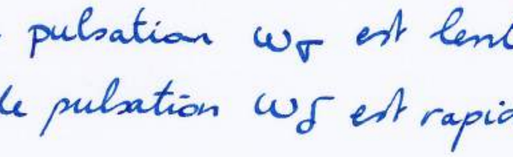
mode lent : mode dont la pulsation est plus faible que celle du système isolé
mode rapide : mode dont la pulsation est plus élevé que celle du système isolé
mode symétique : numéroter de N à 1 au lieu de 1 à N ne change pas les évolutions
mode antisymétrique : numéroter de N à 1 au lieu de 1 à N change les évolutions en leur opposé

=> ici, le mode de pulsation ω_σ est lent et symétrique, là où le mode de pulsation ω_δ est rapide et antisymétrique.

En conclusion, un système dont le comportement isolé est une pure sinusoïde se comporte désormais selon une somme de sinusoïde → il se produit bien un couplage.

② N oscillateurs

Coupler N masses telles que chacune soit reliée à 2 ressorts et un fil, cela donne :



Le PFD appliqué à chaque masse nous donnerait N équations à N inconnues :

$$\ddot{s}_i + \left(\frac{2k}{M} - \frac{g}{L}\right) s_i = \frac{k}{M}\left[s_{i+1} + s_{i-1}\right]$$

avec $i \in [\![1, N]\!]$ et avec la convention $s_0 = s_{N+1} = 0$.

→ on peut le résoudre de manière analogue à ce que l'on a fait pour 2 oscillateurs en ayant recours à N variables normales.

⇒ on obtiendrait que chaque écartement par rapport à la position d'équilibre évolue selon une somme de N sinusoïdes.

Ce résultat se généralise et constitue le résultat central de cette leçon :

> L'évolution d'une grandeur caractéristique d'un système de N oscillateurs harmoniques couplés linéairement sans terme dissipatif est la somme de N sinusoïdes de fréquences fixées.

Dans le cas de notre système particulier, ces pulsations fixées sont données par la formule $$\omega^2_{p,N} = \omega_0^2 - \frac{2k}{M} \cos\left(\frac{p\pi}{N+1}\right)$$

→ on a bien N pulsations différentes à N donné (cf. propriétés du cosinus)

→ on retrouve bien les pulsations propres pour N = 2 mais nous allons plutôt calculer celles pour N = 4 car vous voyez sur ma paillasse que je possède un exemplaire de cette système à 4 masses :

$$\begin{cases} f_{1,4} = 1{,}72\ Hz \\ f_{2,4} = 3{,}56\ Hz \\ f_{3,4} = 4{,}97\ Hz \\ f_{4,4} = 5{,}86\ Hz \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : ⚠ Ce catalogue de N fréquences peut inclure la fréquence des systèmes isolés comme il peut ne pas l'inclure. Il n'y a pas de règle dessus.

En revanche, si les N systèmes isolés ont la même fréquence (comme ici), alors au moins N − 1 fréquences en différeront : c'est ce qu'on appelle <u>la levée de dégénérescence</u>.

→ Alors tous ces développements théoriques sont bien sympathiques mais ils doivent être vérifiés expérimentalement.

→ Nous allons mettre en mouvement le système des 4 masses, enregistrer l'évolution de la position de chacune d'elles et tracer la décomposition de Fourier de cette donnée : si notre calcul est exact, alors on devrait observer exactement 4 pics aux fréquences calculées.

<u>On effectue la manip</u> : (cf. TP 2.2.2 du poly Divers)

On obtient bien 4 pics, aux fréquences 2,1 Hz ; 3,6 Hz ; 5,0 Hz et 5,9 Hz.

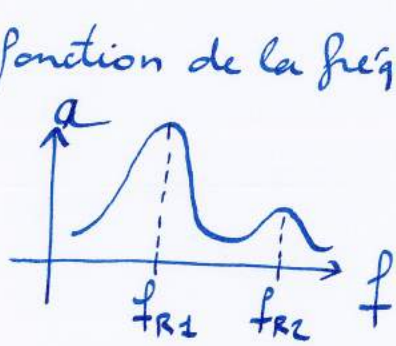
⇒ nos résultats théoriques décrivent bien fidèlement la réalité.

III. Oscillateurs couplés en régime forcé

① Résonance et modes propres

<u>Résonance</u> : maximum local d'une grandeur fonction de la fréquence.

On appelle ces fréquences où se produisent des maxima des fréquences de résonance.



⚠ En général, fréquences de résonance et fréquences propres n'ont rien à voir !

<u>Exemple</u> : le RLC, d'équation a $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \neq \omega_0$

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

Mais dans le cas d'un oscillateur harmonique, $Q \to +\infty$

donc $\omega_R = \omega_0 \Rightarrow$ la résonance a lieu à la fréquence propre.

$\Rightarrow$ ce résultat se généralise aux oscillateurs harmoniques couplés linéairement sans terme dissipatif.

② Obtention des modes propres par excitation sinusoïdale

→ On va montrer expérimentalement que le résultat précédent est vérifié et profiter d'avoir les modes propres en chair et en os devant nos yeux pour les caractériser :
(cf. TP.2.2.4 du poly Pivers)

	profil instantané	lent / rapide	symétrique/antisym	oscillations principales
mode 1	o→ o→ o→ o→	lent	symétique	périph. médians centraux m ρ périphérique
mode 2	←o ←o o→ o→	lent	antisymétique	périphériques + centrale
mode 3	o→ ←o ←o o→	rapide	symétique	médianes + périphériques
mode 4	←o o→←o o→	rapide	antisymétique	centrale + médianes

↳ faire le lien avec la spectro IR

Conclusion

Nous avons étudié de fond en comble le couplage d'oscillateurs harmoniques mais de très nombreux autres systèmes auraient pu constituer notre sujet d'étude : les pendules, les circuits électriques (notamment les filtres électriques), les systèmes quantiques...

Bibliographie

- Brébec et al., H-prépa Ondes PC, chapitre 1, I. et II.
- Fruchart et al., Physique expérimentale : optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique, VI. 2 : Oscillateurs mécaniques couplés
- Quaranta, Dictionnaire de physique expérimentale, Tome I : La mécanique, entrée "Couplage de deux oscillateurs linéaires"
- BUP n° 867, Duffait, "Etude expérimentale des oscillateurs mécaniques", p. 1307 et suivantes

Questions du jury

Sur l'introduction, tu as défini un couplage comme quelque chose qui perturbe un système par rapport au cas isolé. Donc si je prends un pendule, deux ressorts et je force. C'est un système couplé ? A quel point la différence entre cas couplé et cas isolé est important ?

Par exemple en thermodynamique un système que l'on couple à un thermostat, c'est un système couplé ?
→ c'est quelque chose de flou en physique, moi j'ai essayé de donner une définition plus restreinte. Dans un cadre plus large on peut considérer que oui c'est un couplage

Dans ton cas, tu diagonalises pour trouver les fréquences propres. Dans le cadre d'un oscillateur forcé, est-ce que cette méthodologie marche ?

Est ce qu'il y a un lien entre ta définition mathématique de système couplé et le forçage ?
→ On pourrait s'en sortir en précisant dans ta définition que la fonction f s'applique à un degré de liberté du système. Dans le cas d'un forçage on a une dépendance explicite en temps ce qui sortirait donc sûrement de ta définition

C'est une piste de réflexion sur la pertinence de la définition. Quel est le statut de e(b)? qu'autorises tu comme opérateur ? -> a priori e est libre
Du coup si je prends une dérivée dixième, ça te va ? → j'ai oublié de dire que ce vocabulaire (élastique, inertiel...) est relatif à la coordonnée position.

Du coup peu importe la nature de e, le résultat fondamental que tu as donné est valable ? → non c'est pour les OH couplés de manière linéaire
Tu peux justifier les noms présents dans ta nomenclature ? → cela vient de l'équation de l'OH amorti. dérivée seconde → masse → inertie
dérivée première → coefficient de frottement
dérivée 0 → raideur

Tu utiliserais quel vocabulaire si tu regardais des systèmes électriques ? → respectivement inductif, résistif et capacitif.

Qu'est ce qu'on appelle un oscillateur anharmonique ? → pour moi c'est tout ce qui n'est pas harmonique par exemple un pendule pesant
du coup un OH amorti c'est un oscillateur anharmonique ? → ah non du coup l'anharmonicité c'est le fait d'être non linéaire

Quand tu as parlé d'OH réel, qu'est ce qu'on pourrait faire pour que le dessin ressemble plus à l'expérience ? → dans l'expérience on a deux ficelles qui permettent d'éviter les mouvements transversaux
Du coup c'est quoi pour toi un oscillateur réel ? → en vrai on a même des frottements fluides mais cela me parait plus négligeable par rapport à ce que l'on avait avant.
C'est donc bien un modèle ce que tu as présenté au tableau. Tu l'appellerais quand même réel ? → c'est peut être trop présomptueux

J'ai une question par rapport à un choix : tu as d'abord fait une présentation avec des indices en étant très général puis tu es passé à deux et les équations sont allées très vite.
Pourquoi avoir fait ça ? → de base je voulais ne pas passer par N=2 et faire une résolution matricielle mais je trouvais que cela faisait une grosse disparité de niveau entre les différentes parties de ma leçon.

A propos de la résolution en N=2 tu as fait la distinction mode lent/rapide. Y a t il un théorème sur la répartition de ces modes ? Sur leur nombre, etc ? → ça va toucher à la définition de système isolé. dans certains ouvrages il doit être marqué qu'il y a autant de modes lent que de modes rapides → si on choisit comme système isolé les deux ressorts attachés chacun au mur mais non couplés, la répartition n'est pas égale entre modes lents et rapides. Du coup j'ai mis en doute la véracité de ce théorème et donc je ne l'ai pas présenté.

Toujours sur ces deux oscillateurs, que peut on dire énergétiquement ? → ici les modes ne se transmettent pas d'énergie. l'énergie mécanique globale doit être conservée. Je suis plus à l'aise sur les pendules pesant couplés d'un point de vue énergétique.
Partons sur ces pendules alors. On fait l'expérience, on voit qu'un pendule transmet de l'énergie à l'autre. Le fil de torsion effectue un transfert d'énergie mécanique. La barre de torsion stocke de l'énergie et fait une répartition oscillante de cette énergie.
Du coup en fonction des modes aux petites oscillations, quelle est la répartition de l'énergie ?
Si je donne de l'énergie dans le mode symétrique, y a t il un transfert d'énergie entre ces modes ?
Quelle est la caractéristique des équations qui importe ? → les équations sont découplées du coup les modes ne se parlent pas énergétiquement. Le raisonnement est le même pour N modes.

Tu as donné l'exemple d'un couplage élastique pour ton énoncé fondamental, dans le cas d'un couplage inertiel ça marche aussi ? → oui !
Dans le cas d'un couplage dissipatif, que devient cet énoncé ? On trouve un OH amorti découplé, les solutions ont 3 régimes mais aucun n'est sinusoïdal. On peut écrire une somme de sinus amortis alors ? → oui, si on a N oscillateurs linéaires, on peut le réécrire comme N équations découplées
Si on garde dissipatif mais on enlève aussi linéaire, qu'est ce qu'on a ? → synchronisation des métronomes sur une planche (expérience de Huygens). T'as une idée de la structure des modes ?
Oscillateur paramétrique ça te dit quelque chose ? → non, désolé

Sur les prérequis, qu'est ce qu'on doit savoir sur les décompositions de Fourier pour bien comprendre cette leçon ? → les bases, niveau L1, mettre en abscisse des fréquences et en ordonnée on voit des pics dont l'amplitude est proportionnelle à l'énergie dans le mode
Comment est-ce que d'un signal mesuré on obtient le spectre ? Ça fait partie des prérequis de savoir comment ça se passe ? (i.e. la TF) → je n'exigerais pas d'un L1 cette notion

Sur la résonance, tu as parlé d'un RLC et du facteur de qualité, tu peux réécrire l'équation ? → cette fois, sans se tromper !

A l'ouverture tu as parlé de l'exemple des spectres IR ? quel est l'OdG des fréquences attendues, tu peux faire un estimation ?
→ on s'intéresse à l'empreinte digitale où le nombre d'onde est compris entre 500 et 1500cm^-1. On a f=c*sigma. On trouve des fréquences de l'ordre de 10^(13) Hz cohérent car la visible est de l'odg de 10^(14)Hz.

Tu as aussi évoqué l'aspect quantique. Exemple de degrés de libertés couplés en mécanique quantique ?
→ ajout d'un terme de couplage dans le hamiltonien, couplage d'état ; couplage spin orbite en mécaQ relativiste ; moments cinétiques peuvent se coupler → je pensais moi à l'interaction entre un champ électromagnétique et une charge.

Commentaires du jury

Globalement c'était très bien, garde ton dynamisme c'est très agréable. Ce qui est fait est bien fait. (L'un des correcteurs is speaking) J'ai des remarques sur les choix, c'est personnel. Pour moi il y a un manque de traitement des aspects énergétiques (ça n'a pas choqué l'autre correcteur), tu aurais pu calculer l'énergie à partir des données expérimentalement et avoir une discussion riche dessus, quitte à ne pas parler de résonance.

Le calcul le plus détaillé est celui de la mise en équation pour N oscillateurs et tu es peut être allé trop vite sur la partie découplage des deux oscillateurs car c'est ce qui est plus fondamental.
La mise en équation des N oscillateurs est sûrement auxiliaire. (plan modifié en conséquence)

Cette partie 1 a été motivée par le choix expérimental, avec un autre choix de système couplé, il y aurait eu une partie 1 sûrement plus courte car moins de discussion. En tout cas tu as passé 6 minutes sur un système découplé alors que le titre c'est système couplé (le jury s'étant d'après ses dires revêtu de sa tenue d'avocat du diable pour cette remarque, j'ai rétorqué « Et je répondrai au Diable que j'ai passé 34 minutes sur les systèmes couplés !)

Ta rigueur et ta clarté étaient très appréciables, c'était très bien. La résonance c'est intéressant mais j'aurais mis un problème physique plus intéressant que les systèmes mécaniques simples. C'est juste une idée mais la spectro IR peut être bien. (petit laïus à cet effet dans la version finale)

Niveau L1 c'est chaud vu ce que t'as fait. → J'ai fait ça car les connaissances sont niveau L1.

Tes choix pédagogiques sont très bien justifiés dans les questions.

On aurait pu parler des valeurs expérimentales qui avaient plus de chiffre significatif que celles que tu avait calculé théoriquement, attention ! Le jury aurait pu demander d'où vient la largeur des courbes, qu'est ce que fait l'ordi, c'est quoi la fft,...?

Illustration expérimentale très jolie.

A Saint-Jacques-de-Compostelle il y a le *botafumeiro* : forçage du système par un de ses paramètres c'est un autre type de couplage et ça s'appelle oscillateur paramétrique
ça a aussi une physique très riche. On peut coupler seulement deux systèmes et avoir un nombre infini de modes résonnants. (épreuve A 2019 c'est sur ça, c'est aussi dans le Jolidon)

Étienne pose ses questions : - toute la partie énergétique je l'avais fait sur le pendule et j'avais de très belles courbes mais ça dépassait largement 40 minutes. Vous pensez que c'est mieux un système longuement ou deux systèmes rapidement ? → un c'est très bien, tu aurais aussi pu faire le pendule de manière linéaire.
- j'ai fait beaucoup d'expériences, pour vous est ce que c'est pertinent ? → c'est trop ambitieux d'en avoir 2, tel que tu l'as fait c'est très bien et ça se justifie. Je pense que c'est le bon choix !
- je n'ai trouvé nulle part une définition satisfaisante de couplage... → chercher dans le Taillet (dictionnaire de la physique) notamment utile ce livre si on tombe sur un sujet comme résonance.
- au début je pensais parler d'adaptation d'impédance pour éviter les couplages parasites en électrocinétique, ça rentrerait ? → sûrement, mais ça peut être a double tranchant. C'est bien d'avoir un exemple original en dernière partie

Les spectateurs posent leurs questions :
→ Est ce qu'on pourrait faire une leçon qui n'a un peu rien a voir genre avec un thermostat ? → je pense que ce qu'Étienne a présenté est ce qui est attendu

→ Les modes lents et rapides j'en avais jamais entendu, est ce que c'est une définition importante ?
→ là elle me semble redondante, elle peut amener à des question compliquées et peut être enlevée mais là dans ce qu'a fait Étienne c'était bien.