<u>méthode 2</u> : approximation au 1^{er} ordre NL (valable plus loin que l'isochronisme).

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) \simeq 0$$

ne sert à grand chose ... on peut l'ommettre

<u>ansatz</u> : $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t) + \varepsilon\, \theta_0 \sin(3\omega t)$ — hyp $\varepsilon \ll 1$.

motivé par $\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin(3\theta)$

↳ en injectant dans le SD,

$$\theta_0(-\omega^2)\sin\omega t + \varepsilon\,\theta_0\left(-(3\omega)^2\right)\sin(3\omega t) + \omega_0^2\,\theta_0 \sin\omega t + \varepsilon\,\theta_0\,\omega_0^2 \sin(3\omega t) + \dots$$

$$- \frac{\omega_0^2}{6}\,\theta_0^3\,\underbrace{\sin^3(\omega t)}_{\frac{3}{4}\sin\omega t - \frac{1}{4}\sin(3\omega t)} + O(\varepsilon)$$

$$0 = \theta_0 \sin(\omega t)\left\{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2\theta_0^2}{8}\right\} + \theta_0 \sin(3\omega t)\left\{\varepsilon\,\omega_0^2 - 9\varepsilon\,\omega^2 + \frac{\omega^2\theta_0^2}{24}\right\} + K \sin(5\omega t)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right) \rightarrow \boxed{T = T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)}$$

Formule de Borda

l'annulation donne

$$\varepsilon \simeq \frac{\theta_0^2}{192}$$

Rayleigh

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = -x + v - v^3$$

$$\ddot{v} = -v + \dot{v} - \dot{v}.3.v^2$$
$$= -v + \dot{v}(1 - 3v^2)$$
$$= -v + u(1 - 3v^2)$$

$v \rightarrow x$

$u \rightarrow \dot{x}$

$$\boxed{\ddot{x} + \dot{x}(3x^2 - 1) + x = 0}$$

chgt échelle

$$\boxed{\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0}$$

Van der Pol

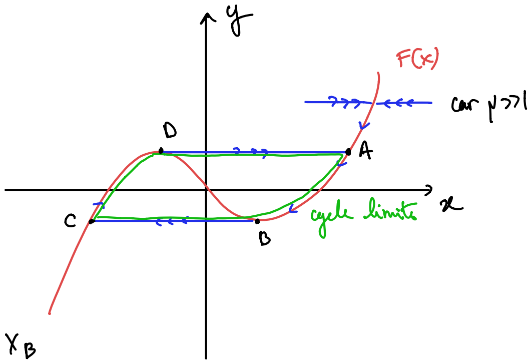
* OH + dissipation NL
* friction > 0 si $|x| > 1$
  < 0 si $|x| < 1$

oscillations de relaxation → Strogatz

analyse du plan de phase lorsque $\mu \gg 1$

$$\ddot{x} + \mu(x^2-1)\dot{x} = -x$$
$$= \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\dot{x} + \mu\underbrace{\left(\frac{x^3}{3} - x\right)}_{F(x)}\right)}_{\omega}$$

$$\begin{cases} \dot{\omega} = -x \\ \omega = \dot{x} + \mu F(x) \end{cases}$$



On pose $y = \frac{\omega}{\mu}$, on a : $\begin{cases} \dot{x} = \mu(y - F(x)) \\ \dot{y} = -\frac{x}{\mu} \end{cases}$

imaginer $\mu \sim 10^5$

estimation de la période lorsque $\mu \gg 1$

$$T = T_{AB} + \underbrace{T_{BC}}_{\text{négligeables}} + T_{CD} + \underbrace{T_{DA}}_{} \underset{\text{symétrie}}{\simeq} 2\,T_{AB} = 2\int_{t_A}^{t_B} dt = 2\int_{x_A}^{x_B} \frac{dx}{\dot{x}}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \underset{y \simeq F(x)}{\simeq} F'(x)\frac{dx}{dt} = (x^2-1)\,\dot{x} \quad \longrightarrow \quad \dot{x} = -\frac{x}{\mu}\frac{1}{(x^2-1)}$$
$$= -\frac{x}{\mu}$$

$$T = -2\mu\int_{x_A}^{x_B} dx\left(x - \frac{1}{x}\right) = -2\mu\left(\frac{1}{2} - 2 + \ln 2\right)$$

$$\boxed{T = \mu(3 - 2\ln 2) \sim \mu}$$

le cycle limite est parcouru avec deux parties parcourues rapidement $T \sim \frac{1}{\mu}$
lentement $T \sim \mu$