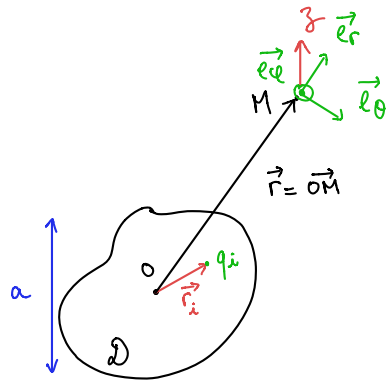




$$\vec{\pi}(r, \theta, \varphi, t) = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cdot \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \vec{e}_r$$

$$F(\theta, \varphi) = \frac{|\vec{\pi}(r, \theta, \varphi, t)|}{|\vec{\pi}(r, \theta_{\max}, \varphi_{\max}, t)|} = \sin^2 \theta$$

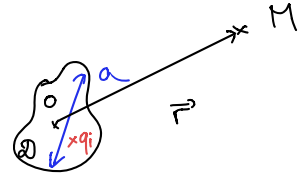
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left(\frac{\dot{p}(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{c \cdot |\vec{r}|} + \frac{\dot{p}(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{|\vec{r}|^2} \right) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[2 \cos \theta \left(\frac{p(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{r^3} + \frac{\dot{p}(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{r^2 c} \right) \vec{e}_r + \sin \theta \left(\frac{p(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{r^3} + \frac{\dot{p}(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{rc^2} \right) \vec{e}_\theta \right]$$

Rayonnement dipolaire

Resume :

- charge accélérée $\rightarrow$ énergie rayonnée sous forme d'un champ EM
- remise en question du modèle planétaire de Bohr, incompatible avec la stabilité de la matière
- champ rayonné : retard, anisotrope, décroissance $\propto \frac{1}{r}$, $|T| \propto \frac{1}{r}$ et conservation de l'énergie, $P \propto \omega^4$, structure locale $\vec{r}$ d'onde plane
- antennes de communication, résonance, antenne demi-onde
- Modèle de Lorentz : passe bas, $\omega_0 \leq 10^{16}$ Hz



Champ rayonné par des charges accélérées

Hypothèses (i) charges non relativistes $\rightarrow$ l'expression non relativiste du potentiel vectoriel est valable

$$|\vec{v}_i| \ll c \rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i \in D} \frac{q_i \vec{v}_i(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'_i|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

(ii) retard identique pour les points de la source $\rightarrow$ ARQS de la source

taille caract. de la source $a \ll \lambda c$ temps de variation des charges/courants de la source $\rightarrow \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) = \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}|}{c}) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i \in D} \frac{q_i \vec{v}_i(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

(iii) hypothèse dipolaire $\rightarrow$ zone de champ lointain

taille caract. de la source $a \ll |\vec{r}| = OM$ distance au barycentre O de la source $\rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i \in D} \frac{q_i \vec{v}_i(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{|\vec{r}|}$

Le moment dipolaire s'écrit $\vec{p} = \int_D d^3r' \rho(\vec{r}') \cdot \vec{r}' = \sum_{i \in D} q_i \vec{r}'_i$

$\rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{|\vec{r}|}$

retard

origine au barycentre des charges de D

Calcul de $\vec{B}$

On suppose que $\vec{p}(t) = p(t) \cdot \vec{e}_z \rightarrow$ vibration rectiligne. Par superposition on récupère les dipôles qui tournent en déphasant deux dipôles $\rightarrow$ pas de perte de généralité.

Alors $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{p}(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{|\vec{r}|} \cdot \vec{e}_z \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{\dot{p}(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{|\vec{r}|} \right) \times \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{-\ddot{p}(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{c \cdot |\vec{r}|} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \frac{\dot{p}(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) \times \vec{e}_z$

retard $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left(\frac{\ddot{p}(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{c \cdot |\vec{r}|} + \frac{\dot{p}(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{|\vec{r}|^2} \right) \vec{e}_\phi \propto \frac{1}{r}$ si charges accélérées

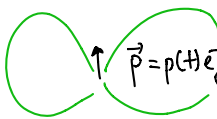
Champ électrique

En M, c'est une zone de courant nul par hypothèse $\rightarrow \vec{j} = \vec{0}$
 $\rightarrow \frac{d\vec{E}}{dt} = c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B}$

$\rightarrow \vec{E}(M, t) = \vec{E}(M, 0) + \int_0^t dt' \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t')$ — si on a $\vec{B}$, on a $\vec{E}$ en intégrant eq. Maxwell
 (attention, $\vec{\nabla} \times \vec{e}_\theta \neq 0$ — $-\frac{1}{R} \vec{e}_\phi$? — dépend de x, y, z)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[2 \cos \theta \left(\frac{p(t)}{r^3} + \frac{\dot{p}(t)}{r^2 c} \right) + \frac{Q_{tot}}{r^2} \right] \vec{e}_r + \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p(t)}{r^3} + \frac{\dot{p}(t)}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}(t)}{r c^2} \right] \vec{e}_\theta$$

retard

Commentaires :  $\vec{p} = p(t) \vec{e}_z$

$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ le champ est polarisé selon $\vec{e}_\theta$ ie rectilignement et $\parallel \vec{p}$ sur le plan horizontal.

• Zone de champ proche $a \ll r \ll cz$

c'est la limite quasistationnaire, plus de retard

$$\begin{cases} \vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{p}(t) \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\ \vec{E}(M, t) = \frac{3(\vec{p}(t) \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r - \vec{p}(t)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} \end{cases}$$

pas de retard, ce sont les champs dans la limite quasi-stationnaire

• Zone de champ lointain $a \ll cz \ll r$

la vitesse de propagation est primordiale

$$\begin{cases} \vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \sin \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{E}(M, t) = \frac{\ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \cdot \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

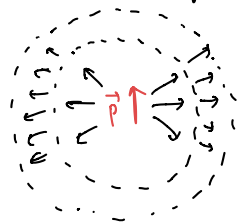
Commentaires : (i) décroissance $\frac{1}{r}$ plus lente que le $\frac{1}{r^2}$ statique $\rightarrow |\vec{E}| \propto \frac{1}{r^2}$, conservation de l'énergie

(ii) anisotropie : rayonnement nul sur l'axe de $\vec{p}$ maximal dans le plan $\perp \vec{p}$

(iii) propagation à vitesse c suivant $\vec{e}_r$

(iv) structure locale d'onde plane

(v) à longue distance, c'est l'accélération $\ddot{p}$ qui compte



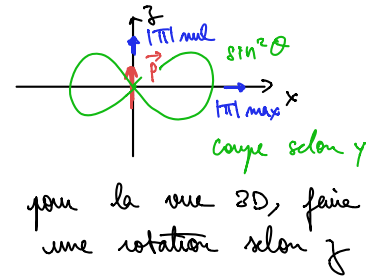
Aspect énergétique

En champ lointain,

$$\vec{\pi} = \frac{\mu_0 \ddot{p}(t - \frac{r}{c})}{(4\pi)^2 \cdot c \cdot r^2} \sin^2 \theta \vec{e}_r$$

- propagation selon $\vec{e}_r$
- $\sin^2 \theta \rightarrow$ anisotropie
- $|\pi| \propto \frac{1}{r^2} \rightarrow$ conservation de l'énergie

- Diagramme de rayonnement : on trace $\vec{r} = \frac{|\vec{\pi}(\vec{r}, t)|}{|\vec{\pi}(\vec{r}, t)|} \vec{e}_r$
 $\vec{r}$ et t fixes $\rightarrow \pi_{\max}$
 $(\theta, \varphi$ varient)
 $= \sin^2 \theta \vec{e}_r$



- puissance rayonnée sur une sphère :

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \cdot r^2 |\vec{\pi}| = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2(t - \frac{r}{c})}{6\pi c} \propto \ddot{p}^2(t)$$

indép de r

le ciel est bleu

- Pour un dipôle de Hertz : $P(t) = q \cdot a \cdot \cos(\omega t) \rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t') dt' = \frac{\mu_0 a^2 q^2}{12\pi} \omega^4$

Rayonnement d'antenne

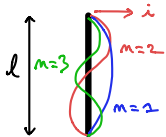
- Pour une antenne parcourue par un courant $i(t)$, le champ rayonné est obtenu en faisant

$$\ddot{p}(t) = \dot{i}(t) \cdot l$$

$P \propto \ddot{p}^2$ donc il faut augmenter l / diminuer z , on risque de sortir de l'AROS des sources

- Pour une antenne hors AROS, où $l \gg cz$, on la découpe en sous antennes vérifiant l'AROS et on utilise la superposition.

$$E(r, t) = \dots \propto \hat{f}(\theta) \leftarrow \text{TF de la répartition de courant}$$



- CL : $i=0$ aux extrémités

- condition de résonance : $l = m \frac{\lambda}{2}$, $m \in \mathbb{N}$: les extrémités de l'antenne sont des nœuds

"antennes demi-onde"

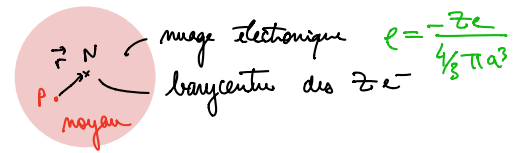
- Émission dirigée : on met des antennes : $\vec{\pi} \leftarrow |||| \rightarrow \vec{\pi}$

déphasage bien choisi $\rightarrow$ émission directionnelle, on peut jouer sur les lobes du diagramme de rayonnement

Rayonnement de la matière

Modèle de l'électron élastiquement lié :

$\vec{E}$



Hyp : (i) $\lambda \gg a \rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t)$ est uniforme sur l'atome
 λ du champ $\vec{E}$ rayon atome

(ii) $M_{\text{noyau}} \gg m_{e^-} \rightarrow$ noyau immobile

(iii) $v_e \ll c \rightarrow$ électrons non relativistes $\rightarrow \vec{F}_{\text{Lorentz}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

(iv) répartition sphérique des $Z \cdot e^- \rightarrow$ th. Gauss : $\vec{F}_{\text{noyau } e^-} = -\vec{F}_{e^-/\text{noyau}} = -Ze \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{r}{r^3} \vec{r} = -\frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r}$

(v) force de frottement $\vec{f} = -\frac{m_e}{Z} \dot{\vec{v}}$: modélise les collisions qui ralentissent
 ou perte d'énergie / déphase $\vec{p}$ par rapport à $\vec{E}$ (peut venir
 par rayonnement ? d'un PFD probabilité à la Dirac).

(vi) milieu dilué : les interactions dipolaires sont faibles $\rightarrow \vec{E}_{\text{local}} \approx \vec{E}_{\text{ext}}$.

PFD: $Z m_e \ddot{\vec{r}} = -\frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r} - Ze \vec{E}_{\text{ext}} - \frac{Z m_e}{Z} \dot{\vec{r}}$

On introduit le moment dipolaire $\vec{p} = Z \cdot e \cdot (-\vec{r})$

$$\ddot{\vec{p}} + \frac{1}{Z} \dot{\vec{p}} + \omega_0^2 \vec{p} = -\frac{Ze^2}{m_e} \vec{E}_{\text{ext}}(t)$$

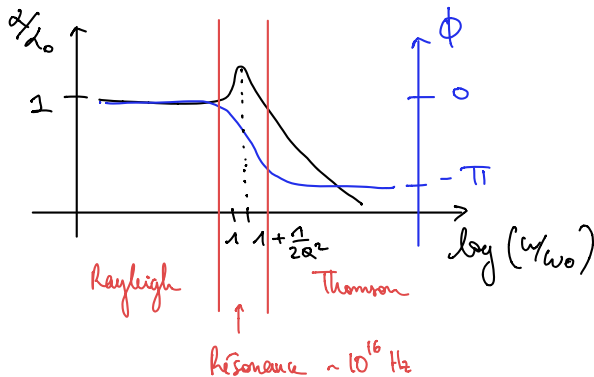
amortissement rappel harmonique forçage

ODQ: $\omega_0 \approx 10^{16} \text{ rad/s}$, $Q \approx \omega_0 \cdot Z \approx 10^8$

$$\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m_e}, \quad Z$$

pulsation propre temps d'amortissement (relaxation)

• En RSF à la pulsation ω : $\vec{p}_\omega = \frac{Ze^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{Z}} \vec{E}_\omega = \frac{\alpha_0}{1 - x^2 + i\frac{x}{Z\omega_0}} \vec{E}_\omega$ $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{Ze^2}{m_e \omega_0^2} = 4\pi a^3 \\ x = \frac{\omega}{\omega_0} \end{array} \right.$



fitte passe bas du 2nd ordre

polarisabilité atomique

avec $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$

$$\alpha = f \cdot \frac{Ze^2}{m_e \epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{Z}}$$

force de l'oscillateur (ad-hoc)

• $\omega \ll \omega_0$: régime de Rayleigh, $\alpha \approx \alpha_0$ polarisabilité statique, oscillation de $\vec{p}$ en phase avec $\vec{E}_{\text{ext}}$

• $\omega \approx \omega_r = \omega_0(1 + \frac{1}{2Q^2}) \approx \omega_0$ car $Q \gg 1$. Ex: $Q \sim 10^8$ pour le césium. L'amplitude de $|\alpha|$ est max.

• $\omega \gg \omega_0$: régime de Thomson. $|\alpha|$ décroît en $\frac{1}{\omega^2}$. oscillation en opposition de phase

NB: Dans le modèle de Lorentz, la force dissipative dissipe la puissance $P \propto \vec{f} \cdot \vec{v} \propto v^2 \propto \omega^2$
 alors que la puissance rayonnée est en ω^4 . En fait, pour $t \gg \frac{1}{\omega_0}$,
 Rayonnement $\ll P_{\text{dissip}}$. En effet, comparer

NB : en électromagnétisme classique, le mouvement d'un électron est affecté par sa propre émission électromagnétique. On décrit cet effet par l'équation de Abraham-Lorentz.

$$\ddot{\vec{r}} - \frac{e^2}{3} \frac{r_0}{c} \dddot{\vec{r}} = \frac{e}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

amortissement

avec $r_0 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{m_e c^2} \simeq 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

le rayon classique de l'électron

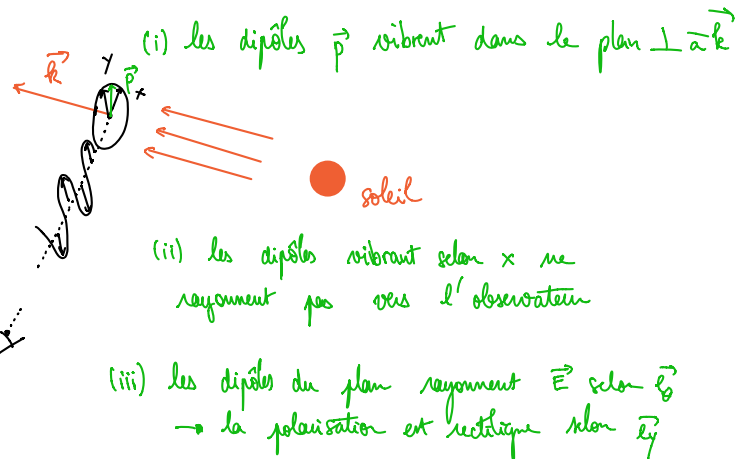
Cas du ciel, lumière visible

• $\omega_{\text{visible}} \simeq 10^{14} \text{ Hz} \ll \omega_0 \simeq 10^{16} \text{ Hz} \rightarrow$ les particules du ciel sont dans le régime de Rayleigh.

• $P_{\text{Rayleigh}} = \frac{\mu_0 |\rho(\omega)|^2 \omega^4}{12\pi c} = \frac{\mu_0 |\alpha(\omega)|^2 E \omega^2 \omega^4}{12\pi c} = \frac{\mu_0 \alpha_0^2 E \omega^2 \omega^4}{12\pi c} \propto \omega^4$

- couleur bleue du ciel
- couleur rouge du coucher de soleil
- la lumière diffusée dans le ciel est polarisée

(iv) L'observateur qui regarde perpendiculairement à la propagation voit une lumière polarisée



Compléments

• Pour les grosses particules, $a \sim \lambda$, le modèle de Lorentz ne marche plus, c'est la diffusion de Mie.