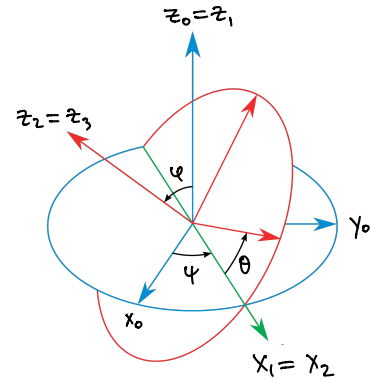
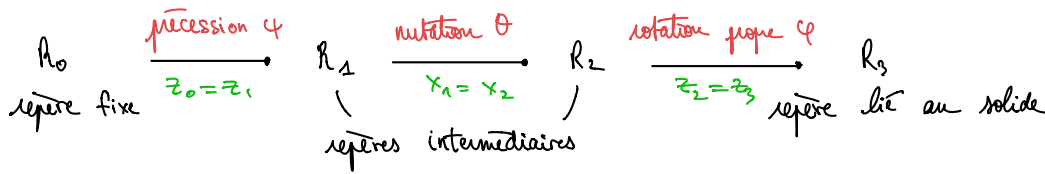


I 1.



vitesse angulaire : $\vec{\Omega}_{S/R} = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\varphi} \vec{z}_2$ par addition des vitesses de rotation

$$\vec{e}_j = \cos \theta \vec{j}_z + \sin \theta \vec{y}_z \quad \rightarrow$$

$$\vec{\Omega}^{(R_2)}_{\varphi=0} = \begin{cases} \dot{\theta} \vec{x}_2 \\ \dot{\psi} \sin \theta \vec{y}_2 \\ (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \vec{z}_2 \end{cases}$$

2.

Equations d'Euler

On applique le TMC au solide S dans R galiléen au point O fixe

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}\bigg|_R = \vec{M}_O$$

$$\vec{L}_{O/R} = [\mathcal{I}]_O \vec{\omega}_{S/R} \quad \text{où} \quad [\mathcal{I}]_O = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}_{R'} \quad \text{simple}$$

$$\vec{\omega}_{S/R} = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\varphi} \vec{z}_2 = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}_{R'} \quad \text{compliqué}$$

On écrit cette égalité vectorielle dans le repère principal d'inertie (lié au solide) R' avec

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}\bigg|_R = \frac{d\vec{L}_O}{dt}\bigg|_{R'} + \vec{\omega}_{S/R} \wedge \vec{L}_O = \vec{M}_O$$

$$\text{or} \quad \vec{L}_{O/R} = [\mathcal{I}]_O \vec{\omega}_{S/R} \quad \text{où} \quad [\mathcal{I}]_O = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}_{R'} \quad \text{simple}$$

$$\vec{\omega}_{S/R} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}_{R'} \quad \text{compliqué}$$

donc les composantes projetées dans R' donnent

$$\begin{bmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{bmatrix}_{R'} + \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}_{R'} \times \begin{bmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{bmatrix}_{R'} = \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{bmatrix}_{R'}$$

Pour un solide S ayant une symétrie de révolution autour de $\vec{e}_3$,

l'approximation gyroscopique est vérifiée lorsque

$$\vec{\omega}_{S/R} \simeq \|\omega_{S/R}\| \cdot \vec{e}_3$$

axe de sym. de révolution de S

ie lorsque la vitesse de rotation autour de son axe de révolution est très grande devant toutes les autres vitesses de rotation ie

$$\begin{aligned} |\dot{\varphi}| &\gg |\dot{\theta}| \\ |\dot{\varphi}| &\gg |\dot{\psi}| \end{aligned}$$

en angles d'Euler

$$\vec{L}_0 = [\mathbf{I}]_0 \vec{\omega}_{S/R} = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = I_3 \dot{\varphi} \vec{e}_3$$

3. TRC au point O dans R

$$\left(\frac{d\vec{L}_0}{dt} \right)_R = \vec{OG} \times m\vec{g} \simeq \frac{mgl}{L_0} \vec{L}_0 \times \frac{\vec{g}}{g} \rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}_0 \quad \text{ou} \quad \vec{\Omega} = -\frac{mgl}{L_0} \frac{\vec{g}}{g}$$

vitesse de précession

équation du mouvement

Propriétés

$$(i) \left(\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}_0 \right) \cdot \vec{L}_0 \rightarrow$$

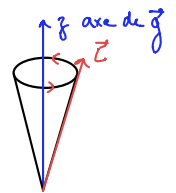
$$(ii) \left(\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}_0 \right) \cdot \frac{\vec{g}}{g} \rightarrow$$

direction de $\vec{\Omega}$

$\|\vec{L}_0\|$ conserve

L_z conserve

$\vec{L}$ précesse autour de $\vec{\Omega}$
à vitesse $\vec{\Omega}$



Orbites de précision :

$$\vec{L}_0 = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} \leftarrow \text{conservé}$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_x &= -\Omega L_y \\ \dot{L}_y &= +\Omega L_x \end{aligned}$$

$$\dot{z} = i\Omega z \rightarrow z(t) = e^{i\Omega t} z_0$$

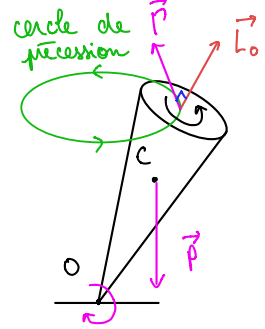
mouvement de rotation à vitesse Ω

Vérification

$$\text{AN: } \Omega = \frac{mgl}{I_0 \dot{\phi}}$$

vs

$$\dot{\phi}$$



Gyroscope

Solide de révolution tournant autour de son axe à très grande vitesse et suspendu parfaitement par son centre de masse.

dans R galiléen :

$$\left. \frac{d\vec{L}_G}{dt} \right|_R = 0$$

gyroscope

car le moment du poids en G est nul
la liaison est idéale

Couple gyroscopique

Lorsqu'on essaie de changer l'axe de rotation Δ du gyroscope, le gyroscope exerce un couple :

$$\left. \frac{d\vec{L}_G}{dt} \right|_R = \vec{M}_{G, \text{ext} \rightarrow \text{gyro}} = -\vec{M}_{G, \text{gyro} \rightarrow \text{ext}}$$

$$= \left. \frac{d\vec{L}_G}{dt} \right|_{\Delta} + \vec{\omega}_{\Delta/R} \times \vec{L}_G = \vec{\omega}_{\Delta/R} \times \vec{L}_G$$

0 car $\vec{L}_G \parallel \Delta$ dans l'approx. gyroscopique

$$\vec{M}_{G, \text{gyro} \rightarrow \text{ext}} = \vec{L}_G \times \vec{\omega}_{\Delta/R}$$

Application : couple exercé par les pales d'un avion qui fait un virage
expérience de la roue sur chaise tournante

Applications

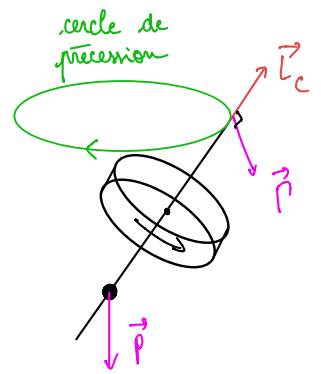
La stabilité des gyroscopes due à leur vitesse de rotation donne une direction $\vec{L}_0$ stable

l'axe du gyroscope est fixe dans R galiléen, par rapport aux étoiles lointaines.

↳ application au repérage spatial dans un véhicule

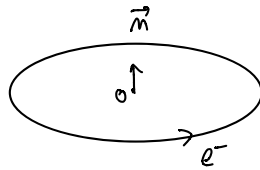
↳ sur Terre, la rotation apparente de l'axe Δ du gyro est de $\vec{\omega}_{\Delta/R_T} = \vec{\omega}_{R_C/R_T} = -\vec{\Omega}$
à cause des frottements, Δ s'aligne avec $\vec{\Omega}$
↳ gyrocompas de Foucault.

2.



III)

1.



$$\vec{M} = I \cdot \vec{\omega} \\ = \frac{-e}{T} \cdot \pi R^2 \vec{m}$$

$$v = R\omega \rightarrow T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$\vec{M} = \frac{-e}{2m_e} \cdot \underbrace{m_e v R}_{\vec{L}} \vec{m} = \gamma \vec{L}$$

2.

TMC en 0
dans $\vec{B} = B_0 \vec{u}_y$ uniforme

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \times \vec{B}_0 \\ = \gamma \vec{L} \times \vec{B}_0 \\ = \underbrace{-\gamma \vec{B}_0}_{\vec{\Omega}} \times \vec{L}$$

$$\vec{\Omega} = -\gamma \vec{B}_0$$

ODG: (Kery):

$$B_0 = 7T$$

$$\gamma \sim 300 \text{ MHz}$$

(radio)

3.

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{R \text{ tournant}} + \vec{\omega}_R \times \vec{L}$$

|| TMC $\vec{\omega} \vec{\omega}$

$$-\gamma (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \times \vec{L}$$

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{R \text{ tournant}} = (\underbrace{\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1}_{\vec{\delta\omega}} - \vec{\omega}) \times \vec{L}$$

