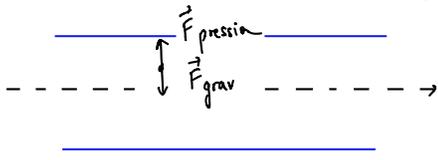


# Structure verticale des disques



modèle 1D vertical  
 $\frac{d}{dz} \Rightarrow \frac{d}{dR}$

$\sigma_j^2 = \langle v_j^2 \rangle = \text{cte sur } z$   
 car  $h \ll R$

équilibre hydrostatique

$\text{grad } p = \rho \vec{g} = -\rho \text{grad } \phi$

équation de Poisson

$\Delta \phi = 4\pi G \cdot \rho$

pression cinétique 1D

$p = \rho \sigma_j^2 = \rho \langle v_j^2 \rangle$

$\Delta \phi = \text{div}(\text{grad } \phi) = 4\pi G \rho$

$= \text{div}\left(-\frac{1}{\rho} \text{grad } p\right) = -\sigma_j^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \rho\right) \rightarrow \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}\right) = -\frac{4\pi G}{\sigma_j^2} \rho$

changement de fonction mathématique

$\psi = \ln \frac{\rho}{\rho_0}$   
 $z = h_0 x$   
 $\uparrow \uparrow$  adimensionné  
 $\frac{\sigma_j}{\sqrt{4\pi G \rho_0}}$

interprétation physique

$\rho = \rho_0 e^{-\psi}$   
 $\psi = \frac{\phi}{\sigma_j^2}$   
 — potentiel gravitationnel  
 — température cinétique

$h_0 = \frac{\sigma_j}{\sqrt{4\pi G \rho_0}}$   
 — compétition thermique — gravité

$\psi''(x) = e^{-\psi(x)}$  comme 1 PFD

$\psi''(z) - \psi''(0) = -e^{-\psi(z)} + e^{-\psi(0)}$  bilan d'énergie + intégration

$\psi(0) = 0$  car  $\rho_0 = \rho(0)$  référence des potentiels  
 $\psi'(0) = 0$  par symétrie

$\psi'' = 1 - \frac{\psi'^2}{2}$  séparation variable

$\frac{d\psi'}{1 - \frac{\psi'^2}{2}} = dx$

$\sqrt{2} \text{argth}\left(\frac{\psi'(x)}{\sqrt{2}}\right) = x$   $\int \frac{dx}{1-x^2} = \text{argth}$

$\psi' = \sqrt{2} \text{th}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

$\psi = 2 \ln \text{ch} \frac{x}{\sqrt{2}}$

$\rho = \rho_0 e^{-\psi} = \frac{\rho_0}{\text{ch}^2\left(\frac{z}{\sqrt{2}h_0}\right)}$

→ plot python  
 fact solution

solution :  $\rho(r) = \frac{\rho_0}{ch^2(\frac{r}{h})}$  ,  $h = \left( \frac{\sigma_g^2}{2\pi G \rho_0} \right)^{1/2}$  hauteur caract.

observations :  $h(r) \approx \text{cte}$   $\rightarrow$   $\rho_g(r) \propto e^{-r/2h_0}$   
 $\rho_0(r) \propto e^{-r/r_0}$   
*← même lumière* *← même lumière* *← même Doppler* *en accord avec obs.*

004 : Voie lactée

$$h \ll r_0$$

$$h \sim 300 \text{ pc}$$

$$\sigma_g \sim 18 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$r_0 \sim 3.5 \text{ kpc}$$

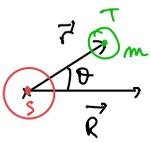
### Courbes de rotation

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \text{si sym. sphérique}$$

$$v_{\text{orb}} = \text{cte} \quad \rightarrow \quad M(r) \propto r$$

$$M(r) \underset{\text{sym sphérique}}{=} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \quad \rightarrow \quad \rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM}{dr} \propto \frac{1}{r^2}$$

## Trajectoire



$$\vec{R} = \vec{\omega} \times \vec{L} - K \vec{e}_r$$

$$\vec{R} \cdot \vec{L} = 0 \rightarrow \vec{R} \text{ dans le plan du mouvement}$$

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot \vec{r} &= (\vec{\omega} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - K \vec{e}_r \cdot \vec{r} \\ &= (\vec{\omega} \times (m \vec{\omega} \times \vec{r})) \cdot \vec{r} - Kr \\ &= m |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 - Kr \end{aligned}$$

$$R \cdot r \cos \theta = \frac{L^2}{m} - Kr$$

Trajectoire conique

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

$$e = \frac{R}{K}, \quad p = \frac{L^2}{mK} = \frac{L^2}{Gm^2M}$$

Si  $e < 1$ , la trajectoire est liée.

Application :  $e = 0.017 < 1$   
 $p = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$

## Potentiel gravitationnel

On remarque  $\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\text{grad}_{\vec{r}} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$

donc  $\vec{G}(\vec{r}) = +G \iiint_V d^3r' \rho(\vec{r}') \text{grad}_{\vec{r}} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$

$$\vec{G}(\vec{r}) = \text{grad}_{\vec{r}} \left( G \iiint_V \frac{d^3r' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

→

$$\text{rot } \vec{G} = 0$$

$\phi(\vec{r})$  potentiel gravitationnel

Lois de Kepler  
empirique

$$\rightarrow F = \frac{G m_1 m_2}{R^2}$$

théorique

→ lien masse-  
champ  
théorique

→ matière noire ?

→ courbes de rotation  
empirique

## Observations et lois historiques

- **Brumaghupta** (VIIe siècle): « La terre est ronde et tous les corps chutent vers le centre de la Terre. »
- **Kepler** (XVIe siècle)
  - Loi des orbites « Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers »
  - Loi des périodes « Le rapport entre le demi grand axe de la trajectoire au cube avec le carré de la période est une constante du système solaire »
- **Galilée** (XVIIe siècle) Tout corps en chute libre a la même vitesse, donc indépendante de la masse.
- **Newton** (fin XVIIe siècle)
  - Principe fondamental de la dynamique
  - Principe des actions réciproques.

## Ordres de grandeur

$$G \simeq 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^{-2}$$

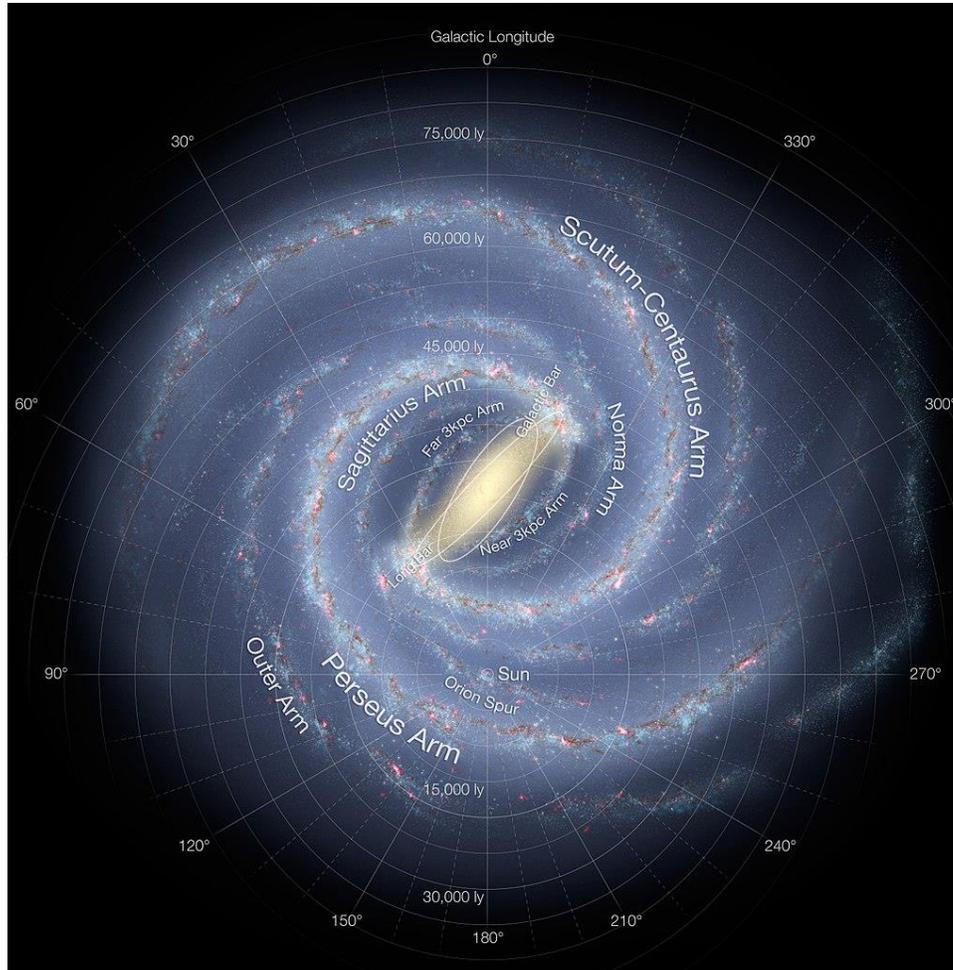
$$F_{\text{proton} \rightarrow \text{electron}} \sim 10^{-47} \text{ N} \ll \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 (1\text{\AA})^2} \sim 10^{-8} \text{ N}$$

dans un atome

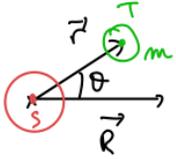
$$F_{\text{Terre} \rightarrow \text{humain}} \sim 10^3 \text{ N}$$

$$F_{\text{Soleil} \rightarrow \text{Terre}} \sim 10^{22} \text{ N}$$

# Vue d'artiste de la voie Lactée



## Trajectoire



$$\vec{R} = \vec{v} \times \vec{L} - K \vec{e}_r$$

$\vec{R} \cdot \vec{L} = 0 \rightarrow \vec{R}$  dans le plan du mouvement

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot \vec{r} &= (\vec{v} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - K \vec{e}_r \cdot \vec{r} \\ &= (\vec{v} \times (m \vec{v} \times \vec{r})) \cdot \vec{r} - Kr \\ &= m |\vec{v} \times \vec{r}|^2 - Kr \end{aligned}$$

$$R \cdot r \cos \theta = \frac{L^2}{m} - Kr$$

Trajectoire conique

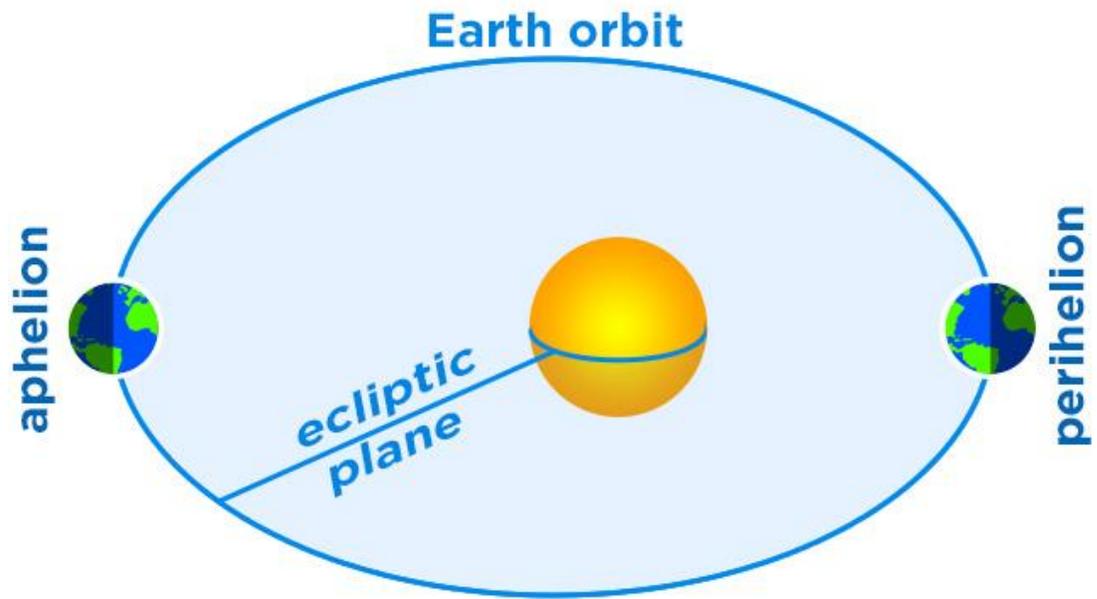
$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

$$e = \frac{R}{K}, \quad p = \frac{L^2}{mK} = \frac{L^2}{G M^2 M}$$

Si  $e < 1$ , la trajectoire est liée.

Application :  $e = 0.017 < 1$   
 $p = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$

orbite de la Terre  
autour du Soleil



## Potentiel gravitationnel

On remarque  $\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\vec{\text{grad}}_{\vec{r}} \left( \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$

donc  $\vec{G}(\vec{r}) = +G \iiint_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{\text{grad}}_{\vec{r}} \left( \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$

$$\vec{G}(\vec{r}) = \vec{\text{grad}}_{\vec{r}} \left( G \iiint_V \frac{d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

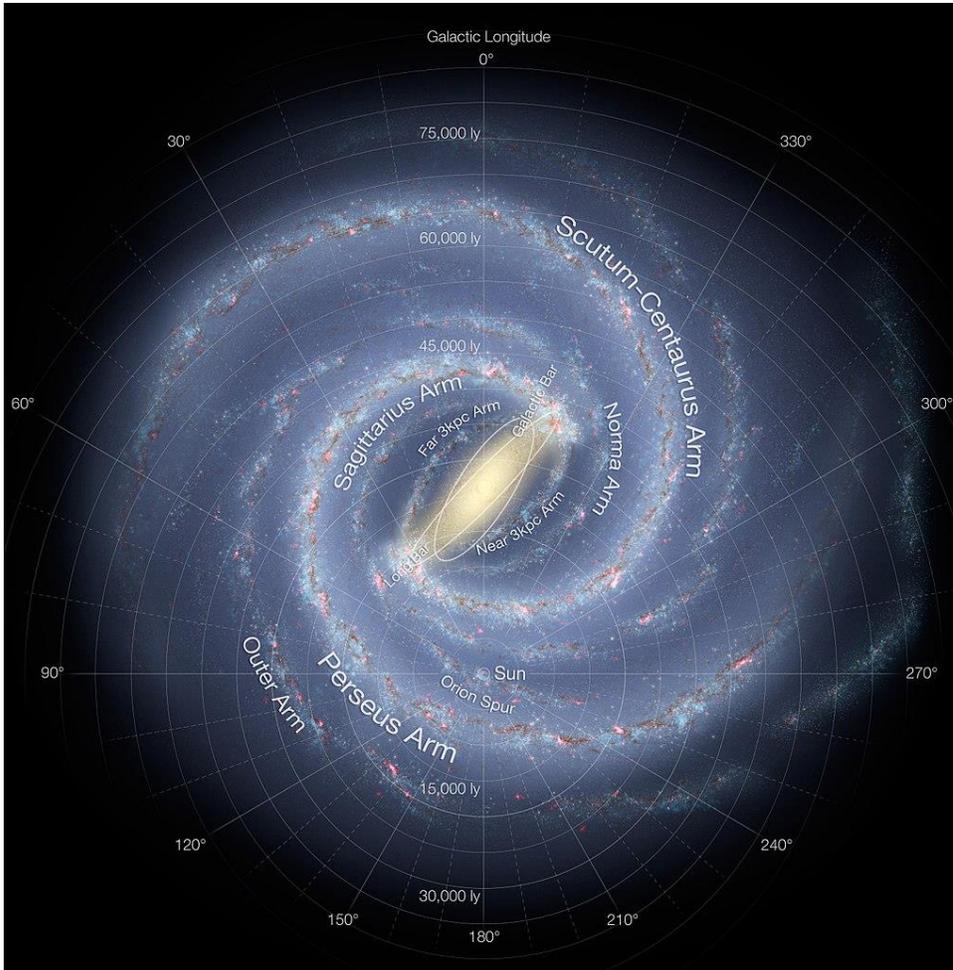
$\phi(\vec{r})$  potentiel gravitationnel

→

$$\vec{\text{rot}} \vec{G} = 0$$

	Electrostatique	Gravitation
Charge du champ	$q$	$m$
Champ	$\vec{E}$	$\vec{G}$
Force	$q\vec{E}$	$m\vec{G}$
Constante	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9 \times 10^9 \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$	$-\mathcal{G} = -6,67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Relation champ - potentiel	$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$	$\vec{G} = -\vec{\nabla}\Phi$
Equations locales	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\rho$
Théorème de Gauss	$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{int}/\epsilon_0$	$\iint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$
Equation de Poisson	$\Delta V = -\rho/\epsilon_0$	$\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}\rho$

# Vue d'artiste de la voie Lactée



Ordres de grandeur:

bulbe  $\sim 1$  kpc

taille totale  $\sim 200000$  a.l.  
 $\sim 60$  kpc

masse  $\sim 10^{10}$  masses solaires

épaisseur  $\sim 0.3$  kpc

masse volumique

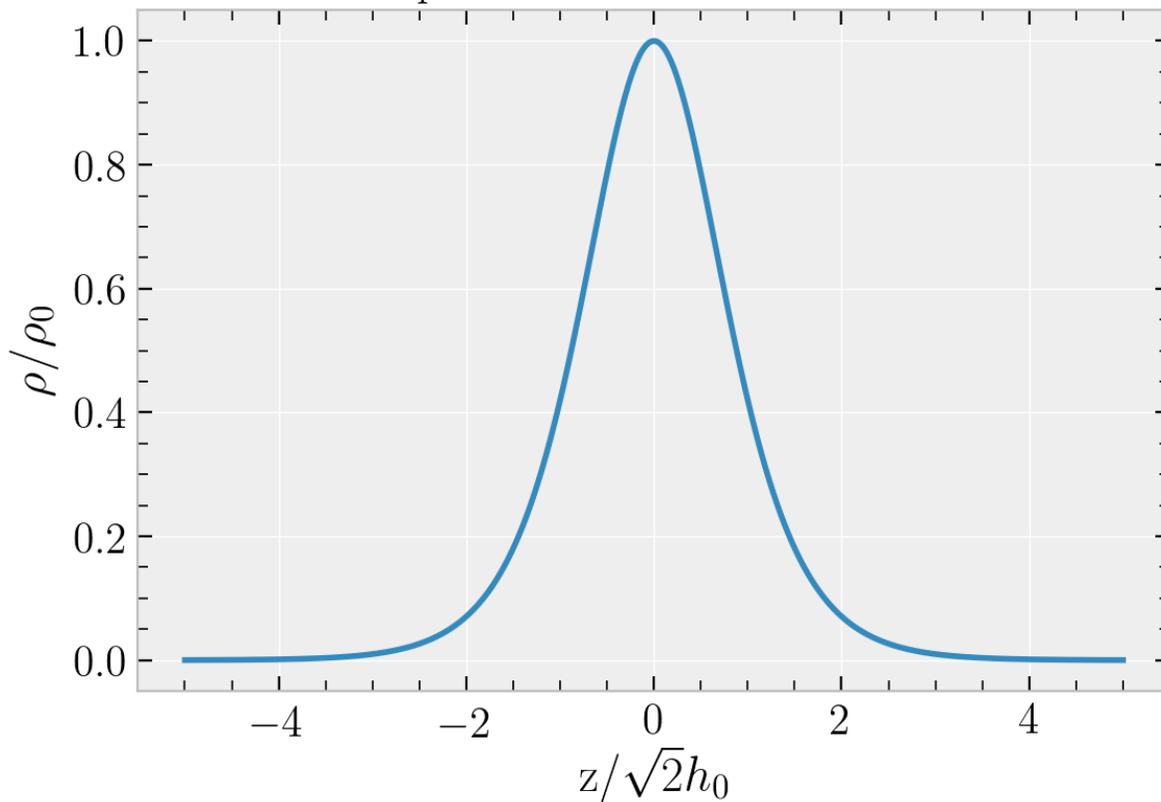
$$\rho_0 \sim 1.15 M_{\odot} / \text{pc}^3$$

Luminosité par unité de surface

$$l_0 \sim 10^{-6} \text{W/m}^2$$

$$l(r) = l_0 \exp\left(-\frac{r}{R_0}\right)$$

# profil vertical de densité



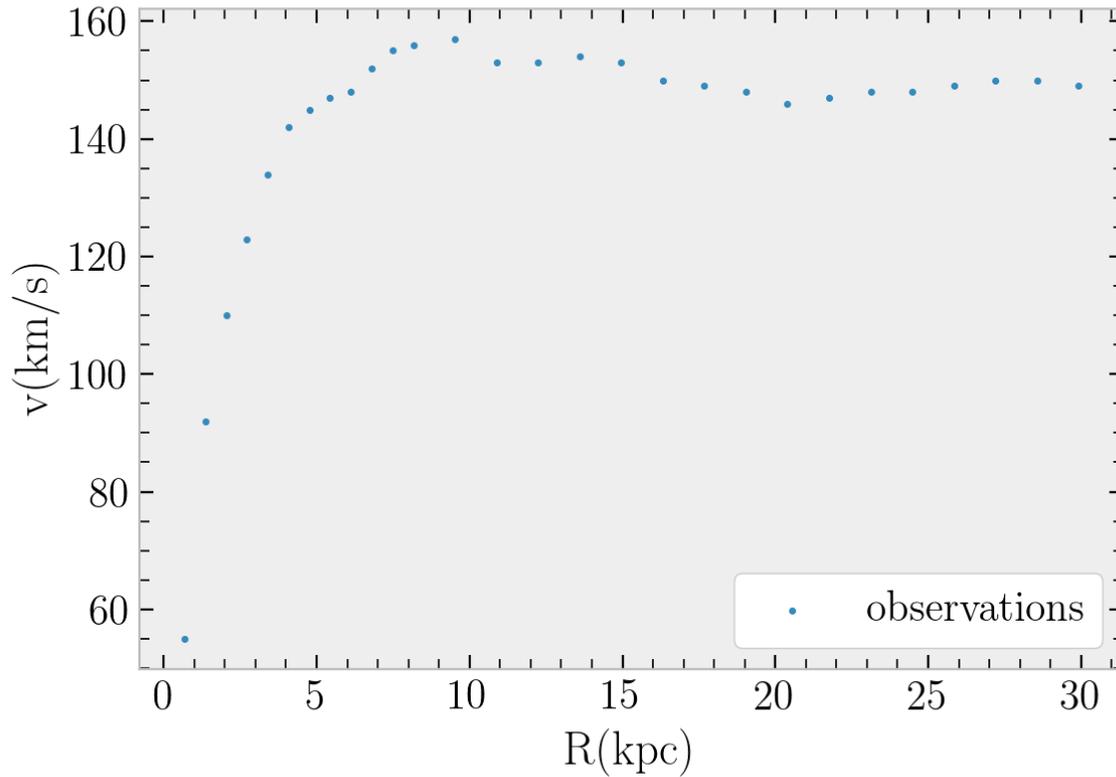
Ordres de grandeur

$$\rho_0 \sim 1.15 M_{\odot} / \text{pc}^3$$

$$h_0 \sim 300 \text{ pc}$$

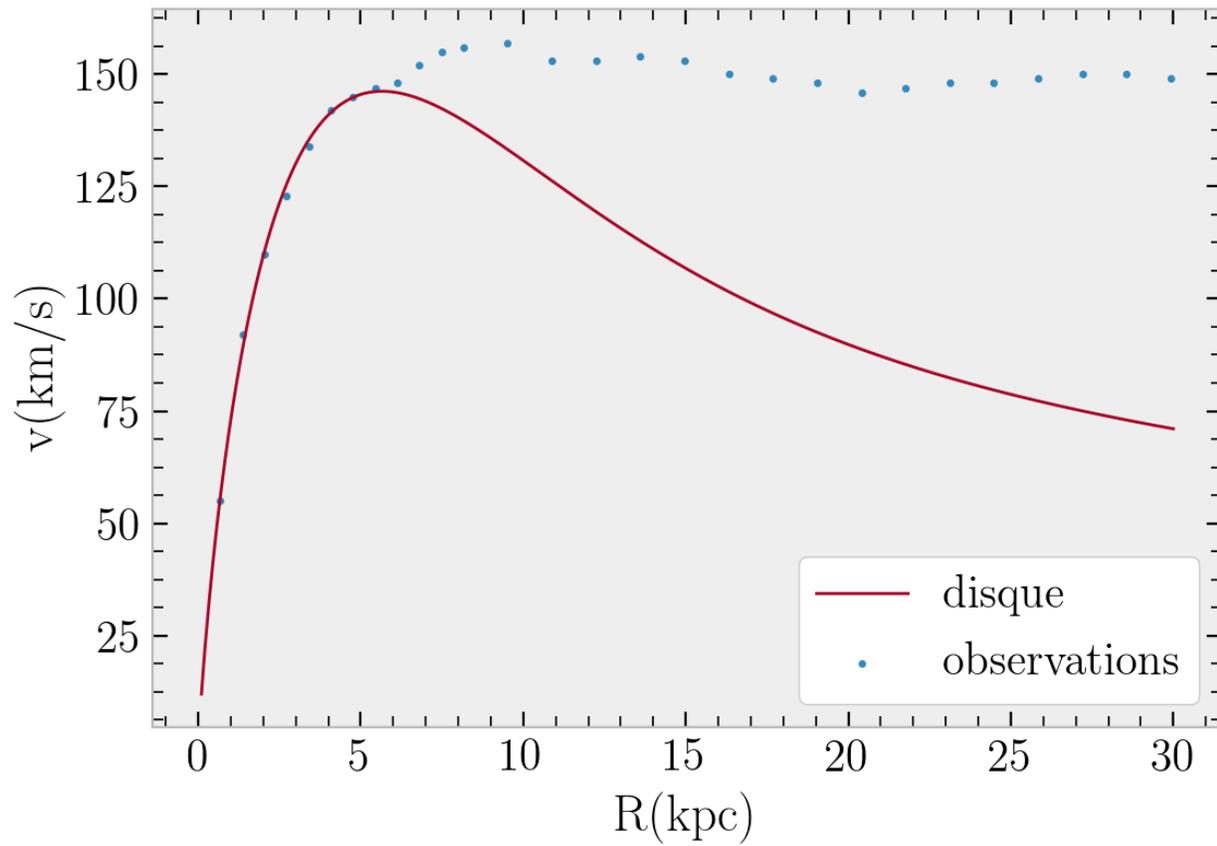
$$\sigma_z \sim 18 \text{ km/s}$$

Courbe de rotation NGC 3198

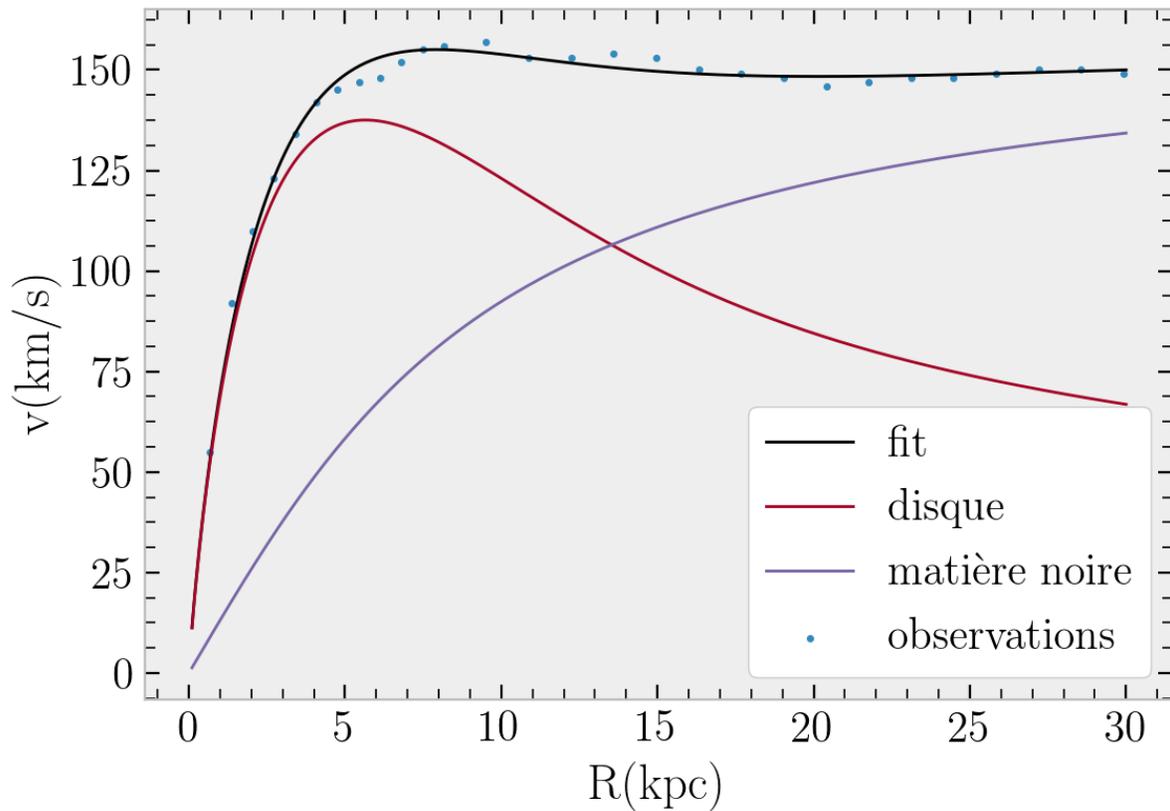


Données: K. G. Begeman, "HI rotation curves of spiral galaxies"

Courbe de rotation NGC 3198



## Courbe de rotation NGC 3198

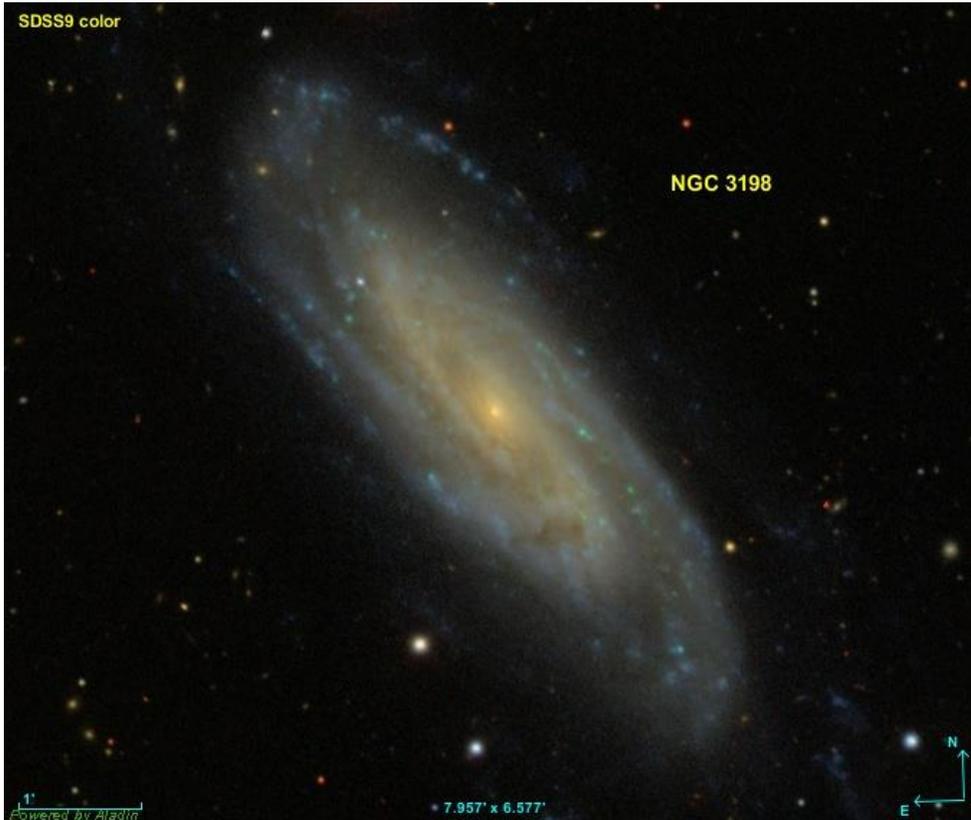


Halo sphérique de matière noire:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{r}{R_c}\right)^2}$$

$$\rho_0 \sim 24 M_{\odot}/kpc^3$$
$$R_c = 6.4 \text{ kpc}$$

## Galaxie spirale NGC 3198



**Localisation** : constellation de la Grande Ourse à environ 9.4 Mpc de la Terre

**Rayon** :  $R_0 \sim 12$  kpc

**Luminosité** par unité de surface :  $l_0 \sim 10^{-4} W/m^2$

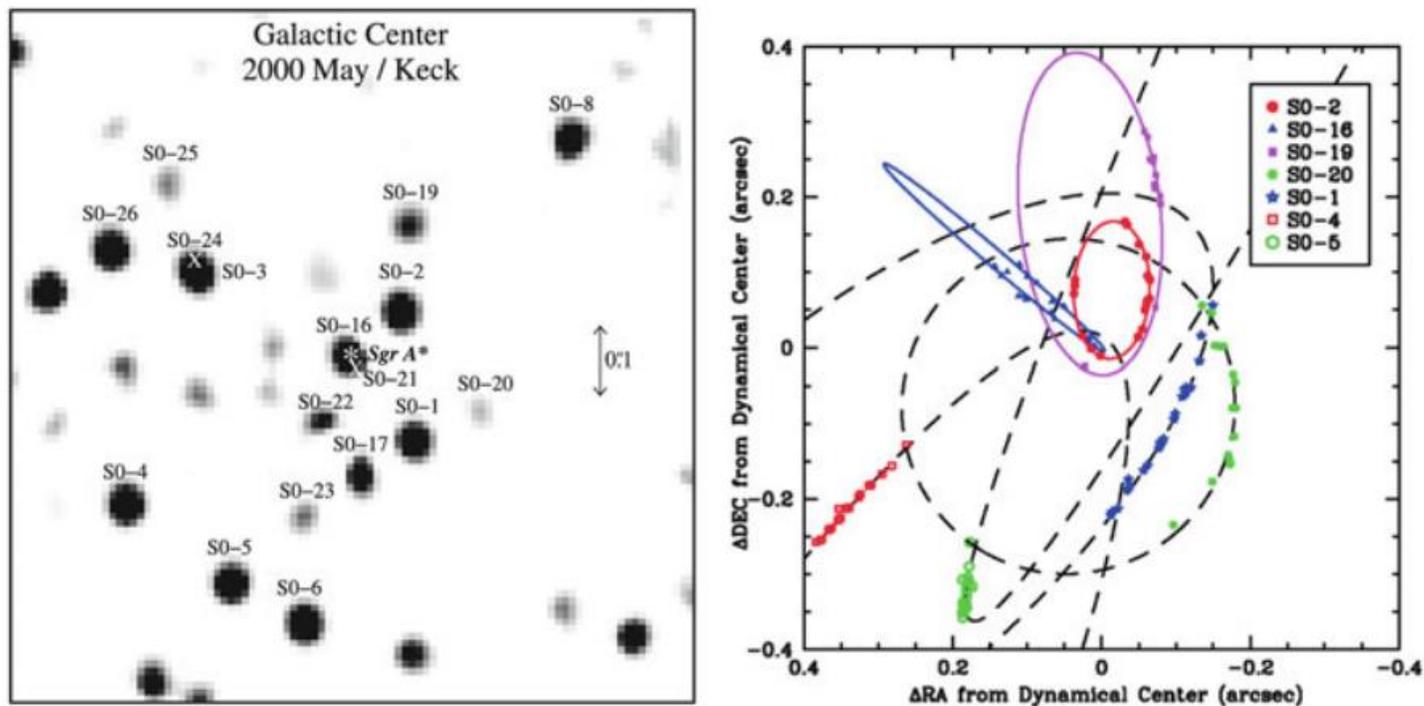
$$l(r) = l_0 \exp\left(-\frac{r}{R_0}\right)$$

## Courbes de rotation

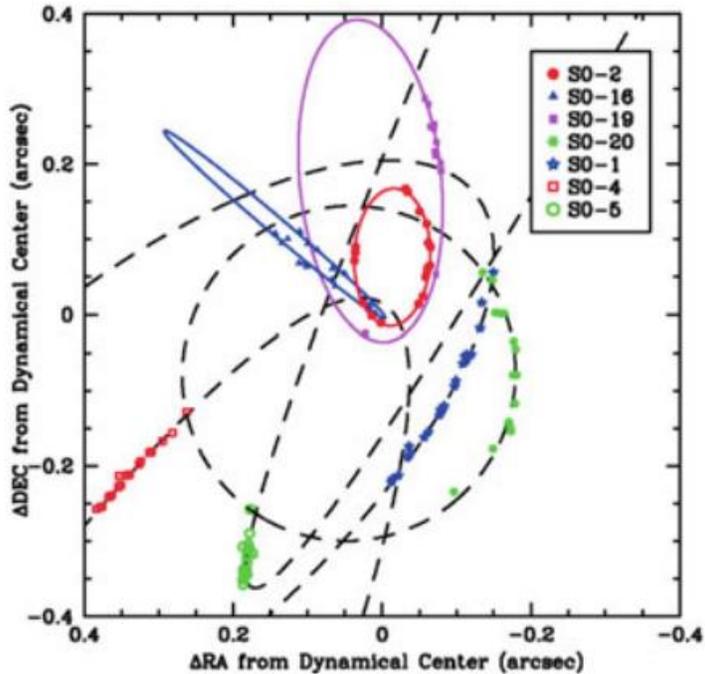
$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \text{si sym. sphérique}$$

$$v_{orb} = \text{cte} \quad \rightarrow \quad \pi(r) \propto r$$

$$\pi(r) \underset{\text{sym sphérique}}{=} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \rightarrow \rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d\pi}{dr} \propto \frac{1}{r^2}$$



**Fig. 3.3** Stars near the Galactic Center. The *left panel* shows a snapshot from May 2000, while the *right panel* shows some of the orbits traced over time (plotted on a different scale) (Credit: Ghez et al. [3]. Reproduced by permission of the AAS)



Numéro de l'étoile	Période T (an)	Demi-grand axe a ( $10^{14}$ m)
2	14.53	1.37
16	36	2.51
19	37.3	2.57

Loi de Kepler  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

$\rightarrow M = 3.7 \times 10^6 M_{\odot}$

C'est le trou noir supermassif Sagittarius A\*



# LP00 – Titre

16 mai 2020

Laura Guislain & Pascal Wang

**Niveau :**

**Commentaires du jury**

**Bibliographie**

↗ *Le nom du livre, l'auteur*<sup>1</sup>

→ Expliciter si besoin l'intérêt du livre dans la leçon et pour quelles parties il est utile.

**Prérequis**

➤ prérequis

**Expériences**

☞ Biréfringence du quartz

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Masse et interaction gravitationnelle</b>	<b>3</b>
1.1	Approche historique de la force gravitationnelle . . . . .	3
1.2	Au delà des trajectoires circulaires, approche moderne . . . . .	4
1.3	Relation masse/mouvement . . . . .	4
1.4	Structure du champ gravitationnel par analogie électrostatique . . . . .	5
1.5	Analogie et différences avec les lois de l'électrostatique . . . . .	6
1.6	Application à un système à symétrie sphérique . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Application à l'astrophysique</b>	<b>7</b>
2.1	Les galaxies spirales . . . . .	7
2.2	Structure verticale d'une galaxie spirale . . . . .	7
2.3	Structure radiale - courbes de rotation . . . . .	8
2.4	Matière noire et sphère isotherme . . . . .	9

## Jury

## Choix

## A faire

annales + correction + book + cours d'astro + bouquin vulagrization + wikipedia + images + zwicky

## Préparation

Questions : Cavendish, marées,

## Prérequis

Problème à deux corps gravitationnel, lois de l'électrostatique, parsec, année-lumière, équilibre hydrostatique, pression cinétique, distribution de Maxwell-Boltzmann

## Biblio

- Keeton, Principles of Astrophysics
- Three ways to obtain flat rotation curves : A problem in undergraduate computational physics M. E. Bacon, and Amber Sharrar
- Notes de cours astro M1
- Astronomie, astrophysique : Acker, Agnès
- Astronomie, astrophysique, Marc Seguin, Benoit Villeneuve
- BFR méca, Mécanique
- Berkeley, Brasselet, Pérez, Grécias

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe\\_de\\_rotation\\_des\\_galaxies](https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_de_rotation_des_galaxies)

[http://www.ifa.hawaii.edu/~cowie/ast626\\_dir/gal\\_lec17.pdf](http://www.ifa.hawaii.edu/~cowie/ast626_dir/gal_lec17.pdf)

<https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Sept16/Sofue/Sofue4.html>

<https://arxiv.org/ftp/astro-ph/papers/0703/0703430.pdf>

[https://www.ifa.hawaii.edu/~barnes/ast626\\_05/dmdg.pdf](https://www.ifa.hawaii.edu/~barnes/ast626_05/dmdg.pdf)

[https://people.lam.fr/buat.veronique/SPACE\\_poly1\\_M1.pdf](https://people.lam.fr/buat.veronique/SPACE_poly1_M1.pdf)

Messages : gravité est accélération : ça fait bouger des objets

Montrer des photos, images, simulations de galaxie

Zwicky, observations c'est difficile, il faut mettre des modèles.

Situer NGC dans le ciel

Le pb a deux corps est modifié si la distribution n'est pas sphérique

MOND a des pbs avec les ondes gravitationnelles

## Prérequis

Lois de Kepler.

## Introduction

**Interaction fondamentale** L'interaction gravitationnelle est l'une des quatre interactions fondamentales, avec l'interaction EM, faible et forte. C'est l'interaction physique responsable de l'attraction des corps massifs. Elle se manifeste notamment par l'attraction terrestre qui nous retient au sol, l'orbite des planètes autour du Soleil, les marées, *la sphéricité de la plupart des corps célestes*.

**Echelles** À l'échelle microscopique, la gravitation est la plus faible des quatre interactions fondamentales de la physique ; elle devient dominante au fur et à mesure que l'échelle de grandeur augmente. Avec la force électromagnétique, elle est l'une des deux interactions à agir au-delà de la dimension du noyau atomique. De plus, comme elle est toujours attractive, elle domine sur les forces électromagnétiques qui l'emportent à plus courte portée, étant tantôt attractives, tantôt répulsives. D'une manière plus générale, la structure à grande échelle de l'Univers est déterminée par la gravitation. [todo]ODG

**Gravitation de Newton** La loi de la gravitation de Newton a été élaborée à la fin du XVIIe siècle.

**Cadre non relativiste** Aujourd'hui, une théorie plus moderne l'a remplacée : celle de la relativité générale d'Einstein. Cependant, la théorie de Newton reste valable dans un cadre non relativiste : vitesses faibles par rapport à celle de la lumière et masses de l'ordre de la masse solaire ou inférieures.

**Objectifs** On va suivre une approche historique pour voir comment la force de gravitation découle comme une nécessité des observations des scientifiques. On va ensuite aller au delà de la description en terme de forces, mais plutôt celle en terme de champ, en caractérisant le champ gravitationnel. Enfin, on va voir les implications de la gravitation à l'échelle astrophysique, notamment la structure des galaxies.

## 1 Masse et interaction gravitationnelle

### 1.1 Approche historique de la force gravitationnelle

↪ Weinberg, à projeter

#### Bref historique des observations

- Brumaghupta au VII : "La terre est ronde et tous les corps chutent vers le centre de la terre"
- Kepler au XVI : Il énonce les trois lois de Kepler : la loi des orbites *Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers*, la loi des aires et la loi des périodes qui stipule que pour tous les astres le rapport entre le demi grand axe de la trajectoire au cube avec le carré de la période est une constante du système solaire.
- Galilée au XVII : Tout corps en chute libre a la même vitesse, donc indépendante de la masse. C'est le principe d'équivalence (faible), vérifié jusqu'à  $10^{-11}$  aujourd'hui. *Le principe d'équivalence faible est le constat de l'égalité entre la masse inerte et la masse grave. Le principe d'équivalence fort d'Albert Einstein est l'équivalence locale entre la gravitation et une accélération.* Vidéo d'une chute libre dans une chambre à vide à 0.01 bar. 1:27 puis 2:51.
- Newton à la fin du XVII : Il énonce lui aussi ses trois lois, notamment le principe fondamental de la dynamique et le principe des actions réciproques.

**Construction d'une force gravitationnelle** Considérons deux corps, par exemple la Terre et le Soleil. D'après l'observation de Galilée et la seconde loi de Newton, la force doit nécessairement être proportionnelle à la masse de l'objet étudié  $F_{1 \rightarrow 2} \propto m_2$ . D'après la principe des actions réciproques de Newton, la force est donc également nécessairement proportionnelle à la masse de la Terre/l'autre objet  $F_{1 \rightarrow 2} \propto m_1 m_2$ .

Avec les observations de Brahmagupta, la force est radiale et entrante  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \propto -m_1 m_2 \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ . De la loi des périodes de Kepler, pour une trajectoire circulaire de rayon  $R$  et de période  $T$ , on a que  $R^3/T^2$  est une constante. Or l'accélération est en  $R/T^2$  et est égale à la force par la 2e loi de Newton et le principe d'équivalence et  $R^2 a = R^3/T^2 = cst$  constante. Donc nécessairement, la force est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux corps. Ainsi

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} u_{1 \rightarrow 2}$$

N'ayant observé aucun autre paramètre intervenant dans la force,  $\mathcal{G}$  est bien une constante, qu'on va appeler constante universelle de la gravitation **ODG**: valeur de  $G$ , mesurée à  $10^{-7}$  près. Force de la Terre sur humain, Soleil sur Terre, Terre sur Lune.

## 1.2 Au delà des trajectoires circulaires, approche moderne

**Position du problème** *Par simplicité, au lieu de se placer dans le référentiel barycentrique, on dit que le Soleil est fixe.* On veut retrouver la première loi de Kepler : les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers. On rappelle les invariants classiques : moment cinétique, impulsion, énergie.

**Résolution à l'aide du vecteur de Runge-Lenz** Préciser soigneusement le référentiel, le système... Aller jusqu'aux trajectoires coniques, discuter selon la valeur de  $e$ .

## 1.3 Relation masse/mouvement

**Le mouvement c'est la masse** On a retrouvé la force de gravitation avec l'observation de Kepler des orbites des planètes. Ainsi, masse  $\rightarrow$  mouvement. Inversement, en astrophysique, on ne peut mesurer des masses directement, on mesure des mouvements et on en déduit la masse.

**Masse du soleil** Avec  $T = 1\text{an}$ ,  $a = 1.510^{11}\text{m}$ , la loi de Kepler donne la masse du Soleil. **Donner l'ordre de grandeur.**

**Vitesse orbitale** Pour une trajectoire circulaire, la loi de Kepler donne la loi d'échelle  $v \propto M/\sqrt{r}$ . *Par exemple, avec la 3e loi de Kepler, en mesurant les orbites des étoiles au sein de la galaxie, on se rend compte que les orbites sont elliptiques avec un foyer commun. En connaissant leur mouvement et en utilisant la troisième loi de Kepler, on peut estimer la masse de l'objet correspondant, qui est de  $10^6$  masses solaires environ. C'est le trou noir supermassif au centre de la Voie Lactée. NB : pas besoin de RG au bout de quelques rayons de Schwarzschild  $R_s = 2GM/c^2$  **ODG:** 0.07 au  $\blacktriangle$  Keeton chap3.*

**Sagittarius A\* (Sgr A\*)** Beginning in the 1990s, powerful telescopes and clever observational techniques made it possible to resolve individual stars in the Galactic Center. **Montrer la figure 3.3** Dedicated observers discovered that the stars are moving, mapped the motions, and ultimately found that the orbits appear to be ellipses with Sgr A\* as a common focus (foyer). In other words, the stars orbiting Sgr A form a Keplerian system that is directly analogous to the planets orbiting the Sun. We can therefore use the motion  $\rightarrow$  mass principle to measure the mass of Sgr A\* Stars #2, 16, and 19 (labeled in Fig. 3.3) are particularly important because they have been tracked long enough to pass pericenter, so their orbits are well constrained. Fitting ellipses to the motion yields the following orbital parameters, **Montrer le tableau de valeurs et la valeur déduite.**

**Retour sur le problème à un corps** La masse de la Terre est petite comparée à celle du Soleil et la masse des étoiles est petite comparée à celle du trou noir, l'approximation du problème à un corps est justifiée.

**Bonus : Sgr A\* Could it be a single star?** There is no way for a single star to be anywhere near this massive. Could it be a cluster of stars? Again, no, such a massive and compact star cluster would “evaporate” due to stellar dynamical effects. **If it is a black hole, why haven't we used relativity?** Relativistic effects become important on scales comparable to the Schwarzschild radius of a black hole. For Sgr A\* this is  $R_s = 2GM/c^2 \sim 0.07\text{au}$ . (1 au = 150 millions de km).

**Résolution des télescopes** The Galactic Center is about 8kpc away, so the angle subtended by the black hole's event horizon is (using the small-angle approximation)  $10^{-5}$  arcsec. At optical wavelengths, the best resolution that can be achieved today is 0.05-0.1arcsec (with the Hubble Space Telescope, or adaptive optics from the ground). At radio wavelengths, it is possible to use an array of telescopes with a technique called interferometry to achieve a resolution of  $10^{-4}$  arcsec or better. While observations have not directly revealed the event horizon, they do seem to be on the verge of resolving some of the interesting structure in Sgr A\*.

**Un peu d'histoire : théorème de Gauss et ellipses** En fait Newton, avait proposé sa décroissance en  $1/r^2$  dès 1665-1666 en examinant la chute des corps sur Terre et la trajectoire de la Lune. Cependant, il n'a pas publié ce résultat pendant longtemps car il ne savait pas justifier pourquoi il a pu traiter la Terre comme si toute sa masse était concentrée à son centre. *On va le justifier dans la partie suivante.* Entre temps, d'autres scientifiques comme Hooke, Halley et Wren se sont rendus compte, avec l'argument précédent, que la loi de Kepler impliquait une décroissance en  $1/r^2$  pour des trajectoires circulaires. Mais on observe des trajectoires elliptiques! Ce n'est qu'en 1684 que Newton prouve qu'une force gravitationnelle en  $1/r^2$  était compatible avec toutes les lois empiriques de Kepler, y compris les trajectoires elliptiques.

**Bonus : mesure de G, expérience de Cavendish** The apparatus constructed by Cavendish was a torsion balance made of a 1.8 m wooden rod horizontally suspended from a wire, with two 51 mm diameter 0.73 kg lead spheres, one attached to each end. Two 300 mm 158 kg lead balls were located near the smaller balls, about 230 mm

away, and held in place with a separate suspension system. The experiment measured the faint gravitational attraction between the small balls and the larger ones. The two large balls were positioned on alternate sides of the horizontal wooden arm of the balance. Their mutual attraction to the small balls caused the arm to rotate, twisting the wire supporting the arm. The arm stopped rotating when it reached an angle where the twisting force of the wire balanced the combined gravitational force of attraction between the large and small lead spheres. By measuring the angle of the rod and knowing the twisting force (torque) of the wire for a given angle, Cavendish was able to determine the force between the pairs of masses. **ODG:** Force de  $\sim 10^{-7}$ N, la valeur de  $G$  a 1% de différence avec la valeur de CODATA, impressionnant !

↓ Question en suspens : pourquoi le champ gravitationnel créé par un astre est le même qu'un point matériel ?

## 1.4 Structure du champ gravitationnel par analogie électrostatique

**Motivation** On a vu en électrostatique que pour des distributions macroscopiques de charges, au lieu d'appliquer les lois de Coulomb aux  $10^{23}$ , on préfère raisonner en terme de champs. Ainsi, similairement, on veut caractériser l'interaction gravitationnelle en termes de champ, ce qui est nécessaire pour justifier l'intuition de Newton qui a ramené l'effet de la Terre à une masse ponctuelle de masse identique.

**Champ gravitationnel** Considérons deux masses ponctuelles de masse  $m_1$  et  $m_2$ . La force subie par la masse 2 est :  $\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = m_1 \vec{G}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ . Ainsi pour une masse ponctuelle, on peut définir le champ gravitationnel (dans le repère associé à la masse)  $\vec{G}(\vec{r}) = -\mathcal{G} \frac{m}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$ . En pratique on a une distribution volumique de masse, on va sommer les contributions de chaque volume infinitésimal situé en  $\vec{r}'$  de masse  $\rho(\vec{r}') d^3 r'$ . Ainsi le champ gravitationnel  $\vec{G}(\vec{r})$  s'exprime comme :

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\mathcal{G} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{V}} \rho(\vec{r}') d^3 r' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

**Théorème de Helmholtz-Hodge** [Wikipedia](#) Loin de la source, on retrouve un comportement asymptotique en  $1/r^2$  ainsi le champ s'annule à l'infini. On peut donc utiliser le théorème de HELMOLTZ-HODGE qui stipule que tout champ vectoriel décroissant en  $1/r^2$  à l'infini est entièrement déterminé par son rotationnel et sa divergence. On va donc caractériser le champ gravitationnel par son rotationnel et sa divergence. *Preuve : la décroissance garantit l'existence de la transformée de Fourier. Dans l'espace de Fourier, la divergence renseigne sur la composante parallèle à  $\vec{k}$  et le rotationnel renseigne sur la composante orthogonale à  $\vec{k}$*

**Rotationnel et potentiel gravitationnel** On a

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = -\mathcal{G} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{V}} \rho(\vec{r}') d^3 r' \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

On remarque que :  $\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$  et donc

$$\vec{G}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left( \mathcal{G} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{V}} \rho(\vec{r}') \frac{d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Où on a sorti le gradient de l'intégrale car la variable du gradient est  $\vec{r}$  et on intègre sur  $\vec{r}'$ . Ainsi Le champ gravitationnel est un gradient d'une fonction dont l'opposée sera appelée le potentiel gravitationnel. Or le rotationnel d'un gradient est nul, donc le champ gravitationnel est à rotationnel nul. Donc

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$$

Le champ gravitationnel est irrotationnel. Cela traduit que la force gravitationnelle est conservative. Cela se traduit aussi par l'existence d'un champ scalaire  $\Phi$  qu'on appellera potentiel gravitationnel, tel que  $\vec{G} = -\vec{\nabla} \Phi$ .

*Méthode alternative : on somme des rotationnels de champs de la forme  $f(r) \vec{e}_r$  (après un changement d'origine de  $\vec{r}'$  pour se centrer en le volume considéré, et une translation ne modifie pas le rotationnel) qui sont de rotationnels nuls. Donc  $\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$*

**Divergence et théorème de Gauss** Reprenons l'expression de  $\vec{G}$  précédente pour calculer sa divergence, on a :

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{G} = \mathcal{G} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{V}} \rho(\vec{r}') d^3 r' \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Or on admettra encore une fois le résultat mathématique :  $\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \Delta \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{G} &= -4\pi\mathcal{G} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{V}} \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' \\ &= -4\pi\mathcal{G}\rho(\vec{r})\end{aligned}$$

On a trouvé une formulation locale. On peut zapper la forme globale, la déduire par analogie dans la sous partie suivante pour gagner du temps. On peut aussi zapper l'équation de Poisson. On passe à une formulation globale avec en intégrant l'équation de la divergence sur une surface fermée, et en utilisant le théorème de GREEN-OSTROGRADSKY, on trouve le théorème de GAUSS gravitationnel :

$$\iint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$$

On récapitule le rotationnel et la divergence trouvés

**Equation de Poisson** Et on peut également utiliser la définition du potentiel dans la formule de la divergence et on trouve l'équation de Poisson :

$$\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}\rho$$

**Conclusion** On a donc caractérisé de manière équivalente les lois de la gravitation en calculant le rotationnel et la divergence du champ. Physiquement, le rotationnel nul donne que la force gravitationnelle est conservative et la divergence relie le champ gravitationnel à la source qui le crée *i.e.* la densité de masse.

## 1.5 Analogie et différences avec les lois de l'électrostatique

**Analogie avec l'électrostatique** Comme on vient de le voir, la démarche et les formules sont analogues aux lois de l'électrostatique :

	Electrostatique	Gravitation
Charge du champ	$q$	$m$
Champ	$\vec{E}$	$\vec{G}$
Force	$q\vec{E}$	$m\vec{G}$
Constante	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9 \times 10^9 \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$	$-\mathcal{G} = -6,67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Relation champ - potentiel	$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$	$\vec{G} = -\vec{\nabla}\Phi$
Equations locales	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$	$\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\rho$
Théorème de Gauss	$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{int}/\epsilon_0$	$\iint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$
Equation de Poisson	$\Delta V = -\rho/\epsilon_0$	$\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}\rho$

**Limites de l'analogie, différences** Premièrement, les relations de structure du champ gravitationnel sont valables lorsque les masses se déplacent *i.e.* en régime dynamique *sauf relativité restreinte et relativité générale* ?. Alors que les lois de l'électrostatique ne sont plus valables dès que les charges sont en mouvement. Deuxièmement, il y a un effet de signe. En gravitation, le charge du champ (la masse) est toujours positives, tandis que les charges électriques peuvent être négatives. La force résultante peut donc être attractive ou répulsive ce qui n'est pas le cas de la gravitation qui est toujours attractive.

## 1.6 Application à un système à symétrie sphérique

**Champ gravitationnel d'un astre sphérique** *Bien poser les notations, utiliser les symétries et invariances... On suppose le profil homogène pour avoir une expression explicite à l'intérieur. On trace le profil en remarquant la continuité. Puis on généralise à un profil non homogène, ce qui ne change pas le champ extérieur.* Conclusion : c'est bien la symétrie sphérique qui rend correct l'argument initial de Newton. Il n'y a pas besoin de supposer la densité de la Terre homogène.

**Décroissance képlérienne**

**Mer de Lindenbrok** *Là il faut supposer la répartition homogène...*

## 2 Application à l'astrophysique

### 2.1 Les galaxies spirales

**Objectif** (i) montrer l'utilité de la description en termes de champ pour étudier un système à symétrie non sphérique. Comme la gravitation est prépondérante à l'échelle astrophysique, on choisit d'étudier les galaxies. (ii) illustrer le principe mouvement-masse, derrière l'hypothèse de la matière noire.

**Galaxie spirale et ordres de grandeur** Une galaxie spirale est un type de galaxie qui adopte la forme aplatie d'un disque, avec un renflement central sphérique lumineux appelé le bulbe. La Voie Lactée est une galaxie spirale. **ODG: On donne des ordres de grandeur sur diaporama.** La dimension verticale est beaucoup plus petite que la dimension radiale.

**Bonus : Trous noirs supermassifs** Les télescopes modernes ont révélé que beaucoup de galaxies spirales hébergent des trous noirs supermassifs en leur centre, dont les masses peuvent excéder plusieurs centaines de millions de masses solaires. **ODG: taille** entre 20 et 60 kiloparsecs, (1 parsec = 3.26 années lumières  $\sim 10^{16}$ m, grosso modo, 1 pc est la distance moyenne entre étoiles), **masse** de  $10^{10}$  à  $10^{11}$  masses solaires.

**Structure orthoradiale** On observe des bras spiraux mais on ne va pas s'y intéresser, on suppose la galaxie à symétrie orthoradiale :  $\rho(r, z)$ .

**Structure radiale - courbe de lumière** On ignore le bulbe. Vue de face, la luminosité d'une galaxie spirale n'est pas égale sur toute sa surface : elle est maximale au centre et décroît au fur et à mesure qu'on s'en éloigne. En ignorant les bras spiraux et en moyennant dans la dimension verticale, on mesure une décroissance approximativement exponentielle

$$\ell = \ell_0 e^{-(r/R_v)}$$

où  $\ell_0$  représente la luminosité par unité de surface au centre de la galaxie et  $R_v$  le rayon caractéristique de la matière visible du disque de la galaxie. *La luminosité est la quantité totale d'énergie émise par unité de temps, en  $W$ , (le flux énergétique), par une étoile, une galaxie, ou un objet astronomique quelconque.* On appelle la courbe correspondant à cette équation courbe de lumière. **ODG:  $\ell_0 \sim 10^{-4} W/m^2$ ,  $R_v \sim 10^4$  a.l.**

**Structure radiale - équilibre gravité-accélération** La gravité tend à rapprocher les étoiles. Elle est compensée par l'accélération centripète des étoiles, dont on assimile les orbites à des trajectoires circulaires. Ainsi, dans le référentielle d'une seule étoile, l'équilibre radiale est le résultat de l'équilibre entre attraction gravitationnelle et force centrifuge. [Dessin de l'équilibre.](#)

**Structure verticale** La dimension verticale est beaucoup plus petite que la dimension radiale.

↓ *On va examiner la structure verticale*

### 2.2 Structure verticale d'une galaxie spirale

**Modèle 1D** Comme la dimension verticale est beaucoup plus petite que la dimension radiale, on adopte un modèle localement 1D. Les dimensions radiales et verticales sont découplées.  $d/dz \gg d/dr$  comme en mécanique des fluides.

**Approche en terme de champs** Comme une galaxie un nombre statistique d'étoiles, de l'ordre de  $10^{11}$ , on va utiliser une approche de champs continus pour étudier sa structure.

**Equilibre vertical et modèle cinétique** La gravité tend à aplatir la galaxie. Pourtant, la galaxie a une extension non-nulle. Qu'est-ce qui détermine son épaisseur ? C'est la pression cinétique due à la dispersion des vitesses. Les étoiles ont une certaine dispersion de vitesses. Vu leur nombre, on adopte un modèle cinétique, analogue au gaz parfait. Le gaz d'étoiles a une pression cinétique  $P = \rho \langle v_z^2 \rangle$ . [On fait un dessin des étoiles qui s'agitent verticalement.](#) Comme la densité est plus grande au centre, le gradient de pression équilibre la gravité : c'est l'équilibre hydrostatique.

#### Hypothèses

- on ignore les bras spiraux

- rapport masse/lumière constant *Cette hypothèse est justifiée par (i) le fait que la couleur dominante de la lumière d'une galaxie est à peu près constante sur toute sa surface, ce qui implique que les étoiles de divers types spectraux se retrouvent à peu près dans les mêmes proportions partout (ii) in agreement with measurements made in the local neighborhood of our own gal-axy, the Milky Way*
- modèle cinétique
- $\langle v_z^2 \rangle$  constant sur la verticale, en accord avec les observations.

**Equations** On va utiliser l'équation de Poisson + l'équilibre hydrostatique.

**Calcul** cf. feuille.

**Comparaison avec les observations** Hauteur constante et décroissance exponentielle de la densité et de la dispersion des vitesses avec  $r$  : c'est en accord !

**Conclusion pour la suite** On a réussi à caractériser la structure verticale avec les outils continus comme l'équation de Poisson, ce qu'on aurait pas pu faire en appliquant le PFD à chaque étoile. On néglige  $h$ , on fait l'approximation du disque infiniment fin. Le mouvement des étoiles est confiné dans un plan, c'est moins désordonné que les galaxies sphériques. L'intérêt c'est qu'on peut mesurer le mouvement des étoiles et comparer avec la théorie de la gravitation.

**Bonus : la voie Lactée et ordres de grandeurs** the Milky Way seems to have two disk components . The "thin" disk has  $h_z \sim 300$  pc and  $v_z \sim 18$  km/s, and it tends to contain younger stars. The "thick" disk has  $h_z \sim 900$  pc and  $v_z \sim 35$  km/s, and it tends to contain older stars. The disk scale radius is  $h_R \sim 3.5$  kpc so even the "thick" disk is still thin in comparison with its radial extent.

**Bonus : épaisseur du disque, processus** Disk thickness can be created by a variety of mechanisms. When a star encounters an object such as another star, a gas cloud, or a spiral arm, the gravitational interaction can give the star a "kick" in the vertical direction. Also, if a star migrates out from the center of the galaxy, any vertical motion can be amplified. Finally, an external event such as a small galaxy falling into the Milky Way can generate vertical motion.

**Bonus : mouvement en épicycle, bras spiraux, winding problem** The problem is that differential rotation causes spirals to wind up way too fast to survive for billions of years. This is known as the winding problem, and it means the simplest imaginable explanation of spiral arms cannot be correct.

**Bonus : mesure de distances** Pour les objets les plus proches, on peut utiliser la parallaxe. Pour des objets plus lointains, on peut utiliser les céphéides (relation luminosité-période connue, "standard candle"). Pour encore plus loin, on utilise le redshift de l'expansion de l'univers  $v = Hd$  (calibré par les céphéides).

**Bonus : la parallaxe** La distance des étoiles les plus proches peut être aisément obtenue par la méthode de la parallaxe, et en particulier la parallaxe annuelle (la parallaxe diurne n'étant pas assez sensible pour ce cas). Le principe est de mesurer, par rapport aux étoiles lointaines, la déviation des étoiles les plus proches à 6 mois d'intervalle, alors que la Terre se sera déplacée de 2 fois 150 millions de kilomètres (2 fois la distance Terre-Soleil). **ODG:** la résolution angulaire actuelle permet d'aller jusqu'à 100 pc.

**Bonus : Les céphéides** Les céphéides jouent un rôle très important comme étalons des échelles de distance dans l'Univers grâce à la relation période-luminosité qui les caractérise ("standard candle") : plus une céphéide est lumineuse plus sa période de variation d'éclat est longue. Dès lors que l'on connaît la période d'une céphéide, aisément mesurable, la relation période-luminosité permet de déterminer l'éclat intrinsèque de cette étoile. Par une simple comparaison avec son éclat apparent, on en déduit sa distance, et donc celle de la galaxie qui l'abrite.

↓ *La structure verticale est en accord avec les observations. Cependant, si on examine la structure radiale, une constatation suprenante apparaît.*

## 2.3 Structure radiale - courbes de rotation

**Galaxie spirale NGC 3198** [Photo] NGC 3198 est une galaxie spirale barrée située dans la constellation de la Grande Ourse à environ 9.4 Mpc *mesuré par redshift cosmologique*. La lumière émise est majoritairement comprise dans un disque de rayon 11.4 kpc. On la choisit par simplicité car elle n'a pas de renflement prononcé.

**Courbe de rotation** *In a spheroid, the star orbits have random orientations, so stars in any small region of the galaxy are moving every which way. Since there is no coherent rotation to measure, we plot the distribution of velocities instead. The distribution is usually close to Gaussian.*

**Mesure d'une courbe de rotation** Une difficulté des observations astrophysiques est que le ciel est une sphère 2D alors que les structures sont 3D. Par exemple, par effet Doppler et observation de la transition à 21 cm de l'hydrogène, on obtient typiquement les vitesses radiales, dans l'axe de visée (*l'effet Doppler transverse est petit si les vitesses sont non-relativistes*). If a disk is inclined by angle  $i$  then what we measure with the Doppler effect is  $v_{obs} = v_{int} \sin i$ , where  $v_{int}$  is the intrinsic speed. We can estimate the inclination because a circular disk will appear in projection as an ellipse whose axis ratio is  $\cos i$ . Thus, it is usually feasible to correct for inclination and recover the intrinsic rotation curve of a disk galaxy. Zwicky, tricky.

### Hypothèses

- Les trajectoires sont circulaires :  $v^2/R = g$
- Le rapport masse/lumière est constant : Une fois que l'on a décrit la façon dont la luminosité de la galaxie décroît lorsqu'on s'éloigne du centre, on fait l'hypothèse que la densité de matière du disque décroît de la même façon que la lumière. **ODG:** en moyenne, il faut  $4M_{\odot}$  pour générer l'équivalent de  $1L_{\odot}$ . *la majorité des étoiles sont de série principale de type spectral K et M.* Ainsi,  $\rho(r) \sim r$

**Courbe de rotation théorique pour un disque seul** Pour calculer  $g$ , il faudrait résoudre l'équation de Poisson 3D avec conditions limites pour le disque. Le résultat est compliqué, on va faire une approche numérique. Le champ gravitationnel croît avec le rayon à l'intérieur du disque (comme dans le cas de la sphère) et atteint un maximum à  $r_{max} = 2.15R_0$  puis elle est décroissante et képlérienne à l'infini  $v \propto M/\sqrt{R}$ . *En fait, une étoile peut avoir un mouvement harmonique vertical ou un mouvement harmonique radial, ce qui donne un épicycle !*

**Comparaison avec l'observation** Real rotation curves may be more complicated because disks need not be perfectly exponential, and stellar bulge or gaseous components can also affect the motion. Even so, as a general rule rotation curves should decrease in the outer part of disks if spiral galaxies contain only the stars and gas we see. It therefore came as a surprise in the 1970s when Vera Rubin and others began to discover that observed rotation curves do not match predictions. Today we see that some rotation curve fall but not as much as expected, others rise all the way to the largest radii at which they are measured, and many remain approximately constant over a wide range of radii. The shapes have been seen so many times that the term flat rotation curves has entered the lexicon of astronomy. For NGC 3198, the data in Table I and Fig. 2 go out to almost 30 kpc. In contrast, the luminous matter of the galaxy extends to only 10-11 kpc, or to a little past the peak in the circular velocity curve. If all the matters were luminous, we would expect the rotation curve to start decreasing beyond the luminous extent of the galaxy? and by assumption, beyond the baryonic mass distribution also?. This behavior is commonly referred to as a Keplerian decrease, and for NGC 3198, should start around 10–11 kpc. Such is not the case as can be seen in Fig. 2.

**Bonus : solid body rotation, differential rotation** We have been focusing on the physical speed of the stars, but let's briefly consider the angular speed! At small radii, where the rotation curve rises linearly, in other words, stars at different radii all take the same amount of time to go around. This is known as solid body rotation because it describes the rotation of an object (such as a compact disk) in which all the atoms are connected to one another. By contrast, in the flat part of the rotation curve, the angular velocity is not constant. This corresponds to differential rotation, and it is generic for spiral galaxies in the sense that it occurs even if the rotation curve is not perfectly flat. Differential rotation will be crucial when we study spiral structure (winding problem).

## 2.4 Matière noire et sphère isotherme

**Matière noire : le mouvement implique la masse** What is going on? On utilise :

masse  $\leftrightarrow$  mouvement. Si la vitesse de rotation est plus élevée, il doit y avoir plus de masse.

If the observed rotation speed is higher than expected, then the gravitational force must be stronger than expected, so there must be more mass. Whatever this mass is, we seem not to detect any light from it. That, in a nutshell, is the original argument for dark matter. *Evidence for "missing mass" appeared as early as the 1930s, from an analysis of motions in the Coma cluster of galaxies by Fritz Zwicky and an analysis of vertical motions of stars in the Milky Way by Jan Oort. Those analyses were hindered, especially by poor knowledge of mass-to-light ratios, but notice that they too were based on the motion  $\rightarrow$  mass principle. The best evidence for the existence of dark matter, other than the flat rotation curves of many spiral galaxies, comes from observations of gravitational lensing by the two colliding galaxy clusters that make up the Bullet cluster. Measurements of gravitational lensing indicate that the center of mass*

of the Bullet cluster occurs at a position that does not coincide with the position of the center of mass of the baryonic matter as determined from the distribution of x-ray producing matter

**Approche** By the principle of superposition, densities and masses just add. Then gravitational fields add.  $M_{tot} = M_{disk} + M_{darkmatter}$  To quantify the dark matter component, people have taken two basic approaches. One is to look for the simplest model that can reproduce the data. The softened isothermal sphere fits the bill. By increasing the core radius, we can reduce the density of dark matter at small radii and let stars dominate the mass there. Then we can adjust the vc parameter for the halo component to keep the circular velocity high at large radii (where the contributions from stars and gas are falling off). Whether or not this model has a deep physical motivation, it seems to be successful in fitting the data. *The second approach is to try to predict the properties of dark matter halos and compare those predictions with observations. What do we know about dark matter? It must be non-relativistic; otherwise it would move too fast to collect around galaxies. As a starting point, we assume that dark matter feels gravity but is not affected by any other forces. From studies of “nucleosynthesis” in the early universe, we know that most of the dark matter cannot be composed of protons, neutrons, and electrons. It must be something exotic-probably some other kind of fundamental particle. These are the tenets of the Cold Dark Matter (CDM) paradigm, which has become the foundation for modern cosmology. “Cold” refers to the fact that the particles are slow compared with the speed of light.*

**Calcul du champ gravitationnel de la sphère isotherme** Modèle de la sphère isotherme pour la matière noire, pour arriver à une distribution de masse volumique en  $1/r^2$ . On vérifie que c'est le bon exposant pour que la vitesse orbitale atteigne un plateau en  $r$ .

**Fit avec les observations** On fait un fit numérique en montrant les contributions disques/matière noire. *It is believed that dark matter constitutes roughly 23% of the matter-energy content of the universe, with 73% dark energy, and only 4% of baryonic matter.*

**Discussion, difficulté des observations** On peut prendre d'autres profils de densité. For ESO 287-G13, an isothermal model is formally better than an Navarro-Frenk-White (NFW) model, although the main differences are at small radii where the motion may be complicated. For other galaxies, NFW fits seem to be favored. The challenge here is dealing with devils that lurk in the details for both observations and interpretation. With the measurements, we must worry about systematic effects such as the placement of the slit used to measure the spectrum, and blurring from the atmosphere. With the analysis, we usually assume the dark matter halo is spherical, the disk is thin, and the orbits are perfectly circular; while those assumptions may seem reasonable, they might not be strictly true, and relaxing them could affect the conclusions. The last point to recall is that there are uncertainties in the rotation curve data themselves, the inclination, and the mass-to-light ratio. All together, these effects can permit a range of successful models, and it is difficult to say for certain whether rotation curves “prefer” cusps (NFW) or cores.

## Conclusion

**Ouverture : MOND** Throughout the preceding analysis we relied on Newton's laws of gravity and motion to connect rotation curves with the underlying mass distribution. When we saw a discrepancy, we imagined that we have the right laws of physics but the wrong ideas about how mass is distributed. That approach seems reasonable because Newton's laws (and Einstein's generalizations of them) have been well tested. However, most of the tests have taken place on Earth and in the Solar System, where the accelerations are much larger than the accelerations of stars in galaxies :

Situation	Acceleration ( $\text{ms}^{-2}$ )
Surface of Earth	9.8
Moon orbiting Earth	0.003
Earth orbiting Sun	0.006
Sun orbiting Galaxy	$2 \times 10^{-10}$

(1)

In the 1980s, Mordehai Milgrom asked : What if Newton's laws break down at low accelerations? After all, we already know they fail at high speeds (for relativity) or short distances (for quantum mechanics). Milgrom proposed to modify Newton's second law when the acceleration is smaller than some value  $a_0 \sim 10^{-10} \text{m/s}^2$  :

$$F = \begin{cases} ma & (a \gg a_0) \\ m \frac{a^2}{a_0} & (a \ll a_0) \end{cases} \quad (2)$$

This idea is known as Modified Newtonian Dynamics (MOND) because what changes is not the force of gravity but rather a particle's response to the force. In a series of papers, Milgrom argued that applying MOND below  $a_0 \sim 10^{-10} \text{m/s}^2$ . could explain galaxy rotation curves as well as an observed correlation between the rotation speeds and luminosities of spiral galaxies. Most astronomers prefer the idea of dark matter to that of modified dynamics

or gravity. While MOND can successfully explain galaxy dynamics, it faces more trouble with galaxy clusters (most famously, the Bullet Cluster) and the universe as a whole. Even MOND requires some amount of dark matter to explain these systems. Supporters of MOND suggest the additional mass could be provided by massive neutrinos, but it remains to be seen whether this hypothesis works out in detail. In my view, strong evidence supports the conventional theory of dark matter. Still, there is value in exploring alternatives because scientific disputes like dark matter versus MOND are ultimately settled by developing different models and testing them with observations.

## Compléments/Questions

- Machine d'Atwood? Deux masses et une poulie. On peut visualiser la "chute libre" et le PFD plus facilement car l'accélération est diminuée par rapport à  $g$ , d'un facteur  $m_1 - m_2 / (m_1 + m_2)$ .

## Commentaires du jury

2017 : Les applications ne doivent **pas nécessairement se limiter à la gravitation terrestre**. 2016 : Les analogies entre l'électromagnétisme et la gravitation classique présentent des **limites** qu'il est pertinent de souligner. 2015 : Deux nouvelles leçons ont été ajoutées [dont] une leçon intitulée « Gravitation », pour laquelle les candidats s'attacheront, dans le cadre de la physique classique, à développer quelques caractéristiques de l'interaction gravitationnelle.

## Passage

Intro. 1 des 4 interactions fondamentales. Tout le monde y est soumis sur Terre. 1) Approche historique (wiki : histoire de la gravitation). Brumaghupta, Kepler(3 lois), Galilée (chute libre indépendante de la masse), Newton (3 lois, Hooke le pauvre). 2) Construction de la force de gravitation. Galilée+PFD :  $F \propto m_1$ . 3e Loi de Newton  $F \propto m_1 m_2$ . 3e loi de Kepler+analyse dimensionnelle  $F \propto acc \propto 1/r^2$ . Force gravitationnelle up to a constant :  $\mathcal{G}$ . Mesure de  $\mathcal{G}$  avec le pendule de Cavendish. 3) masse inertielle et charge de champ. Principe d'équivalence. II) Champ gravitationnel. 1) pour une masse ponctuelle, pour une distribution de masse continue. 2) calcul de  $\text{rot } \mathbf{G}$ ,  $\text{div } \mathbf{G}$  et unicité avec le théorème de Helmholtz-Hodge. Théorème de Gauss. 3) Analogie électrostatique (à faire sur une slide). Limites : masse est positive et pas toujours la charge. Pas d'analogie en électrodynamique. Différence d'ordre de grandeur des constantes. 4) mer de Lindenbrok.

## Questions

B : Trouver l'équation de l'ellipse, Applications envisageables? Dans la démonstration de l'expression de la force gravitationnelle. Qu'est-ce que la relativité générale? Qu'est-ce qu'une onde gravitationnelle? Propagation d'une perturbation de l'espace-temps. Qu'est-ce qu'une onde? Propagation d'une déformation dans un milieu. Interprétation de  $r \text{rot } \vec{G} = \vec{0}$ ?  $\mathbf{G}$  dérive d'un potentiel, c'est donc une force conservative. Limites d'un modèle de densité linéaire? Conditions pour négliger les variations de densité? Avoir une petite taille d'objet par rapport aux variations. Qu'est-ce qu'une force centrale? Etapes de la démonstration de la loi de Kepler, potentiel effectif.

## Compléments

Points de Lagrange. Théorème de Bertrand. Balance de Eotvos. Système à deux points, système auto-gravitant.