

I.

1.

### Résultats

$L = 1.487 \text{ m}$   
 $V = 7.069 \text{ m}$

décalage relatif de  
0.23 de frange  
moyenné  
sur 19 observations

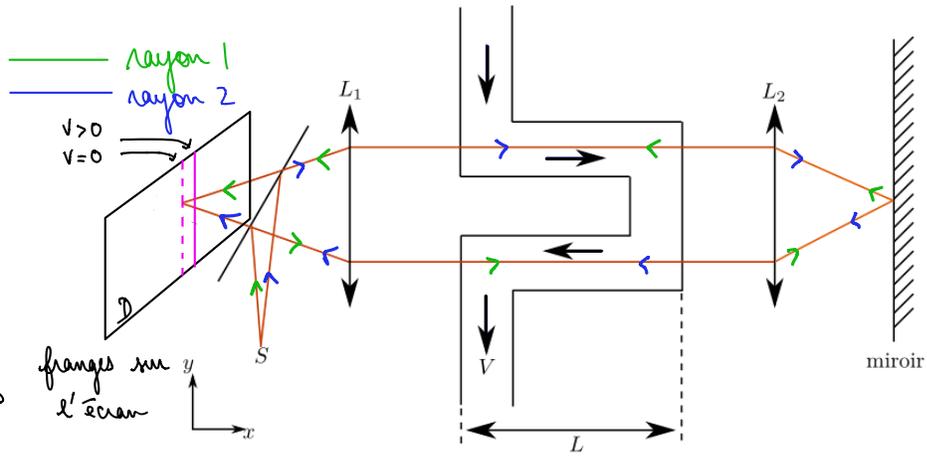
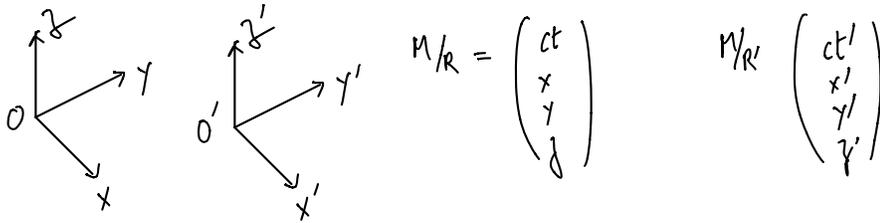


FIGURE 1 – Principe de l'expérience de Fizeau. L'eau circule à la vitesse  $V$  relativement au référentiel du laboratoire. Les faisces aux sont émis par une source  $S$ , séparés par un miroir semi-réfléchissant puis arrivent au détecteur  $D$  après un aller-retour à travers les deux bras du circuit hydraulique.

3.



temps et dans l'espace : il peut s'agir de l'émission d'une particule ou d'un signal lumineux, d'une collision entre deux particules, etc. Tout événement est caractérisé par sa position spatiale et par l'instant où il se produit. Un même événement  $\mathcal{E}$  est repéré par ses coordonnées  $(t, x, y, z)$  dans  $\mathcal{R}$  et  $(t', x', y', z')$  dans  $\mathcal{R}'$ .

Nous supposons pour simplifier que les origines spatiales  $O$  et  $O'$  des deux référentiels coïncident à un instant donné et que cet événement fixe l'origine temporelle dans les deux référentiels ( $t = 0$  et  $t' = 0$ ). Notre but est de déterminer la relation entre les coordonnées  $(t, x, y, z)$  et  $(t', x', y', z')$  d'un même événement, en nous appuyant sur les deux postulats cités plus haut.

En relativité restreinte, comme en physique newtonienne, on suppose l'espace et le temps *homogènes*, ce qui signifie qu'il n'y a pas de localisations dans l'espace ou le temps qui soient privilégiées<sup>2</sup>. On peut montrer que cela implique que la relation entre les deux systèmes de coordonnées est *linéaire*.

Considérons, du point de vue de  $\mathcal{R}$ , un flash de lumière émis à l'instant  $t = 0$  depuis l'origine spatiale  $O$ . Le signal lumineux qui se propage sphériquement autour de l'origine, à la vitesse de la lumière  $c$ , est caractérisé par l'équation

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \quad (2.1)$$

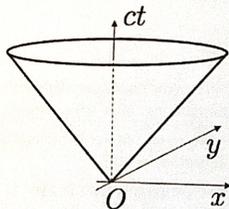


FIGURE 2.1. Propagation d'un signal lumineux depuis l'origine.

Du point de vue de  $\mathcal{R}'$ , le signal lumineux est émis à l'instant  $t' = 0$  depuis l'origine spatiale  $O'$  de  $\mathcal{R}'$  (puisque les origines spatiales des deux référentiels sont confondues à cet instant précis) et se propage sphériquement avec la *même* vitesse  $c$ . On a donc

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0. \quad (2.2)$$

En remplaçant, formellement, les coordonnées de  $\mathcal{R}'$  par leurs expressions linéaires (qui restent à déterminer) en fonction des coordonnées de  $\mathcal{R}$ , l'expression qui apparaît

<sup>2</sup> Ceci n'est plus vrai en relativité générale.

dans l'égalité ci-dessus définit la forme quadratique

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \equiv Q(t, x, y, z) = \sum_{i,j} A_{ij} x^i x^j + \sum_i B_i x^i (ct) + C(ct)^2, \quad (2.3)$$

où les coefficients  $A_{ij}$ ,  $B_i$  et  $C$  sont indépendants du temps et de l'espace (mais dépendent a priori des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ ), et les  $x^i$  représentent collectivement les trois coordonnées spatiales.

Tout point spatial de coordonnées  $(x, y, z)$  sera atteint par le signal lumineux à l'instant  $t_t$ , défini par

$$ct_t \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (2.4)$$

valeur pour laquelle la forme quadratique s'annule,  $Q(t_t, x, y, z) = 0$ . On peut remarquer que le signal lumineux atteint au même instant  $t_t$  le point symétrique par rapport à  $O$ , de coordonnées  $(-x, -y, -z)$ , c'est-à-dire

$$Q(t_t, -x, -y, -z) = 0. \quad (2.5)$$

Ceci étant vrai pour tout triplet  $(x, y, z)$ , on en déduit que les coefficients  $B_i$  définis dans l'expression (2.3) sont nécessairement nuls.

En outre, en supposant l'espace *isotrope*, ce qui veut dire qu'aucune direction spatiale n'est privilégiée, on voit que la matrice  $3 \times 3$  formée des coefficients  $A_{ij}$  doit être proportionnelle à la matrice identité. Par conséquent, la forme quadratique  $Q$  est nécessairement de la forme

$$Q(t, x, y, z) = C [(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2], \quad (2.6)$$

où le coefficient  $C$  dépend a priori des deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , ou plus précisément de leur mouvement relatif. La seule grandeur qui caractérise ces deux référentiels *relativement* l'un à l'autre est leur vitesse relative  $\vec{v}$ . En invoquant une fois de plus l'isotropie de l'espace, on voit que  $C$  ne peut dépendre que de la norme de cette vitesse relative. En outre, en comparant la combinaison de deux changements successifs de référentiels, par exemple de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  puis de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}''$ , au changement direct de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}''$ , on obtient

$$C(\|\vec{v}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}}\|) = C(\|\vec{v}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'}\|) C(\|\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\|). \quad (2.7)$$

Or, puisque la norme de  $\vec{v}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}}$  dépend non seulement des normes de  $\vec{v}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'}$  et de  $\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ , mais aussi de l'angle qui les sépare, on en déduit que  $C$  ne peut être que constante, et plus précisément

$$C = 1. \quad (2.8)$$

En résumé, les deux postulats énoncés en début de chapitre, auxquels on adjoit quelques hypothèses simples (homogénéité et isotropie de l'espace), conduisent à la relation

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad (2.9)$$

entre les coordonnées de *tout* événement repéré dans  $\mathcal{R}$  et dans  $\mathcal{R}'$ . Les transformations linéaires de coordonnées qui vérifient cette propriété sont appelées **transformations de Lorentz** (voir annexe B pour plus de détails).

## 2.4.2 Composition des vitesses

Intéressons-nous maintenant à une particule animée d'un mouvement *quelconque*. Notons  $\vec{w}$  et  $\vec{w}'$  les vitesses de cette particule mesurées dans deux référentiels inertiels, respectivement  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Par définition, les composantes de la vitesse  $\vec{w}$  dépendent des coordonnées spatiales et temporelle, attachées au référentiel  $\mathcal{R}$ . Ainsi, les composantes de la vitesse  $\vec{w}$  sont données par

$$w_x = \frac{dx}{dt}, \quad w_y = \frac{dy}{dt}, \quad w_z = \frac{dz}{dt}, \quad (2.44)$$

où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les coordonnées spatiales de la particule exprimées en fonction de la coordonnée temporelle  $t$ , définie dans  $\mathcal{R}$ . Les composantes de  $\vec{w}'$  s'écrivent de façon analogue en fonction des coordonnées  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  et  $t'$ , toutes définies dans  $\mathcal{R}'$ .

En utilisant la transformation de Lorentz (2.15) entre les coordonnées de  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{R}'$ , on trouve que la composante selon  $x$  de la vitesse dans  $\mathcal{R}'$  est donnée par

$$w'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma \left( \frac{dx}{dt} - \beta c \right)}{\gamma \left( 1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{w_x - v}{1 - \frac{vw_x}{c^2}}. \quad (2.45)$$

De même, les composantes le long des directions orthogonales au mouvement relatif entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  se transforment suivant les relations

$$w'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{w_y}{\gamma \left( 1 - \frac{\beta}{c} w_x \right)}, \quad w'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{w_z}{\gamma \left( 1 - \frac{\beta}{c} w_x \right)}. \quad (2.46)$$

Dans le cas d'une transformation de Lorentz d'axe quelconque (2.21-2.23), les expressions ci-dessus se généralisent facilement en

$$\vec{w}'_{\parallel} = \frac{\vec{w}_{\parallel} - \vec{v}}{1 - \vec{v} \cdot \vec{w}/c^2}, \quad \vec{w}'_{\perp} = \frac{\vec{w}_{\perp}}{\gamma \left( 1 - \vec{v} \cdot \vec{w}/c^2 \right)}. \quad (2.47)$$

On peut vérifier explicitement que pour une particule, par exemple un photon, se déplaçant à la vitesse de la lumière dans  $\mathcal{R}$ , c'est-à-dire  $\|\vec{w}\| = c$ , les formules ci-dessus impliquent automatiquement  $\|\vec{w}'\| = c$  (voir Exercice 2.6).

## 2.4.3 Expérience de Fizeau

En 1851, Fizeau réalisa une expérience pour étudier la vitesse de la lumière dans un milieu transparent en mouvement. Son principe repose sur la mesure des franges d'interférence entre deux signaux lumineux issus de la même source, mais se propageant dans un sens différent à travers un tube où circule un courant d'eau. Dans un milieu transparent comme l'eau, la vitesse de la lumière est inférieure à sa vitesse dans le vide et est égale à  $c/n$ , où  $n$  est l'indice de réfraction du milieu.

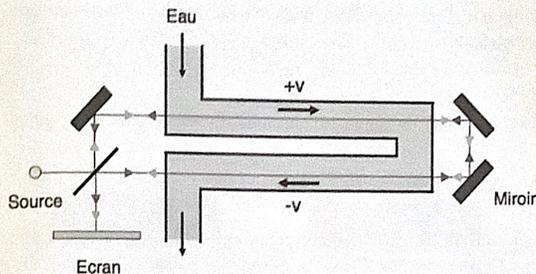


FIGURE 2.5. Schéma de principe de l'expérience de Fizeau

Appelons  $\mathcal{R}$  le référentiel du laboratoire et  $\mathcal{R}'$  le référentiel où l'eau est (localement) au repos. En partant de l'expression de la vitesse de la lumière par rapport à l'eau,

$$w' = \frac{c}{n}, \quad (2.48)$$

on déduit de la loi de composition des vitesses (2.45) que la vitesse de la lumière par rapport au laboratoire est donnée par

$$w = \frac{w' + v}{1 + vw'/c^2} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}}. \quad (2.49)$$

où  $v$  est la vitesse de l'eau par rapport au laboratoire<sup>7</sup>.

Dans le dispositif illustré sur la figure 2.5, on voit qu'un des rayons lumineux se déplace dans le même sens que l'eau, alors que l'autre se propage à contre courant. Pour le premier rayon lumineux, on peut appliquer telle quelle la formule (2.49), alors que pour le rayon à contre courant, il faut remplacer  $v$  par  $-v$ . On trouve ainsi

$$w_{\pm} = \frac{\frac{c}{n} \pm v}{1 \pm \frac{v}{nc}} \approx \frac{c}{n} \pm \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) v \quad (2.50)$$

où la dernière expression résulte d'un développement au premier ordre en  $v/c$ .

La vitesse du rayon lumineux allant dans le même sens que le courant d'eau est, du point de vue du référentiel du laboratoire,  $w = w_+$  et la durée du trajet dans les deux tubes remplis d'eau est donc

$$\Delta t_+ = \frac{2L}{w_+}, \quad (2.51)$$

<sup>7</sup> Par rapport à l'expression (2.45), on a remplacé  $v$  par  $-v$  car on cherche ici l'expression de  $w$  en fonction de  $w'$ , plutôt que  $w'$  en fonction de  $w$ .

où  $L$  est la longueur d'un tube. Pour le rayon lumineux à contre-courant, le trajet dans les deux tubes dure

$$\Delta t_- = \frac{2L}{w_-}. \quad (2.52)$$

Les deux rayons ont donc un temps de parcours différent, avec un décalage

$$\Delta t_- - \Delta t_+ = 2L \left( \frac{1}{w_-} - \frac{1}{w_+} \right) \simeq 4L(n^2 - 1) \frac{v}{c^2}, \quad (2.53)$$

qui peut être mesuré expérimentalement grâce aux franges d'interférences.

À l'époque, l'expérience de Fizeau a permis de valider l'hypothèse avancée par Fresnel selon laquelle le milieu dans lequel se propage la lumière, l'éther, est partiellement entraîné par le déplacement de l'eau, avec un coefficient d'entraînement donné par

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad (2.54)$$

en accord avec l'expression (2.50). Cette hypothèse de Fresnel avait l'avantage de concilier divers résultats expérimentaux qui, interprétés dans le cadre de l'éther, semblaient contradictoires. On voit, rétrospectivement, que l'expérience de Fizeau fournit une confirmation remarquable de la loi de composition des vitesses en relativité restreinte, un demi-siècle avant la naissance de la théorie!

## 2.5 Exercices

### Exercice 2.1.

On reprend l'Exercice 1.2 mais, cette fois, dans le contexte de la relativité. On considère donc, dans un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ , l'équation d'onde

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right) f = 0, \quad (2.55)$$

où  $f$  est un champ (scalaire) et  $c$  est la vitesse de la lumière. En utilisant la transformation de Lorentz (2.15), écrire cette équation d'onde dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}'$  en translation uniforme le long de l'axe des  $x$ , avec la vitesse  $v$ , par rapport à  $\mathcal{R}$ .

### Exercice 2.2.

Une fusée B s'éloigne d'une autre fusée A avec une vitesse relative proche de la vitesse de la lumière. Les deux fusées emportent des horloges identiques. En observant avec un télescope l'horloge de la fusée B, l'astronaute de A voit celle-ci fonctionner deux fois plus lentement que la sienne. Que constate l'astronaute de B lorsqu'il observe l'horloge de A ?

### Exercice 2.3.

Deux trains identiques, de longueur propre  $L$ , circulent à vitesse constante dans des directions opposées. On note  $A_i$  et  $B_i$  ( $i = 1, 2$ ) les extrémités avant et arrière des deux trains.

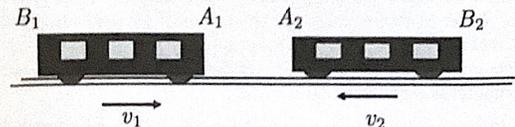


FIGURE 2.6. Croisement de deux trains.

On considère trois référentiels : le référentiel  $\mathcal{R}$  associé aux rails ; le référentiel  $\mathcal{R}_1$  associé au premier train, animé d'une vitesse  $v_1 = \beta_1 c$  ( $\beta_1 \geq 0$ ) par rapport à  $\mathcal{R}$  ; le référentiel  $\mathcal{R}_2$  associé au second train, animé d'une vitesse  $v_2 = -\beta_2 c$  ( $\beta_2 \geq 0$ ) par rapport à  $\mathcal{R}$ . On synchronise les horloges des trois référentiels :  $t = t_1 = t_2 = 0$  au moment où les points  $A_1$  et  $A_2$  se croisent. On choisit également l'origine  $x = x_1 = x_2 = 0$  en ce point de croisement.

1. Du point de vue du référentiel  $\mathcal{R}$ , quelle est la longueur du premier train ? Du deuxième train ?
2. Donner les coordonnées, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , de l'évènement correspondant au croisement de  $A_1$  et  $B_2$ . En utilisant la transformation de Lorentz, en déduire les coordonnées du même évènement dans les référentiels  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ .
3. Même question pour l'évènement associé au croisement de  $A_2$  et  $B_1$ . Quel est l'ordre chronologique de ces deux évènements ?
4. Calculer la vitesse du second train mesurée dans  $\mathcal{R}_1$ , ainsi que le facteur de Lorentz associé. Retrouver ainsi simplement les coordonnées dans  $\mathcal{R}_1$  des deux évènements, obtenues dans les questions précédentes.

### Exercice 2.4.

Un observateur dans un train en mouvement envoie, vers l'arrière, un signal lumineux qui va se réfléchir sur un miroir, fixe par rapport aux rails, et revient vers l'observateur.

Comparer les durées du trajet aller, du trajet retour et du trajet aller-retour, du point de vue de  $\mathcal{R}$ , référentiel lié aux rails, et de  $\mathcal{R}'$ , référentiel lié au train.