vitesse du son, à vérifier a posteriori

Hypothèses : (i) fluide au repos homogène

(ii) approximation acoustique $\leftrightarrow$ perturbations de l'état au repos

$$\begin{cases} \vec{v}(\vec{r},t) = \vec{v}_1(\vec{r},t) \\ \rho(\vec{r},t) = \rho_0 + \rho_1(\vec{r},t) \\ p(\vec{r},t) = P_0 + P_1(\vec{r},t) \end{cases}$$

$v_1 \ll c$

$\rho_1 \ll \rho_0$

$P_1 \ll P_0$

(iii) phénomènes dissipatifs négligés : viscosité, diffusion thermique

(iv) gravité négligée

Equation d'Euler $\quad \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\vec{\text{grad}}\, P$

Conservation de la masse $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$

Loi de Laplace $\quad P\rho^{-\gamma} = \text{cte}$

gaz parfait

$\boxed{\begin{array}{lcl} \underline{\text{5 inconnues}} & & \underline{\text{5 équations}} \\ P_1 & \longleftrightarrow & \text{éq. Euler (3)} \\ \rho_1 & & \text{conservation de la masse} \\ \vec{v}_1 & & \text{loi de Laplace} \end{array}}$

temps de diffusion thermique sur une longueur d'onde $\quad \tau_{diff} = \frac{\lambda^2}{D_{th}}$

temps caractéristique de variation de l'onde $\quad \tau_{var} = \frac{\lambda}{c}$

si $\tau_{var} \ll \tau_{diff}$ ie $f \ll \frac{c^2}{D_{th}} \simeq 6$ GHz (dans l'air)

l'hypothèse d'adiabadicité est validée

domaine audible $\quad 20\text{ Hz} < f < 20\text{ kHz}$

échographie $\quad f < 10\text{ MHz}$

<u>ODG</u> : air à 25°C, (N_2, O_2) 0.8 0.2 ; $M = 29$ g/mol ; $\gamma = \frac{7}{5} = 1{,}4$ diatomique $\rightarrow C_{th} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} = 345{,}8$ m/s

$C_{exp} = 346{,}3$ m/s.

<u>Intensité sonore</u> (dB) :

$\boxed{\begin{array}{l} I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0} \\ I_{dB} = 20 \log \frac{p_{1,eff}}{p_{1,eff,0}} \end{array}}$ où $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2} ← seuil audibilité à 4kHz

$p_{1,eff,0}$ ← 2×10^{-5} Pa

$I = \langle \vec{\Pi}\cdot\vec{n} \rangle \overset{OPPH}{=} \frac{p_{1,eff}^2}{\rho_0 c}$

à écrire au tableau

Hypothèses : (i) fluide au repos homogène — pression et masse volumique uniformes $(P_0, \rho_0, \vec{v}_0 = \vec{0})$

(ii) approximation acoustique ⟷ perturbations de l'état au repos ⟷ linéarisation des équations

$$\begin{cases} \vec{v}(x,t) = \vec{v}_1(x,t) \\ \rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t) \\ P(x,t) = P_0 + P_1(x,t) \end{cases}$$

5 inconnues — pression acoustique ou surpression

$v_1 \ll c$ ← vitesse du son, à vérifier a posteriori

$\rho_1 \ll \rho_0$

$P_1 \ll P_0$

⇕

$\xi \ll \lambda$ ← amplitude des mouvements

(iii) pas de prise en compte des phénomènes dissipatifs (pas d'amortissement)

* pas de viscosité ⟷ fluide parfait ⟷ $\eta = 0$ ⟷ éq. d'Euler
* pas de conduction thermique ⟷ écoulement isentropique ⟷ transf. adiabatiques réversibles ⟷ loi de Laplace $P \cdot \rho^{-\gamma} = \text{cte}$

$L_{diff} \sim \sqrt{\frac{D_{th}}{f}} \ll \lambda = \frac{c}{f}$

* on suppose ici que les phénomènes sont rapides par rapport aux transferts de chaleur qui tendent à homogénéiser la température i.e. $Q = 0$
* on aurait pu considérer que le système a le temps de revenir à l'équilibre thermique et donc que les transf. sont isothermes

(iv) gravité négligée. Cela changerait juste l'état au repos en un milieu stratifié par l'équilibre hydrostatique.

Équation d'Euler : $\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla} P \xrightarrow{\text{ordre } 1} \boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} P_1}$

- $\vec{v}_0 = \vec{0}$
- $(\vec{v}_1\cdot\vec{\nabla})\vec{v}_1$ est d'ordre 2 si $v_1 \ll c$ ←

$\frac{|\vec{v}_1\cdot\vec{\nabla}\vec{v}_1|}{|\partial_t \vec{v}_1|} \sim \frac{UT}{L} \sim \frac{U}{c} \ll 1$

Conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \xrightarrow[\rho_0 = \text{cte}]{\text{ordre } 1} \boxed{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}_1) = 0}$

On a récolté 4 équations pour 5 inconnues. Il faut faire une hypothèse : ici, transf. adiabatiques réversibles

Loi de Laplace • $P\rho^{-\gamma} = \text{cte} \xrightarrow[\text{logarithmique}]{\text{dérivée}} \frac{dP}{P} - \gamma\frac{d\rho}{\rho} = 0$ (dP — P_1, $d\rho$ — ρ_1 : écart au repos) $\rightarrow \frac{P_1}{\rho_1} = \gamma\frac{P_0}{\rho_0}$ — lie P_1 et ρ_1.

• en fait on montre que le coefficient de compressibilité isentropique χ_S ne dépend que de l'état au repos et pas (ρ_1, P_1).

$$\rightarrow \chi_S = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S \simeq \frac{1}{\rho_0}\frac{\rho - \rho_0}{P - P_0} = \boxed{\frac{1}{\rho_0}\frac{\rho_1}{P_1} = \frac{1}{\gamma P_0}}$$

Bilan :

5 inconnues		5 équations
P_1	⟷	éq. Euler (3)
ρ_1		conservation de la masse
$\vec{v}_1$		loi de Laplace

Équation des ondes

Avec p_1, faire apparaître les dérivées secondes avec $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{div}(\text{Euler}) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\text{conserv° masse})\end{array}\right.$

$$\hookrightarrow \Delta P_1 = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{v}_1) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho_1 = \rho_0 . \chi_s . \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta P_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0 \ , \quad c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}}$$

on aurait obtenu la même équation pour ρ_1, $\vec{v}_1$

$\vec{v}_1 = \tilde{\vec{v}}_1 e^{j(\omega t - kx)}$

$p_1 = \tilde{p}_1 e^{j(\omega t - kx)}$

↓ éq Euler linéarisée

$\rho_0 (j\omega)\vec{v}_1 = -(-jk)\, p_1 \vec{e}_x$

$\vec{v}_1 = \frac{k}{\omega \rho_0} p_1 \vec{e}_x = \frac{1}{\rho_0 c} p_1 \vec{e}_x$

- onde acoustique $\quad p_1 \vec{n} = Z \vec{v}_1 \quad$ où $\quad Z = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s}}$

- Pour un gaz parfait, $\frac{P_0}{\rho_0} = \frac{RT_0}{M} \longrightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}}$

ODG : air à 25°C (N_2, O_2) 0.8 0.2, $M = 29$ g/mol, $\gamma = \frac{7}{5} = 1{,}4$ diatomique $\longrightarrow C_{th} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} = 345{,}8$ m/s

$C_{exp} = 346{,}3$ m/s.

- Pour un gaz parfait, si on avait supposé les transf. isothermes, on aurait utilisé :

$$\chi_T = \frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T = \frac{M}{RT\rho} \quad \uparrow P = \rho\frac{RT}{M}$$

et donc $\boxed{c = \sqrt{\frac{1}{\rho \chi_T}} = \sqrt{\frac{RT}{M}}} \longrightarrow$ facteur $\sqrt{\gamma}$

Bilan de puissance

$\boxed{\vec{\Pi} = p\vec{v}}$ puissance surfacique des forces de pression

On développe u_v l'énergie interne volumique en fonction de ρ_1 :

$$u_v = u_v(\rho_0) + \rho_1 \left.\frac{\partial u_v}{\partial \rho}\right)_s(\rho_0) + \frac{\rho_1^2}{2}\left.\frac{\partial^2 u_v}{\partial \rho^2}\right)_s(\rho_0) \quad \text{isentropique}$$

Or $u_v = \rho\, u_m$ (massique) avec $du_m = T dS_m - p\, dV_m = T dS_m + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad \left(V_m = \frac{1}{\rho}\right)$

d'où $\left.\frac{\partial u_m}{\partial \rho}\right)_s = \frac{p}{\rho^2}$ donc

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\frac{\partial u_v}{\partial \rho}\right)_s = \left.\frac{\partial(\rho u_m)}{\partial \rho}\right)_s = u_m + \frac{p}{\rho} \\[2ex] \left.\frac{\partial^2 u_v}{\partial \rho^2}\right)_s = \left.\frac{\partial\left(u_m + \frac{p}{\rho}\right)}{\partial \rho}\right)_s = \frac{p}{\rho^2} - \frac{p}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{1}{\chi_s} \end{array}\right.$$

d'où

$$\boxed{u_v = u_v(\rho_0) + \rho_1 \underbrace{\left(u_m + \frac{P}{\rho_0}\right)}_{h_m \text{ enthalpie massique}} + \underbrace{\frac{\rho_1^2}{2}\cdot\frac{1}{\rho_0^2}\cdot\frac{1}{\chi_s}}_{\frac{1}{2}\chi_s p^2 \text{ car } \rho_1 = \rho_0 \chi_s p}}$$

Par conservation de la masse totale du fluide $\int_{\text{fluide}} \rho_1 h_m(\rho_0)\, dV = h_m(\rho_0)\int_{\text{fluide}} \rho_1\, dV = 0$

Donc la variation totale d'énergie interne du fluide est $\boxed{\mathcal{E}_p = \int \frac{1}{2}\chi_s p^2\, dV}$

On interprète donc $\boxed{\frac{1}{2}\chi_s p^2}$ comme une énergie potentielle élastique de compression/dilatation