L'abscisse curviligne s n'est pas fixe en A et B : s_{max} dépend de $\mathscr{C}$.
On ne peut pas appliquer les équations d'Euler-Lagrange tel quel.
On doit reparamétriser par un paramètre quelconque u, fixe en A et B. ex : $u = d(A,M)$

$$\underset{\text{action effective}}{L_{AB}[\mathscr{C}]} = \int_a^b \underbrace{n(\vec r(u))\ \|\dot{\vec r}(u)\|}_{\text{lagrangien effectif}}\ du \qquad \text{où} \qquad \dot{\vec r}(u) = \frac{d\vec r}{du}$$

paramètre ("temps")

Euler-Lagrange :
$$\frac{d}{du}\left(\vec{\text{grad}}_{\dot{\vec r}}\left(n\ \|\dot{\vec r}(u)\|\right)\right) = \vec{\text{grad}}_{\vec r}\left(n\ \|\dot{\vec r}(u)\|\right)$$

$$\vec{\text{grad}}\left(\|\vec r\|\right) = \frac{\vec r}{\|\vec r\|}$$

$$\frac{d}{du}\left(n \cdot \overbrace{\frac{\dot{\vec r}(u)}{\|\dot{\vec r}(u)\|}}^{\vec u}\right) = \vec{\text{grad}}(n)\ \|\dot{\vec r}(u)\|$$

$$ds = du\ \|\dot{\vec r}(u)\|$$

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(n\,\vec u\right) = \vec{\text{grad}}\ n} \qquad \text{où} \qquad \frac{\dot{\vec r}(u)}{\|\dot{\vec r}(u)\|} = \vec u \quad \text{unitaire tangent}$$

eikonale

Equations d'Euler-Lagrange
$$S[q] = \int_{t_a}^{t_b} L(q(t), \dot q(t), t)\ dt$$

$$\delta S = 0 \iff \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

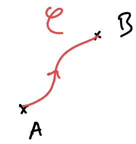
Prérequis

Optique géométrique (lycée)
Équations d'Euler - Lagrange
Électromagnétisme : Poynting, indice optique

Introduction

I) 1.

$$|\vec{\nabla} A| \ll \frac{|A|}{\lambda} \quad \text{où} \quad A = \varepsilon_r, \mu_r, E_x, \dots, B_x, \dots$$



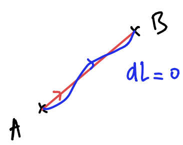
2. temps de vol

abscisse curviligne

$$T = \int_{\mathcal{C}} dt = \int_{\mathcal{C}} \frac{ds}{v} = \int_{\mathcal{C}} \frac{n\, ds}{c}$$

chemin optique $L_{AB}[\mathcal{C}] = T.c = \int_{\mathcal{C}} n\, ds$

3. $L_{AB}[\mathcal{C}] = \int_{\mathcal{C}} n\, ds$



principe variationnel : la lumière suit $\mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$ $\delta L_{AB}[\mathcal{C}] = 0$

mécanique analytique la particule suit $q(t)$ entre t_A et t_B $\Leftrightarrow$ $\delta S[q] = 0$

$$S[q] = \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$

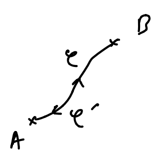
II) 1.

$$L_{AB}[\mathcal{C}] = \int_{\mathcal{C}} n\, ds = n \underbrace{\int_{\mathcal{C}} ds}_{\text{longueur géométrique de } \mathcal{C}} = n\, l_{AB}[\mathcal{C}]$$

$dl_{AB}[\mathcal{C}] = 0 \Leftrightarrow \mathcal{C}$ ligne droite

orienté de B vers A

2. $$L_{AB}[\mathcal{C}] = \int_{\mathcal{C}} n\, ds = \int_{\mathcal{C}'} n\,(-ds) = \int_{\mathcal{C}'} n\, ds' = L_{BA}[\mathcal{C}']$$



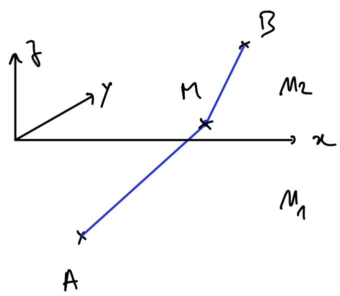
chemin inverse de $\mathcal{C}$

orienté de A vers B

Réflexion :

3.

Réfraction :

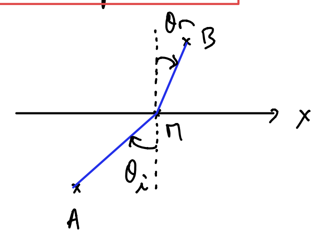


On choisit z normal au dioptre
l'orientation de (x,y) tq $y_A = y_B = 0$

$$L(x,y) = n_1 AM + n_2 MB$$
$$= n_1\sqrt{(x-x_A)^2 + y^2 + z_A^2} + n_2\sqrt{(x-x_B)^2 + y^2 + z_B^2}$$

$$\delta L = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

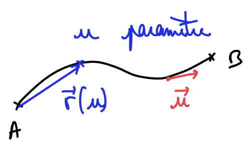
- $\frac{\partial L}{\partial y} = n_1 \frac{y}{AM} + n_2 \frac{y}{MB} = 0 \longrightarrow y = 0 \rightarrow$ $\boxed{A, M, B \text{ coplanaires}}$



on retrouve la première loi de Descartes

- $\frac{\partial L}{\partial x} = n_1 \frac{x - x_A}{AM} + n_2 \frac{x - x_B}{MB} = \boxed{n_1 \sin\theta_i - n_2 \sin\theta_r = 0}$

III) 1. $L_{AB}[\mathcal{C}] = \int_{\mathcal{C}} n\, ds = \int_0^{s_{max}} n\, ds$



$\mathcal{C} : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}^3$
$u \longrightarrow \vec{r}(u)$
$\mathcal{C}(a) = A \quad \mathcal{C}(b) = B$

L'abscisse curviligne s n'est pas fixe en A et B : s_{max} dépend de $\mathcal{C}$.
On ne peut pas appliquer les équations d'Euler - Lagrange tel quel.
On doit reparamétriser par un paramètre quelconque u, fixe en A et B. ex : $u = d(A, M)$

$$\underbrace{L_{AB}[\mathcal{C}]}_{\text{action effective}} = \int_a^b \underbrace{n(\vec{r}(u))\ \|\dot{\vec{r}}(u)\|}_{\text{lagrangien effectif}}\ du$$ paramètre ("temps")

où $\dot{\vec{r}}(u) = \frac{d\vec{r}}{du}$

Euler - Lagrange :

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial\left(n\ \|\dot{\vec{r}}(u)\|\right)}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) = \frac{\partial\left(n\ \|\dot{\vec{r}}(u)\|\right)}{\partial \vec{r}}$$ notation abusive pour gradient

$\vec{\text{grad}}(\|\vec{r}\|) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$

$$\frac{d}{du}\left(n \cdot \overbrace{\frac{\dot{\vec{r}}(u)}{\|\dot{\vec{r}}(u)\|}}^{\vec{u}}\right) = \vec{\text{grad}}(n)\ \|\dot{\vec{r}}(u)\|$$

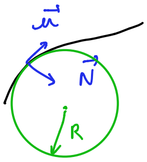
$ds = du\ \|\dot{\vec{r}}(u)\|$

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(n\,\vec{u}\right) = \vec{\text{grad}}\ n}$$ où $\frac{\dot{\vec{r}}(u)}{\|\dot{\vec{r}}(u)\|} = \vec{u}$ unitaire tangent

eikonale

milieu homogène : $\vec{\text{grad}}\, n = 0$ $\quad n\vec{u} = \text{cste} \to \vec{u} = \text{cste} \to$ ligne droite

non-homogène



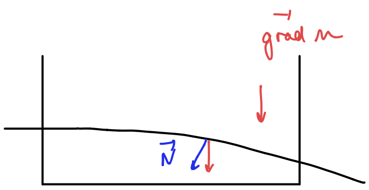
on développe en base de Frenet

$$\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \frac{dn}{ds}\vec{u} + n\frac{\vec{N}}{R} = \vec{\text{grad}}\, n$$

$\cdot \vec{N}$

$$\frac{n}{R} = \vec{N}\cdot\vec{\text{grad}}\, n \geq 0$$

R>0 par définition de $\vec{N}$



le rayon se courbe vers les grands indices

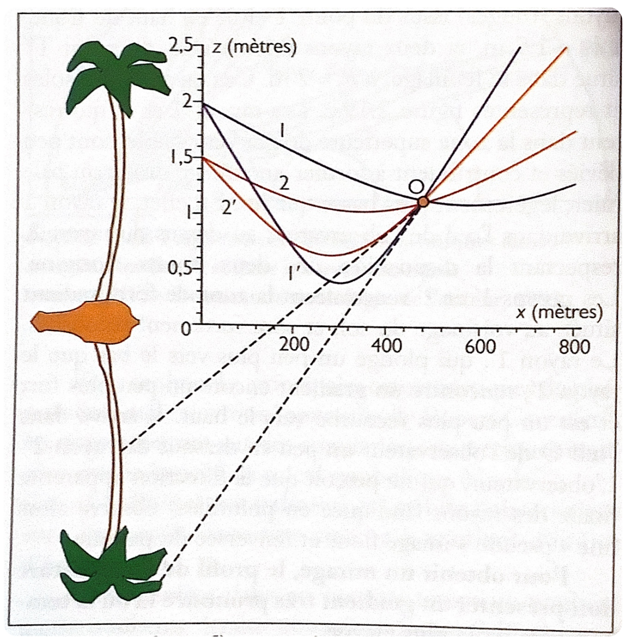
2. PFD $\quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad \frac{d(p\vec{u})}{ds} = \frac{\vec{F}}{v} \quad \leftrightarrow \quad \frac{d(n\vec{u})}{ds} = \vec{\text{grad}}\, n$

unitaire tangent

$m \leftrightarrow$ unité

$v \leftrightarrow n$

$\vec{F} \leftrightarrow n\,\vec{\text{grad}}\, n = \vec{\text{grad}}\,\frac{n^2}{2}$



3.

Fibre optique à gradient d'indice

On remplace le coeur par un milieu inhomogène d'indice $n^2(r) = n_1^2\left(1 - 2\Delta\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right)$
où $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$

L'équation eikonale $\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \vec{\nabla} n$ donne $\frac{d}{ds}\left(n(r)\cos\alpha(r)\,\vec{u_z} + n(r)\sin\alpha(r)\,\vec{u_r}\right) = \frac{dn}{dr}\vec{u_r}$

D'où $\boxed{n(r)\cos\alpha(r) = cte} = n_1\cos\theta_0$ ← angle d'entrée

or $\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \left(\frac{n(r)}{n_1\cos\theta_0}\right)^2 - 1 = \frac{1 - 2\Delta\left(\frac{r(z)}{r_1}\right)^2}{\cos^2\theta_0} - 1$

En dérivant, $2.\frac{d^2r}{dz^2}.\frac{dr}{dz} = -\frac{2\Delta}{(r_1\cos\theta_0)^2}.2.\frac{dr}{dz}.r \rightarrow \boxed{r'' + \frac{2\Delta}{(r_1\cos\theta_0)^2}\,r = 0}$ OH

CI : $r(z=0) = 0$
$\frac{dr}{dz}(z=0) = \tan\theta_0$
$\rightarrow \boxed{r(z) = \frac{r_1\sin\theta_0}{\sqrt{2\Delta}}\sin\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{r_1\cos\theta_0}.z\right)}$ trajectoire sinusoïdale

(cf. BUP) l'ouverture numérique reste la même
l'élargissement des signaux est plus faible (comparé au saut d'indice)