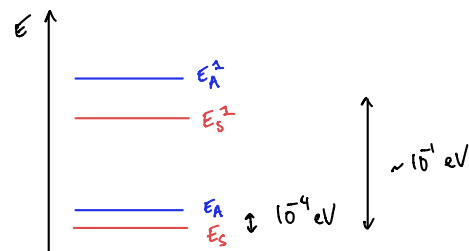


I.

2 On ne s'intéresse qu'aux deux premiers niveaux E_S et E_A car dès 100 K la statistique de Boltzmann donne

$$\frac{N(E_A)}{N(E_S)} \sim e^{-\frac{E_A - E_S}{k_B T}} \sim 1 \quad \left(\begin{array}{l} k_B T_{\text{ambiant}} \sim 25 \text{ meV} \\ k_B (100 \text{ K}) \sim 9 \text{ meV} \end{array} \right)$$

$$\frac{N(E_S')}{N(E_S)} \sim \frac{N(E_A')}{N(E_A)} \sim 10^{-5} \ll 1$$



Seuls les niveaux E_S et E_A sont peuplés significativement.

↳ le problème se restreint à un espace à 2 dimensions.

• Dans la base $| \psi_S \rangle, | \psi_A \rangle$, le hamiltonien s'écrit

$$\text{avec } E_0 = \frac{E_A + E_S}{2}, \quad A = \frac{E_A - E_S}{2}$$

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_S & 0 \\ 0 & E_A \end{pmatrix}_{AS} = \begin{pmatrix} E_0 - A & 0 \\ 0 & E_0 + A \end{pmatrix}_{AS}$$

3.

• Si $| \psi(t) \rangle = \lambda | \psi_S \rangle + \mu | \psi_A \rangle$, $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1$ $| \psi(t) \rangle = \lambda e^{-\frac{i E_S t}{\hbar}} | \psi_S \rangle + \mu e^{-\frac{i E_A t}{\hbar}} | \psi_A \rangle$

• si à $t=0$, la particule est à gauche, $\lambda = \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $| \psi_S \rangle = \frac{| \psi_A \rangle + | \psi_0 \rangle}{\sqrt{2}}$

$$| \psi(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i E_0 t}{\hbar}} \left(e^{\frac{i A t}{\hbar}} | \psi_S \rangle + e^{-\frac{i A t}{\hbar}} | \psi_A \rangle \right) = e^{-\frac{i E_0 t}{\hbar}} \left(\cos\left(\frac{A}{\hbar} t\right) | \psi_G \rangle + i \sin\left(\frac{A}{\hbar} t\right) | \psi_D \rangle \right)$$

↳ toutes les demi-périodes $\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{T_{\text{inv}}} \right) = \frac{A}{\hbar} \rightarrow T_{\text{inv}} = \frac{\pi \hbar}{A}$ la molécule d'ammoniac s'inverse

$$\text{OOG} : \frac{1}{T_{\text{inv}}} \sim 24 \text{ GHz}$$

on pourrait calculer $\langle z \rangle = \langle \psi | \hat{z} | \psi \rangle = z_0 \cos\left(\frac{2A}{\hbar} t\right)$

Dans la base $| \psi_G \rangle, | \psi_D \rangle$ $| \psi_S \rangle = \frac{| \psi_A \rangle + | \psi_0 \rangle}{\sqrt{2}}$, le hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}_{GD}$$

II 1.

$$\vec{d} = q_0 z \vec{e}_z \rightarrow \hat{D} = q_0 \hat{z} = q_0 \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}_{GS} = d_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\hat{\sigma}_z}_{GS}$$

On suppose pour simplifier que $\vec{E}$ est selon l'axe de symétrie de révolution / l'axe de $\vec{d}$

dans la base $(|\psi_s\rangle, |\psi_A\rangle)$, $\langle \psi_A | \hat{z} | \psi_s \rangle = \langle \frac{\psi_A - \psi_D}{\sqrt{2}} | \hat{z} | \frac{\psi_A + \psi_D}{\sqrt{2}} \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b = b \stackrel{\text{hermitique}}{=} \langle \psi_s | \hat{z} | \psi_A \rangle$

$\langle \psi_A | \hat{z} | \psi_A \rangle = 0$ évident! $\rightarrow \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}_{AS}$

principe de correspondance

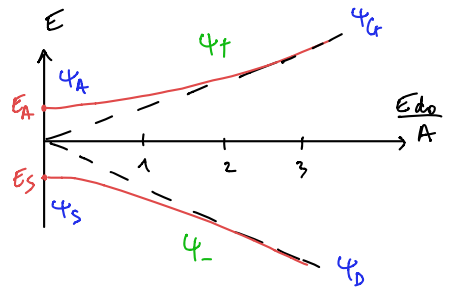
$\hat{D} = d_0 \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 & d_0 \\ d_0 & 0 \end{pmatrix}_{AS}$ et $\hat{V} = -\vec{E} \cdot \hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta \\ -\eta & 0 \end{pmatrix}_{AS}$ avec $\eta = E \cdot d_0$

En champ fixe, $\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 - A & -\eta \\ -\eta & E_0 + A \end{pmatrix}_{AS} \stackrel{\text{pd. caractéristique}}{=} E_0 \hat{I} + \eta \hat{\sigma}_x - A \hat{\sigma}_z$

$(X - E_0 + A)(X - E_0 - A) - \eta^2 = 0$
 $(X - E_0)^2 = A^2 + \eta^2$
 $X = E_0 \pm \sqrt{A^2 + \eta^2}$

avec $\tan 2\theta = \frac{\eta}{A}$
 $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$

$\hat{H} = E_0 \hat{I} - \sqrt{A^2 + \eta^2} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$



les valeurs propres sont
 les états propres sont

$E_{\pm} = E_0 \pm \sqrt{\eta^2 + A^2}$
 $|\psi_{-}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ $|\psi_{+}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$

Validité du calcul : pour continuer de négliger l'influence des niveaux de plus haute énergie, il faut $E_{+} - E_{-} \ll E_s^2 - E_s$ donc ne pas imposer un champ trop intense.

Champ faible : $\frac{\eta}{A} \ll 1, \theta \ll 1 \rightarrow E_{\pm} \approx E_0 \pm (A + \frac{d_0^2 E^2}{2A})$

$|\psi_{-}\rangle \approx |\psi_s\rangle + \frac{d_0 E}{-2A} |\psi_A\rangle$ $|\psi_{+}\rangle \approx |\psi_A\rangle - \frac{d_0 E}{2A} |\psi_s\rangle$

les états propres sont proches de $|\psi_s\rangle$ et $|\psi_A\rangle$

Champ fort $\frac{\eta}{A} \gg 1, \theta \approx \frac{\pi}{4}$ $E_{\pm} \approx E_0 \pm d_0 E$

$|\psi_{-}\rangle \approx |\psi_A\rangle$ $|\psi_{+}\rangle \approx |\psi_D\rangle$

les états propres sont presque entièrement polarisés.
 les énergies sont $\sim$ linéaires en E .

Commentaires : • on peut sélectionner les états $|\psi_{+}\rangle, |\psi_{-}\rangle$ avec un gradient de champ électrique $\rightarrow$ rupture de l'équilibre thermodynamique $\rightarrow$ inversion de population

• pour raffiner le modèle, il faudrait prendre en compte les moments cinétiques, le clivage hyperfin ...

Champ oscillant, émission stimulée, effet maser

le champ électrique est désormais oscillant $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$, $\vec{E}_0$ selon x .

le hamiltonien devient, dans la base $(| \psi_s \rangle, | \psi_A \rangle)$
 le potentiel dépend du temps, il faut résoudre la version temporelle de l'équation de Schrödinger.

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 - A & -\mu \cos(\omega t) \\ -\mu \cos \omega t & E_0 + A \end{pmatrix}$$

En posant $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ et en injectant dans $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$

par la version stationnaire!

$$\begin{cases} i\hbar \dot{a} = (E_0 - A) \cdot a - \mu \cos(\omega t) b \\ i\hbar \dot{b} = -\mu \cos \omega t a + (E_0 + A) b \end{cases}$$

On pose $a(t) = e^{-i \frac{(E_0 - A)t}{\hbar}} \alpha(t)$ et $b(t) = e^{-i \frac{(E_0 + A)t}{\hbar}} \beta(t)$ variation de la constante

alors $i\hbar e^{-i \frac{(E_0 - A)t}{\hbar}} \left(-i \frac{(E_0 - A)}{\hbar} \alpha + \dot{\alpha} \right) = (E_0 - A) e^{-i \frac{(E_0 - A)t}{\hbar}} \alpha - \mu \cos(\omega t) e^{-i \frac{(E_0 + A)t}{\hbar}} \beta$
variation de la constante

$$\begin{cases} i\hbar \dot{\alpha} = -\mu \cos(\omega t) e^{-i \frac{2At}{\hbar}} \beta \\ i\hbar \dot{\beta} = -\mu \cos(\omega t) e^{i \frac{2At}{\hbar}} \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\dot{\alpha} = -\omega_1 \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} \beta \\ i\dot{\beta} = -\omega_1 \cos(\omega t) e^{i\omega_0 t} \alpha \end{cases}$$

3 pulsations
 ω champ électrique
 $\omega_0 = \frac{2A}{\hbar}$ pulsation de transition
 $\omega_1 = \frac{\mu}{\hbar} = \frac{d_0 E_0}{\hbar}$ champ - dipôle

On étudie des oscillations forcées et on attend une résonance à $\omega = \omega_0$

Approximation du champ tournant : on néglige les termes oscillant rapidement à $\omega + \omega_0$

$$\begin{cases} i\dot{\alpha} = -\omega_1 \frac{1}{2} \left(e^{i(\omega - \omega_0)t} + e^{-i(\omega + \omega_0)t} \right) \beta \\ i\dot{\beta} = -\omega_1 \frac{1}{2} \left(e^{i(\omega + \omega_0)t} + e^{-i(\omega - \omega_0)t} \right) \alpha \end{cases}$$

$$\ddot{\alpha} \begin{cases} 2i\dot{\alpha} = -\omega_1 e^{i(\omega - \omega_0)t} \beta \\ 2i\dot{\beta} = -\omega_1 e^{i(\omega_0 - \omega)t} \alpha \end{cases}$$

$$\beta(\dot{\alpha}) \begin{cases} 2i\dot{\alpha} = -\omega_1 e^{i(\omega - \omega_0)t} \left(i(\omega - \omega_0) \beta - \frac{\omega_1}{2i} \alpha \right) \\ 2i\dot{\beta} - i(\omega - \omega_0) 2i\dot{\alpha} - \frac{\omega_1^2}{2i} \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\alpha} - i(\omega - \omega_0) \dot{\alpha} + \frac{\omega_1^2}{4} \alpha = 0$$

$$\Delta = -(\omega - \omega_0)^2 - \omega_1^2$$

$$\begin{cases} \alpha(t) = e^{\frac{i(\omega - \omega_0)t}{2}} \left(A \cos \frac{\Omega t}{2} + B \sin \frac{\Omega t}{2} \right) \\ \beta(t) = e^{\frac{i(\omega - \omega_0)t}{2}} \left(A' \cos \frac{\Omega t}{2} + B' \sin \frac{\Omega t}{2} \right) \end{cases}$$

$$r_{\pm} = \frac{i(\omega - \omega_0) \pm i\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + (\omega_0 - \omega)^2}$$

pulsation de Rabi

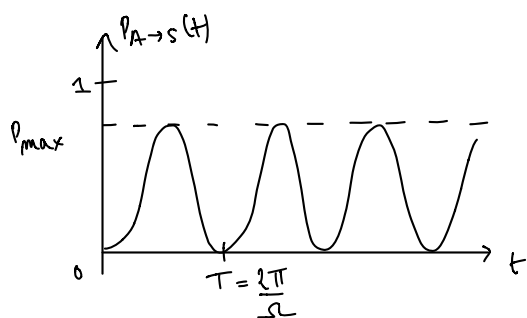
Si à $t=0$, $|4\rangle = |4_A\rangle$, $\alpha(0) = 0 \rightarrow A = 0$
 $\beta(0) = 1 \rightarrow \dot{\alpha}(0) = \frac{i\omega_1}{2}$, $\dot{\alpha}(t) = B e^{i(\frac{\omega-\omega_0}{2})t} \left(i\frac{\omega-\omega_0}{2} \sin \frac{\Omega t}{2} + \frac{\Omega}{2} \cos \frac{\Omega t}{2} \right)$
 $\rightarrow B = \frac{i\omega_1}{\Omega}$

$$\alpha(t) = e^{i\frac{(\omega-\omega_0)t}{2}} \cdot \frac{\omega_1}{\Omega} \cdot \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

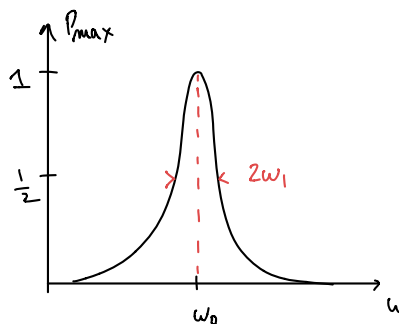
Probabilité de mesurer le système en $|4_S\rangle$ après l'avoir préparé en $|4_A\rangle$ et attendu un temps t

$$P_{A \rightarrow S}(t) = |\alpha(t)|^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \quad \text{oscillations de Rabi}$$

$$P_{\max} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \quad \text{amplitude des oscillations}$$



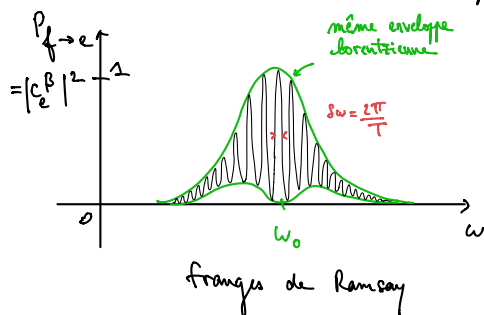
évolution temporelle



courbe de résonance

I. 2) interférométrie de Ramsey

$$|f\rangle \xrightarrow{\text{impulsion } \frac{\pi}{2}} \frac{|e\rangle + |f\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{B éteint pendant temps } T} |e\rangle \xrightarrow{\text{impulsion } \frac{\pi}{2}} |\beta\rangle = c_e^\beta |e\rangle + c_f^\beta |f\rangle$$



Analogie avec les interférences en biréfringence

Utilisation d'atomes froids

- froids $\rightarrow$ vitesse lente du paquet d'ondes
 - $\rightarrow$ augmente le temps d'interaction T
 - $\rightarrow$ augmente la résolution
- froids $\rightarrow$ faible dispersion des vitesses
 - $\rightarrow$ faible élargissement Doppler des raies

Ramsey

préparation dans $|f\rangle$
 impulsion $\frac{\pi}{2}$
 2 niveaux $|e\rangle, |f\rangle$
 évolution libre en T
 $\rightarrow$ 2 pulsations ω_e, ω_f
 $\rightarrow$ les composantes c_e et c_f se déphasent

mesure de c_e
 courbe de résonance

Biréfringence

polariseur en entrée
 lame quart d'onde
 2 polarisations $|h\rangle, |v\rangle$
 milieu biréfringent d'épaisseur e
 $\rightarrow$ 2 indices n_o, n_e
 $\rightarrow$ les polarisations $|h\rangle$ et $|v\rangle$ se déphasent

analyseur en sortie
 spectre cannelé

