Raffinements

Drude

$\downarrow$ stat. fermionique

Sommerfeld e^- libre

$\downarrow$ pot. périodique

Bloch ondes Bloch

$\downarrow$ int. e^- e^-

Landau liquide Fermi

"valide"

Gaz de fermions

<u>Historique</u> : 1925 : principe d'exclusion de Pauli
1926 : statistique de Fermi-Dirac
Sommerfeld généralise la théorie de Drude des métaux pour incorporer la statistique de Fermi

<u>Système</u> : • N électrons dans une boîte de taille $V = L^3$
• CL périodiques

→ états propres : ondes planes $|\psi_{\vec{k}}\rangle = \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{V}}$, vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)$

Énergie $\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$, occupation $f_{FD}\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}$

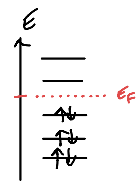
Équations : $N = \overset{\text{spin}}{2} \sum_{\vec{k}} f_{FD}\left(\frac{\varepsilon(\vec{k})-\mu}{kT}\right) = 2\frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\, f_{FD}\left(\frac{\varepsilon(\vec{k})-\mu}{kT}\right) = 2\frac{V}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\, 4\pi k^2 f_{FD}\left(\frac{\varepsilon(k)-\mu}{kT}\right)$

définition de $\mu(T)$

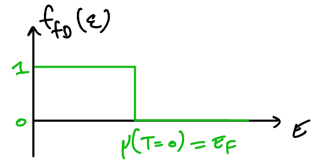
$$\boxed{\begin{aligned} N &= 2.\frac{V}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\, 4\pi k^2 f_{FD}\left(\frac{\varepsilon(k)-\mu}{kT}\right) = V\int_0^\infty d\varepsilon\, g(\varepsilon)\, f_{FD}\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right) \\ E &= 2.\frac{V}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\, 4\pi k^2\, \varepsilon(k)\, f_{FD}\left(\frac{\varepsilon(k)-\mu}{kT}\right) = V\int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon . g(\varepsilon) . f_{FD}\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right) \end{aligned}}$$

Énergie de Fermi

L'énergie de Fermi est le potentiel chimique à T = 0 K. $\boxed{E_F = \mu(T=0)\ K}$
pas nécessairement l'énergie de l'état occupé le plus énergétique →
notamment pour les niveaux d'énergie discrets.



On calcule E_F, k_F, v_F, T_F avec $f_{FD} \xrightarrow[T\to 0]{}$



calcul de k_F

$$\boxed{N = 2\frac{V}{(2\pi)^3}\int_0^{k_F} dk\, 4\pi k^2 = 2.\frac{V}{(2\pi)^3}\left(\frac{4}{3}\pi k_F^3\right)} \rightarrow k_F = \left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}}{2m}$$

<u>ODG</u> : cuivre $E_F \sim 7\,eV$
$T_F \sim 80\,000$ K
$v_F \sim 0.01\ c$

$$\boxed{\begin{aligned} &k_F \propto \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad E_F \propto \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &E(T=0\,K) = \frac{3}{5} N E_F \end{aligned}}$$

Densité d'états en énergie

d'états $(\vec{k}, \vec{\sigma})$ par unité d'énergie par unité de volume

<u>Méthode</u> : $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \rightarrow d\varepsilon = \frac{\hbar^2}{m} k\, dk = \frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}\, dk = \left(\frac{2\hbar^2\varepsilon}{m}\right)^{\frac{1}{2}} dk$

$$g(\varepsilon)\, d\varepsilon = g(k)\, dk = \frac{\overset{\text{spin}}{2}}{(2\pi)^3} 4\pi k^2\, dk = \frac{2}{(2\pi)^3} 4\pi\left(\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}\right)\left(\frac{m}{2\hbar^2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon = \underbrace{\frac{2^{\frac{1}{2}}\, m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\varepsilon^{\frac{1}{2}}}_{g(\varepsilon)} d\varepsilon$$

$$\hookrightarrow \boxed{g(\varepsilon) = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\varepsilon^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\frac{N}{V}\cdot\frac{1}{E_F}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_F}\right)^{\frac{1}{2}} \propto \varepsilon^{\frac{1}{2}}} \qquad g(\varepsilon_F) \propto \frac{1}{E_F}$$

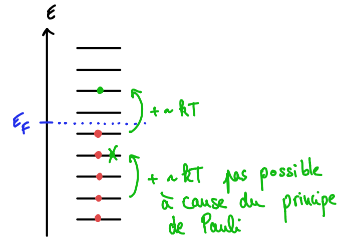
Capacité calorifique

Il faudrait calculer $\mu(T)$, injecter dans $E(T) = V\int_0^{\infty} d\varepsilon\,.\,\varepsilon\,.\,g(\varepsilon)\,.\,f_{FD}\left(\frac{\varepsilon-\mu(T)}{k_B T}\right)$ puis dériver $C_V = \frac{dE}{dT}$

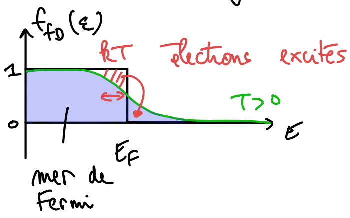
(i) approche avec les mains

* par le principe de Pauli, seuls les électrons d'énergie proches de $E_F \pm kT$ peuvent être excités
* par symétrie de f_{FD} : $f_{FD}\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right) = 1 - f_F\left(\frac{\mu-\varepsilon}{kT}\right)$

$$\mu(T) = \underbrace{\mu(T=0)}_{E_F} + O\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 \qquad \text{[Ashcroft]}$$



* les électrons proches de la surface, au nombre de $\sim V.g(E_F).kT$ seront excités de $\sim kT$.



↳ $E(T) \simeq E(T=0) + \frac{\pi^2}{6}\left(V g(E_F).kT\right)(kT)$

développement de Sommerfeld

↳ $$\boxed{C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{3Nk_B}{2}\right)\left(\frac{T}{T_F}\right) \propto T}$$

capacité calorifique des électrons d'un métal ← $C_V \propto T$ domine à basse température