

Accélération dans un référentiel en mouvement

cf. mécanique du solide

Soit R référentiel fixe d'origine O
 R' référentiel en mouvement par rapport à O' , d'origine O'

• Objectif: on veut lier $\vec{v}_R(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\bigg|_R$ à $\vec{v}_{R'}(M) = \frac{d\vec{O'M}}{dt}\bigg|_{R'}$

deux ingrédients:

(i) dérivation d'un vecteur: $\frac{d\vec{A}}{dt}\bigg|_R = \frac{d\vec{A}}{dt}\bigg|_{R'} + \vec{\Omega}(R'/R) \times \vec{A}$

(ii) mais si $\vec{A} = \vec{OM}$, $\vec{v}_R(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\bigg|_R \neq \frac{d\vec{OM}}{dt}\bigg|_{R'} = \frac{d\vec{A}}{dt}\bigg|_{R'}$, il faut utiliser $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$

$$\vec{v}_R(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\bigg|_R = \frac{d\vec{OO'}}{dt}\bigg|_R + \frac{d\vec{O'M}}{dt}\bigg|_R = \underbrace{\vec{v}_R(O')}_{\vec{v}_e} + \underbrace{\vec{v}_{R'}(M)}_{\vec{v}_e} + \underbrace{\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}}_{\vec{v}_e}$$

$$\vec{a}_R(M) = \frac{d\vec{v}_R(M)}{dt}\bigg|_R = \vec{a}_R(O') + \vec{a}_{R'}(M) + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{R'}(M) + \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_R(M) + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M})$$

$$\vec{a}_R(M) = \underbrace{\vec{a}_R(O') + \vec{a}_{R'}(M) + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M})}_{\vec{a}_e} + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \vec{O'M}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{2 \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{R'}(M)}_{\text{Coriolis}}$$

Bilan énergétique

- * la force de Coriolis ne travaille pas ↗ c'est plus stable de "rester en arrière"
- * translation pure: $E_{p,ie} = m \vec{a}_e \cdot \vec{OM} + C$
- * rotation pure: $E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m \Omega^2 H M^2 + C$ ↗ c'est plus stable de s'éloigner "centrifuge"
- * dans le cas général, $\vec{F}_{ie}$ n'est pas conservative.

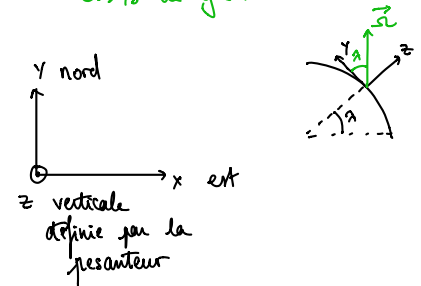
référentiel non galiléen

- Un référentiel galiléen est un référentiel où le principe d'inertie est vérifié.
- référentiel de Copernic
Kepler / héliocentrique
géocentrique
terrestre local

Sur Terre

* pesanteur = champ gravitationnel + terme centrifuge
max. à l'équateur
nul aux pôles

$$\vec{g}(P) = \vec{G}_T(P) + \underbrace{\Omega^2 H \vec{P}}_{0.3\% \text{ de } \vec{g}(P)}$$



Pendule de Foucault

- à l'équateur, si on lance le pendule dans le plan de l'équateur, il reste dans ce plan car la force de Coriolis est dans le plan de l'équateur.
- aux pôles, dans le référentiel géocentrique, le pendule oscille dans un plan fixe terrestre, le plan d'oscillation tourne, avec une période de 1 jour.
- sous approximation de mouvement plan horizontal : $z = \text{cte}$, $T = mg$

$$L \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{g}{L}x + 2\Omega \sin\lambda \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{g}{L}y - 2\Omega \sin\lambda \dot{x} \end{cases} \quad u = x + iy \rightarrow \boxed{i\ddot{u} + f i \dot{u} + \omega_0^2 u = 0} \quad \begin{matrix} f = 2\Omega \sin\lambda \\ \omega_0^2 = g/L \end{matrix}$$

$$u(0) = x_0$$

$$\dot{u}(0) = 0$$

$$\rightarrow u(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \exp(-i \frac{f}{2} t)$$

rotation du
plan d'oscillation
à pulsation $f/2$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\frac{f}{2} t) \\ y(t) = -x_0 \sin(\omega_0 t) \sin(\frac{f}{2} t) \end{cases}$$

↳ la pulsation de la rotation du plan d'oscillation est $\frac{f}{2}$.

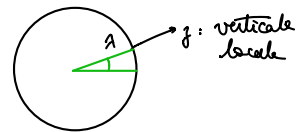
Déviation vers l'est

- * La force de Coriolis est une perturbation ($< \frac{\text{poids}}{10^3}$)
- * déviation vers l'est dans les 2 hémisphères

$$\vec{f}_{ic} = -2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -2 \Omega \begin{pmatrix} \cos \lambda \dot{z} - \sin \lambda \dot{y} \\ \Omega \sin \lambda \dot{x} \\ -\Omega \cos \lambda \dot{x} \end{pmatrix}$$

approche perturbative : $(x_0, y_0, z_0)(t)$: chute libre
 $\hookrightarrow$ injecter dans Coriolis
 $\hookrightarrow x_1(t)$ déviation vers l'est
 $\dots$
 $\hookrightarrow y_1(t)$ déviation vers le sud

Écoulement géostrophique



• $R_0 = \frac{U}{\Omega L}$ $U \sim 10 \text{ m/s} \rightarrow L \sim 10^6 \text{ m}$ échelle synoptique

horizontale $\left\{ \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad}_h p - f \vec{u} \wedge \vec{v} \right.$ $f = 2 \Omega \sin \lambda$ paramètre de Coriolis.
 verticale locale $\left. \vec{0} = -\frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z + \rho \vec{g} \right.$
 (Annotations: "écart à l'hydrostatique", "gradient horizontal", "hydrostatique vertical", "la composante de $\vec{\Omega}$ selon $\vec{e}_y$ interagit avec $\dot{x} \rightarrow$ force selon $\vec{e}_z$ et $\dot{z} \leftarrow$ néglige.")

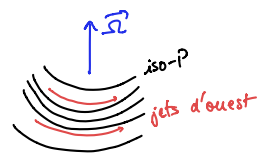
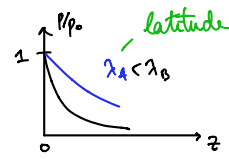
• écoulements stationnaires à faible $R_0 \rightarrow$ écoulement géostrophique

$$\vec{v} \wedge \vec{g} = \frac{1}{\rho f} \vec{u}_y \wedge \text{grad}_h(p)$$

(Annotations: "équilibre", "gradient de pression $\leftrightarrow$ Coriolis", "verticale locale", "006 : jusqu'à 160 km/h dans la tropopause")

- * lignes de courant = isobares
- * orientation donnée par la règle de Buys-Ballot : dans l'hémisphère Nord, haute pression à droite. En effet, $(\vec{u}_y, \vec{\nabla}_h p, \vec{u}_y)$ donc $(\vec{\nabla}_h p, \vec{u}_y, \vec{u}_y)$ direct $f > 0$

- jet d'ouest : vents d'ouest vers est à mid-latitude l'air de l'équateur, au sol, est plus chaud $l_c = k_B T \propto T$ est plus long à l'équateur donc à altitude z fixée, $\vec{\nabla}_h p$ vers l'équateur donc $\vec{u}_g$ orienté vers l'est, dans les deux hémisphères car f et $\vec{\nabla}_h p$ changent de signe



- anticyclones et dépressions :

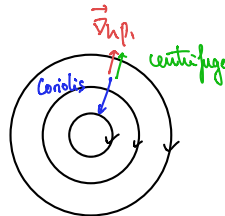
$$\text{rot } \vec{u}_g = \frac{1}{\rho f} \Delta_h p \vec{u}_z$$

- dépression $\Delta_h p > 0$
 - anticyclone $\Delta_h p < 0$
- dans l'hémisphère Nord où $f > 0$.

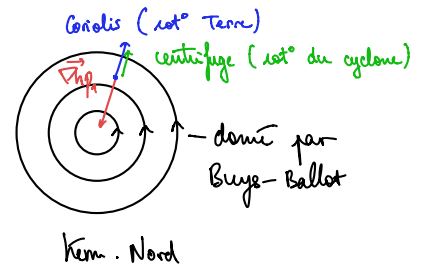
dans un (anti-) cyclone, $\frac{v^2(r)}{r} \vec{u}_r - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_h p - f \vec{u}_g \wedge \vec{v}(r) = \vec{0}$

- * dans un cyclone (dépression), $\vec{\nabla}_h p$ s'oppose à $\frac{v^2(r)}{r} \vec{u}_r$ et $-f \vec{u}_g \wedge \vec{v}(r)$ à $f v(r) \vec{u}_r$ lorsque $v \nearrow$, $\vec{\nabla}_h p$ peut s'ajuster

- * dans un anticyclone (surpression), Coriolis équilibre le gradient de pression et la force centrifuge mais Coriolis $\propto f v$ centrifuge $\propto \frac{v^2}{r}$ donc il y a une vitesse limite



Hém. Nord



- alizés : l'air qui descend vers l'équateur le long d'un méridien est dévié vers l'ouest par la force de Coriolis.

Théorème de Taylor - Proudman

lorsque $Ro \ll 1$,

en régime permanent
pour un fluide parfait
forces dérivant d'un potentiel
écoulement incompressible
 $\vec{\omega} = \text{cste}$

$$0 = -\vec{\nabla} p - \rho 2 \vec{\omega} \times \vec{v} - \vec{\nabla} \phi$$

$$\downarrow \text{rot}, \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$$0 = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad \text{Taylor - Proudman}$$

$$\vec{v}(x, y, z)$$

$\vec{u}$ est invariant selon l'axe de $\vec{\omega}$.
on parle de colonne de Taylor - Proudman

paramétriser $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

écoulement en rotation

$$\vec{f}_c = \rho \left\{ -2 \vec{\omega} \wedge \vec{v} - \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})}_{\oplus \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 \right)} \right\}$$

2. Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$

2.1 Le mouvement du centre de la Terre dans le référentiel de Copernic

L'équation régissant l'évolution du centre T de la Terre est obtenue en appliquant le PFD à la Terre dans $\mathcal{R}_C$. Elle est soumise aux forces d'interaction gravitationnelle des autres astres du système solaire :

$$M_T \mathbf{a}_{\mathcal{R}_C}(T) = \sum_i M_i \mathcal{G}_i(T) \quad \text{avec} \quad \mathcal{G}_i = \frac{GM_i}{D_i^2},$$

où $\mathcal{G}_i(T)$ est le champ de gravitation créé par l'astre i au niveau du centre de gravité de la Terre, M_i étant sa masse et D_i sa distance à la Terre. Les ordres de grandeur de ces champs de gravitation peuvent être calculés pour les valeurs minimales des distances D_i (tab. VI-1).

Tableau VI-1. Champs de gravitation moyens exercés par les astres sur la Terre

	Soleil	Lune	Vénus	Mars	Jupiter
M (kg)	2.10^{30}	7.10^{22}	5.10^{24}	6.10^{23}	2.10^{27}
D (m)	1.10^{11}	4.10^8	4.10^{10}	8.10^{10}	6.10^{11}
$\mathcal{G}$ (m.s $^{-2}$)	1.10^{-2}	3.10^{-5}	2.10^{-7}	6.10^{-9}	4.10^{-7}

Les autres astres, plus éloignés et moins massifs, sont totalement négligeables. Ces estimations permettent de conclure que le mouvement de la Terre n'est principalement dû qu'à la présence du Soleil, et cela avec une approximation inférieure à 1% (la Lune intervenant ensuite). Nous montrerons que la trajectoire de la Terre est alors une ellipse dans cette approximation (VIII.3.2), parcourue en une *année sidérale*⁽¹⁾.

Remarquons que l'année sidérale est légèrement supérieure à 365 jours 6 heures, alors que l'*année tropique*⁽²⁾, définie par notre calendrier⁽³⁾, est légèrement inférieure. L'année tropique correspond au rythme des saisons, les solstices et les équinoxes ayant lieu à date fixe (aux années bissextiles près). L'écart constaté entre l'année astronomique (sidérale) et l'année des terriens (tropique) est dû à la précession des équinoxes ; du fait de la rotation du plan de l'équateur d'une année sur l'autre, l'intervalle de temps écoulé entre deux équinoxes est inférieur à celui nécessaire à la Terre pour parcourir complètement son orbite. Si notre calendrier correspondait à l'année sidérale, dans 13000 ans l'hiver dans l'hémisphère nord se produirait aux mois de juillet et août.

¹ 1 année sidérale = 365 jours, 6 heures, 9 minutes et 9 secondes.

² 1 année tropique = 365 jours, 5 heures, 48 minutes et 46 secondes.

³ Il s'agit du calendrier grégorien mis en place en 1582. Une année sur quatre est bissextile, sauf les années séculaires, à l'exception de celles dont le nombre de siècles est divisible par quatre : 1500, 1700, 1800 et 1900 n'étaient pas bissextiles, alors que 1600 l'était et 2000 l'est.

2.2 Le principe fondamental appliqué dans le référentiel géocentrique

Soit un corps de masse m , situé au point P. L'application du principe fondamental à ce point matériel dans $\mathcal{R}_G$ doit être faite en tenant compte des forces d'inertie :

$$m \mathbf{a}_{\mathcal{R}_G} = \mathbf{F} + m \mathcal{G}_T(P) + \sum_i m \mathcal{G}_i(P) + \mathbf{F}_{ie} + \mathbf{F}_{ic},$$

où $\mathbf{F}$ est la résultante des forces autres que celles de gravitation. $\mathcal{G}_T(P)$ est le champ de gravitation créé par la Terre en P, et $\mathcal{G}_i(P)$ est le champ créé en P par un astre i autre que la Terre. Puisque $\mathcal{R}_G$ est en translation par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}_C$:

$$\omega_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}_C} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F}_{ie} = -m \mathbf{a}_{\mathcal{R}_C}(T) \quad , \quad \mathbf{F}_{ic} = \mathbf{0}.$$

En utilisant l'expression de l'accélération de la Terre dans $\mathcal{R}_C$, vue au paragraphe précédent, l'équation du mouvement de m dans $\mathcal{R}_G$ peut finalement s'écrire :

$$m \mathbf{a}_{\mathcal{R}_G} = \mathbf{F} + m \mathcal{G}_T(P) + \underbrace{\sum_i m (\mathcal{G}_i(P) - \mathcal{G}_i(T))}_{\text{terme de gravitation différentielle ou terme de marée}}.$$

L'écart au comportement galiléen du référentiel géocentrique réside dans le terme de gravitation différentielle. Afin de discuter de l'importance de ce dernier, nous allons estimer son ordre de grandeur pour différents astres. Soit D_i la distance entre l'astre i et la Terre, et d la distance de P au centre T de la Terre ; le terme différentiel dû à cet astre vaut au maximum :

$$|\mathcal{G}_i(P) - \mathcal{G}_i(T)| = \frac{GM_i}{(D_i - d)^2} - \frac{GM_i}{D_i^2}.$$

Or il n'est pertinent de prendre la Terre pour référence, c'est-à-dire de travailler dans $\mathcal{R}_G$, que si le corps étudié se trouve à proximité ; nous pouvons donc considérer que $d \ll D$. D'où l'ordre de grandeur littéral du terme différentiel :

$$|\mathcal{G}_i(P) - \mathcal{G}_i(T)| \approx \frac{GM_i}{D_i^2} \left[\frac{1}{(1 - d/D_i)^2} - 1 \right] \approx \frac{GM_i}{D_i^2} \left(1 + \frac{2d}{D_i} - 1 \right) = \frac{2GM_i d}{D_i^3}.$$

Les estimations numériques sont effectuées pour un corps au voisinage proche de la surface terrestre : d est de l'ordre du rayon terrestre $R_T = 6\,400$ km (tab. VI-2). Nous constatons que l'influence des différents astres dans $\mathcal{R}_G$ n'a plus rien à voir avec celle qu'ils avaient dans $\mathcal{R}_C$. En effet, le terme de gravitation différentielle dépend de façon plus importante de la distance D_i à l'astre. Ainsi, c'est la Lune qui, malgré sa faible masse, intervient de manière prépondérante ; le Soleil, bien que beaucoup plus éloigné, intervient encore pour moitié par rapport à la Lune, du fait de sa très grande masse. Mais l'influence des autres astres est complètement négligeable.

Tableau VI-2. Champ de gravitation différentielle moyen exercé par les astres sur la Terre

	Soleil	Lune	Vénus	Mars	Jupiter
$ \mathcal{G}(P) - \mathcal{G}(T) \text{ (m.s}^{-2}\text{)}$	5.10^{-7}	1.10^{-6}	7.10^{-11}	1.10^{-12}	8.10^{-12}

Ces valeurs sont à comparer à celle du champ de gravitation terrestre $\mathcal{G}_T$, intervenant également dans l'équation du mouvement : $\mathcal{G}_T = 10 \text{ m.s}^{-2}$ à la surface de la Terre, la force de marée y est donc complètement négligeable. Envisageons maintenant les satellites artificiels tournant autour de la Terre, ceux-ci évoluent à des altitudes allant de quelques centaines de mètres pour les plus proches, à 36 000 km pour les satellites géostationnaires. Avec $d = 42000 \text{ km}$, nous obtenons :

$$\mathcal{G}_T(P) = 10 \left(\frac{R_T}{d} \right)^2 = 0,2 \text{ m.s}^{-2} ; \quad |\mathcal{G}_{\text{Lune}}(P) - \mathcal{G}_{\text{Lune}}(T)| = 7.10^{-6} \text{ m.s}^{-2}.$$

La Lune ayant la plus grande influence, il apparaît que le terme de marée des différents astres est encore négligeable devant l'attraction gravitationnelle terrestre à cette altitude. Cela ne sera en revanche plus réalisé trop près de la Lune, il faudra alors tenir compte de cette dernière. En conséquence, à la surface de la Terre, et dans son voisinage proche, le champ de gravitation des autres astres du système solaire peut être considéré uniforme avec une très bonne approximation.

Le référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen pour toute étude de phénomènes se produisant au voisinage proche de la Terre. Il ne faut alors pas tenir compte des autres astres du système solaire.

Les mouvements des satellites artificiels terrestres peuvent donc être étudiés dans ce cadre. Mais qu'en est-il de la Lune elle-même ? Son évolution dans l'espace peut-elle être prédite en lui appliquant le principe fondamental dans $\mathcal{R}_G$ galiléen ? Il faudrait pour cela que le terme de gravitation différentielle dû au Soleil soit négligeable devant le champ de gravitation créé par la Terre au niveau de la Lune. L'estimation numérique s'effectue en considérant pour d la distance Terre-Lune :

$$\mathcal{G}_T(\text{Lune}) = 10 \left(\frac{R_T}{d} \right)^2 \approx 2.10^{-3} \text{ m.s}^{-2} , \quad |\mathcal{G}_{\text{Soleil}}(\text{Lune}) - \mathcal{G}_{\text{Soleil}}(T)| \approx 3.10^{-5} \text{ m.s}^{-2}.$$

Le terme de marée est ici loin d'être négligeable, il représente une correction de l'ordre du pour-cent. L'étude de la Lune, dans $\mathcal{R}_G$ supposé galiléen, ne fournit donc qu'une évolution approchée ; en pratique l'influence du Soleil doit être prise en compte, ce qui rend la trajectoire de la Lune particulièrement difficile à étudier.

Nous avons affirmé que tout phénomène à la surface de la Terre pouvait être interprété par une étude dans $\mathcal{R}_G$ supposé galiléen. Cela n'est en réalité valable qu'avec une certaine approximation ; il peut donc exister des exceptions. Une exception importante est la marée océanique, elle trouve en effet son origine dans le caractère non galiléen du référentiel géocentrique. Cette affirmation pourrait amener la question suivante : comment un terme de gravitation différentielle si faible peut-il provoquer un effet aussi

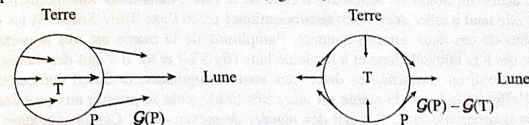
important ? En réponse, nous dirons que l'effet créé est en réalité très faible, car les dénivellations doivent être comparées à la taille de la Terre sur laquelle sont répartis les océans ; si elles nous paraissent importantes, c'est uniquement parce que nous sommes tout petits !

2.3 Le phénomène des marées

2.3.1 La théorie statique qualitative des marées océaniques

Cette partie ne comporte aucun calcul. Notre but est d'interpréter qualitativement ce que quiconque peut observer, en se plaçant avec un mètre et une montre au bord de l'océan, ou plus rapidement en consultant un annuaire des marées.

Dans $\mathcal{R}_G$, l'action des autres astres du système solaire, au niveau de la surface de la Terre, se réduit aux champs de gravitation différentielle créés par la Lune et le Soleil. La Lune ayant une influence double de celle du Soleil, c'est elle qui contrôle l'essentiel du phénomène. Le champ différentiel $\mathcal{G}(P) - \mathcal{G}(T)$, exercé à la surface du globe par celle-ci, tend à étirer notre planète selon la direction Terre-Lune, et à la comprimer dans les directions transverses (fig.VI-5).

Figure VI-5. Le champ gravitationnel $\mathcal{G}$ créé par la Lune à la surface de la terre, et le champ différentiel qui en découle

Les océans, qui recouvrent la majeure partie du globe, subissent ces actions en plus du champ gravitationnel terrestre. Cela se traduit par la création de deux *bourrelets océaniques* selon l'axe Terre-Lune : c'est-à-dire de deux régions, aux antipodes l'une de l'autre, où le niveau de la mer est plus élevé (fig.VI-6).

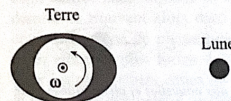


Figure VI-6. Déformation de la surface des océans sous l'action de la gravitation différentielle de la Lune

Pourquoi y a-t-il deux marées par jour ?

Négligeons pour l'instant le déplacement de la Lune autour de la Terre. Puisque la Terre fait un tour sur elle-même en un jour, un point de sa surface passe deux fois par jour au niveau d'un bourrelet océanique (fig.VI-6) ; le niveau de la mer varie donc au cours de la journée en passant deux fois par un maximum, les marées hautes, et deux fois par un minimum, les marées basses.

Pourquoi y a-t-il des marées plus importantes que d'autres ?

Si nous relevions la hauteur atteinte par la mer à marée haute, nous constaterions des variations régulières de celle-ci au cours des mois (fig.VI-7).

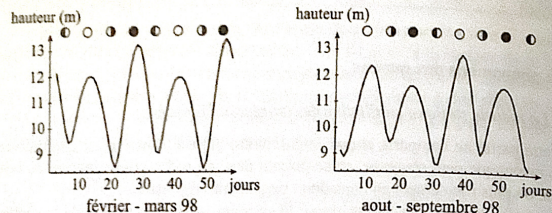


Figure VI-7. Évolution de la hauteur atteinte par la mer à marée haute, durant deux périodes de l'année 1998, dans la baie de Saint-Malo ; ainsi que les phases de la Lune à ces époques

Ces variations apparaissent synchrones avec les phases de la Lune ; elles sont dues à la contribution du Soleil, et dépendent de sa position par rapport à l'axe Terre-Lune.

L'action du Soleil est semblable à celle de la Lune, mais deux fois moins importante ; elle tend à créer deux bourrelets océaniques selon l'axe Terre-Soleil. Si les contributions de ces deux astres s'ajoutent, l'amplitude de la marée est très importante, c'est le cas à la nouvelle lune et à la pleine lune (fig.VI-7 et 8). Il s'agit des *marées de vives eaux*. Si, en revanche, les deux axes sont orthogonaux, le Soleil compense en partie l'effet de la Lune, la marée est alors très faible, cela se produit aux premiers et derniers quartiers de lune. Il s'agit des *marées de mortes eaux*. Ces phénomènes ont une période d'environ quinze jours, car ils se produisent deux fois par lunaison⁽¹⁾.

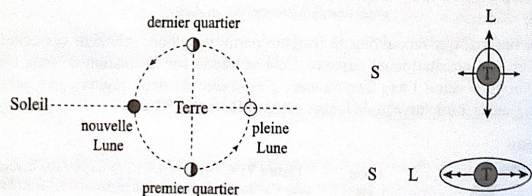


Figure VI-8. Les contributions de la Lune et du Soleil s'ajoutent aux nouvelles et pleines lunes, et se compensent en partie aux premiers et derniers quartiers

¹ 1 lunaison $\approx$ 29 jours 12 heures. Il s'agit de la durée écoulée entre deux alignements consécutifs Terre-Lune-Soleil. Elle est supérieure à la période sidérale de rotation de la Lune autour de la Terre, 27 jours 7 heures, du fait de la rotation de la Terre autour du Soleil.

Pourquoi les amplitudes des marées de vives eaux et de mortes eaux varient-elles ?

Au cours des mois de février et mars 1998, les vives eaux de nouvelle lune ont été plus importantes que celles de pleine lune, tandis que les mortes eaux de dernier quartier ont été plus faibles que celles de premier quartier (fig.VI-7). Il semble se produire ici un phénomène de période mensuelle. Son origine réside dans la variation de la distance Terre-Lune, qui induit une plus ou moins grande contribution lunaire aux marées. En effet, l'orbite de la Lune, à peu près elliptique dans $\mathcal{R}_G$, a une distance à la Terre variant de 356 000 km (périgée) à 406 000 km (apogée). Cette variation de l'ordre de 10% est déjà importante, et la distance intervient au cube dans l'expression du champ de gravitation différentielle ; le phénomène est donc appréciable. L'action de la Lune est maximale lorsqu'elle se trouve à son périgée, elle décroît lorsque la distance augmente, pour être minimale au niveau de l'apogée. Rappelons que la distance Terre-Soleil varie quant à elle très peu.

L'observation de la courbe précédente permet alors d'en déduire qu'au mois de février la Lune était plus proche de son périgée, à la nouvelle lune qu'à la pleine lune, et au premier quartier qu'au dernier quartier. D'où l'estimation de la position de l'orbite elliptique de la Lune par rapport à l'axe Terre-Soleil, le périgée devant se trouver entre la nouvelle lune et le premier quartier (fig.VI-9).

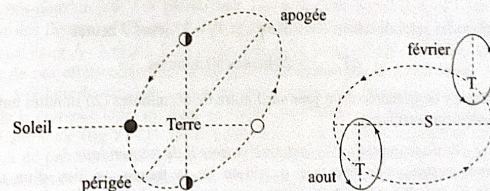


Figure VI-9. Positionnement en février de l'orbite elliptique de la Lune, par rapport à l'axe Terre-Soleil, puis six mois plus tard

Ces interprétations peuvent être vérifiées six mois plus tard. L'orbite de la Lune étant définie dans $\mathcal{R}_G$, elle se déplace avec celui-ci par rapport au Soleil (fig.VI-9) ; ce dernier se trouvant alors dans la direction opposée, le périgée est cette fois compris entre la position de pleine lune et de dernier quartier. En conséquence, les marées de vives eaux les plus fortes doivent être celles de pleine lune, et les marées de mortes eaux les plus faibles celles de premier quartier. Tout cela est effectivement vérifié sur le relevé des dénivelés à marée haute durant les mois d'août et de septembre (fig.VI-7).

Pourquoi l'heure de la marée se décale-t-elle de jour en jour ?

Imaginons que la marée est haute à un instant donné, c'est-à-dire que nous nous trouvons au niveau d'un des deux bourrelets. Si la Lune était immobile dans $\mathcal{R}_G$, au bout de vingt-quatre heures, la Terre ayant effectué un tour sur elle-même, nous nous retrouverions au niveau du même bourrelet, c'est-à-dire avec la marée haute à la même heure que la veille. Mais dans $\mathcal{R}_G$, la Lune tourne autour de la Terre dans le sens de la

rotation de la Terre sur elle-même ; en conséquence, d'un jour sur l'autre, le bourrelet s'est déplacé dans $\mathcal{R}_0$ et la Terre doit tourner sur elle-même un peu plus pour que la marée haute ait lieu au même endroit. (fig.VI-10).

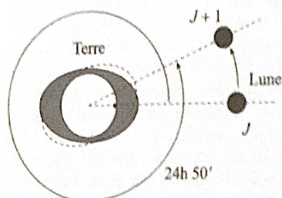


Figure VI-10. Mouvement de la Lune dans $\mathcal{R}_0$ entraînant le décalage horaire des marées

Si l'intervalle de temps entre les marées hautes de deux jours consécutifs est noté $\Delta T_{\text{marée}}$ avec ω la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même, et ω_L la vitesse angulaire moyenne de la Lune autour de la Terre :

$$\omega \Delta T_{\text{marée}} = 2\pi + \omega_L \Delta T_{\text{marée}} \Rightarrow \Delta T_{\text{marée}} = \frac{2\pi}{\omega - \omega_L} = \frac{T T_L}{T_L - T}$$

Les périodes sidérales étant $T = 86164$ s et $T_L = 27$ jours 7 heures :

$$\Delta T_{\text{marée}} = 24 \text{ heures } 50 \text{ minutes,}$$

soit un décalage de la marée d'un jour sur l'autre de 50 minutes (25 minutes entre deux marées hautes consécutives).

Pourquoi le décalage quotidien de la marée varie-t-il de jour en jour ?

Si nous mesurons le décalage quotidien de la marée, au lieu d'un décalage constant de 50 minutes, nous observons une variation régulière de celui-ci au cours des mois (fig.VI-11), de moins de 30 minutes à plus d'une heure et demi. La période de ces variations semble être de quinze jours, et liée aux phases de la Lune.

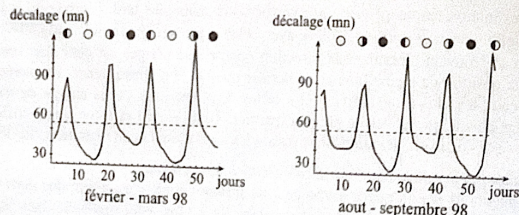


Figure VI-11. Évolution du décalage quotidien de la marée, durant deux périodes de l'année 1998, dans la baie de Saint-Malo

L'origine principale du décalage réside, comme nous l'avons expliqué au paragraphe précédent, dans le mouvement de la Lune. Et pour l'estimer quantitativement, nous n'avons tenu compte que de l'action de celle-ci. L'interprétation de ces courbes nécessite la prise en compte de l'action conjointe du Soleil (fig.VI-12).

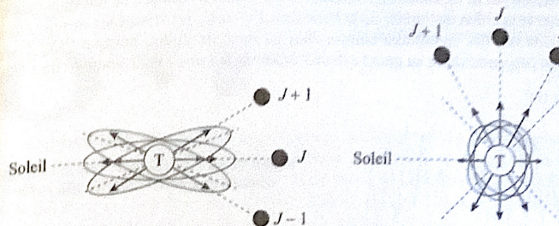


Figure VI-12. L'action du Soleil renforce ou atténue le décalage causé par le mouvement de la Lune, selon leurs positions relatives

Plaçons-nous un jour J de pleine lune. Les actions du Soleil et de la Lune (symbolisées par des flèches) s'effectuent dans le même sens. Représentons maintenant leurs actions aux jours $J-1$ et $J+1$, et déduisons-en la position des bourrelets océaniques résultant de ces effets conjoints. Il apparaît clairement que le Soleil tend, dans cette situation, à réduire le décalage quotidien du bourrelet. Ce dernier, autour de la pleine lune et de la nouvelle lune, est donc en réalité plus faible que les 55 minutes estimées avec la Lune seule (fig.VI-11). De la même façon, en estimant la position des bourrelets autour du premier et dernier quartier, nous montrons qualitativement que le Soleil tend à accentuer le décalage quotidien. Tout cela se vérifie parfaitement sur les courbes précédentes.

Pourquoi les décalages maximal et minimal varient-ils ?

Durant les mois de février et mars 1998, le décalage à la pleine lune est nettement plus faible qu'à la nouvelle lune. Cette différence s'interprète en tenant compte de la variation de la distance Terre-Lune. En effet, le décalage quotidien dépend de la vitesse angulaire de la Lune autour de la Terre. Or, au voisinage du périhélie la Lune est au plus proche de la Terre, la loi des aires implique alors que sa vitesse angulaire γ est la plus élevée et le décalage plus important (la Terre doit tourner davantage pour rattraper le bourrelet). De la même façon, le décalage doit être plus faible au voisinage de l'apogée.

L'étude du décalage en février et mars permet donc de positionner le périhélie au voisinage de la position de nouvelle lune à cette époque, ce que nous avons d'ailleurs déterminé par l'étude de l'amplitude (fig.VI-9). Cela se vérifie six mois plus tard, aux mois d'août et septembre, au cours desquels le périhélie se trouve cette fois au voisinage de la pleine lune, le décalage est à ce moment plus important qu'à la nouvelle lune.

Pourquoi les marées d'équinoxe sont-elles plus importantes ?

Sur le graphe suivant (fig.VI-13), sont relevées durant une année les hauteurs maximales atteintes en vives eaux. Il y a environ deux points par mois, l'un correspondant à la pleine lune et l'autre à la nouvelle lune ; la différence entre leurs ordonnées a été expliquée par la variation de la distance Terre-Lune. D'ailleurs, ce relevé permet de confirmer la position de l'orbite de la Lune dans l'espace : les vives eaux de nouvelle et pleine lune ont des amplitudes comparables au mois de juillet, puisque l'axe Terre-Soleil est perpendiculaire au grand axe de l'orbite de la Lune à cette époque (fig.VI-9).

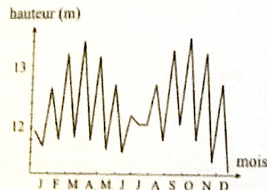


Figure VI-13. Évolution de la hauteur maximale atteinte aux vives eaux durant l'année 1998

Nous constatons aisément la présence de très grandes marées aux équinoxes : fin mars et fin septembre. De façon similaire, les mortes eaux d'équinoxes présentent les plus faibles amplitudes de l'année. L'origine de ce phénomène est à rechercher dans ce qui caractérise les équinoxes : la déclinaison du Soleil. L'orbite lunaire peut quant à elle être supposée dans le plan de l'écliptique. Les deux astres, Lune et Soleil, évoluent alors dans le même plan autour de la Terre, et c'est dans ce plan que se trouvent les bourrelets océaniques (cela a été supposé depuis le début dans nos représentations graphiques).

Reprenons la figure qui nous a permis d'établir l'existence de deux marées par jour, et plaçons-nous dans une situation de nouvelle lune, le plan de la feuille contenant les trajectoires de la Lune et du Soleil (fig.IV-14). Dans le premier schéma, l'axe de rotation de la Terre est perpendiculaire au plan de la feuille, la déclinaison est nulle, cette situation est celle des équinoxes. À une latitude donnée, la rotation de la Terre sur elle-même permet le passage du bourrelet sur différentes zones de la surface terrestre, ce qui provoque les marées.

Pour comprendre l'influence d'une déclinaison non nulle, considérons le cas extrême et imaginaire d'une déclinaison de 90° (fig.VI-14). L'axe de rotation de la Terre est alors confondu avec l'axe Terre-Lune-Soleil, et les bourrelets océaniques sont situés sur cet axe, de sorte que la rotation propre de la Terre n'induit pas de variation du niveau de l'eau en un lieu donné. Il n'y a plus de marée... Bien entendu, cette situation est fictive, mais elle permet de comprendre pourquoi dans le cas d'une déclinaison non nulle le niveau de l'eau varie sur un intervalle plus restreint (sans aller bien sûr jusqu'à l'absence de marée). Ainsi, c'est aux équinoxes que se produisent les plus grandes marées.

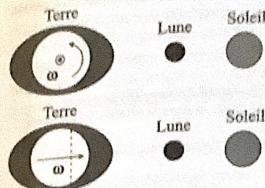


Figure VI-14. Situation de nouvelle lune avec une déclinaison nulle (équinoxe) et une déclinaison imaginaire de 90°

Précisons pour terminer que nous n'avons envisagé que les phénomènes principaux, d'autres interviennent également comme la déclinaison de la Lune ou la rotation de son orbite sur elle-même. Les marées océaniques traduisent ainsi les comportements du Soleil et de la Lune dans $\mathcal{R}_G$; et nous avons vu comment leur simple observation, sans moyen particulier, permet de remonter aux mouvements astronomiques.

2.3.2 Quelques idées à propos d'une théorie dynamique

Quand nous avons déduit, du champ de gravitation différentielle à la surface de la Terre, la forme des océans avec les deux bourrelets, nous avons supposé le système à l'équilibre. C'est pour cette raison que la théorie précédente est dite statique ; Newton fut le premier à interpréter les marées océaniques et il le fit de cette façon. Si la théorie statique permet d'expliquer plusieurs aspects du phénomène, elle présente tout de même un défaut majeur : les bourrelets océaniques ne se trouvent pas en réalité selon l'axe Terre-Lune. En effet, il faut attendre quelques heures après le passage de la Lune au zénith pour que la marée soit haute.

Puisque la Terre tourne sur elle-même et que le champ différentiel $\mathcal{G}(P) - \mathcal{G}(T)$ subi par l'eau à sa surface reste orienté selon l'axe Terre-Lune (fig.VI-5), un point donné de l'océan subit une excitation lunaire périodique, ayant une période T de l'ordre de 12 heures. La théorie statique s'appliquerait correctement, si le temps de réponse τ de l'océan était très inférieur à la période d'excitation. Nous pourrions dans ce cas considérer le système à l'équilibre à chaque instant, et négliger le régime transitoire. Mais τ est de l'ordre de la dizaine d'heures (il correspond au temps que mettrait une grosse vague pour parcourir le globe), c'est-à-dire de l'ordre de T , le retard de la réponse de l'océan sur le champ excitateur n'est donc pas négligeable. La marée haute a lieu quelques heures après le passage de la Lune au zénith (fig.VI-15).

Une conséquence de cet aspect dynamique des marées océaniques est le ralentissement de la rotation de la Terre sur elle-même. En effet, la Terre s'oppose par frottement au mouvement relatif de l'océan par rapport à elle ; en réaction, l'océan tend à la retenir pour qu'elle ne se déplace pas par rapport aux bourrelets. Les bourrelets étant quasiment fixes dans $\mathcal{R}_G$ sur l'échelle d'une journée, cela se traduit par un ralentissement de la rotation propre de la Terre dans ce référentiel. La durée du jour s'allonge ainsi en moyenne de 0,00164 seconde par siècle. Il y a 400 millions d'années, à l'épo-