

I.

• Dans R galiléen,

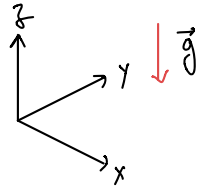
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}$$

• $\vec{F}(x, y, z, t) = -\vec{\text{grad}} U(x, y, z, t)$

1.

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

p_x conserve



2.

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} U(r, t) = F_r(r, t) \vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = r \vec{e}_r \times \vec{F} = \vec{0}$$

$\vec{L}$ conserve

3.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= -\vec{\text{grad}} U \\ \underbrace{m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\frac{dE_c}{dt}} &= -\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} U \end{aligned}$$

$$\frac{dU(\vec{r}(t), t)}{dt} = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial t}}_0 + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} U \quad \left(\quad \frac{dE_c}{dt} = -\frac{dU}{dt} \right)$$

$$E \equiv E_c + U \rightarrow \boxed{E = \text{cste}}$$

4.

Symétries et théorème de Noether

- Changement de coordonnées $q_i \rightarrow q_i'(q_j, t)$

$$EL(\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0$$

$$EL(\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t)) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}'(q', \dot{q}', \ddot{q}', t) = 0$$

la transformation est une symétrie $\Leftrightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}' \Leftrightarrow \mathcal{L}(q_i', \dot{q}_i', t) = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{d}{dt} g(q_i, t)$

$\triangle$ $\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) \equiv \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ conservation $EL(\mathcal{L}'(q')) = EL(\mathcal{L}(q)) = 0$ — on omet $\dot{q}, \dot{q}'$

invariance $\mathcal{L}(q') = \mathcal{L}(q) + \frac{d}{dt} g(q, t)$

- symétrie continue, symétrie infinitésimale
- ex: matrice de rotation $SO(2)$ $\rightarrow$ matrice antisymétrique

Théorème de Noether :

charge de Noether
terme de bord de l'ipp

$q_i' = q_i + \delta q_i$ symétrie infinitésimale

i.e. $\delta L = \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{dF}{dt} + o(\delta q)$

$\Leftrightarrow Q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta q_i - F$ est une charge conservée

i.e. $\frac{dQ}{dt} = 0$ le long d'une solution de EL

Plus précisément, soit la transformation continue $q_i(s=0) \rightarrow q_i(s)$

alors $\delta q_i = q_i(s) - q_i(0) \stackrel{\text{Taylor}}{=} s \cdot \frac{dq_i}{ds}$ et $\delta L = \mathcal{L}(q(s), \dot{q}(s), t) - \mathcal{L}(q(0), \dot{q}(0), t) \stackrel{\text{transf. identité}}{=} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$

$\delta L = s \cdot \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{ds} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} \dot{q}_i \right)$

Preuve: (i) on exprime δL de deux manières

* $\delta L = \frac{dF}{dt}$ par symétrie de la transformation infinitésimale

* $\delta L \stackrel{\text{Taylor}}{=} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \stackrel{\text{Leibniz}}{=} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right)$ par le calcul

0 pour une solution

$\hookrightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - F \right) = \delta L - \delta L = 0$

NB : on a fait le même calcul que pour montrer $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \Leftrightarrow \text{équ. EL.}$

sauf que ici, $\begin{cases} \delta q(t_1) \neq 0 \\ \delta q(t_2) \neq 0 \end{cases}$ on garde le terme de bord de t_1 d'ipp.

Applications

* variables cycliques : $\mathcal{L}$ indep de q_i ie $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$
 la transformation $\begin{cases} q_i(s) = q_i + s \\ q_j(s) = q_j, j \neq i \end{cases}$ conduit à $\begin{cases} \delta q_i = \frac{dq_i(s)}{ds} = 1 \\ \delta q_j = 0, j \neq i \end{cases}$
 étape 1 calculer δq
 étape 2 calculer δL puis $\mathcal{F}$ $\mathcal{L}(q_j(s), \dot{q}_j(s), t) = \mathcal{L}(q_j(0), \dot{q}_j(0), t)$ conduit à $\mathcal{F} = 0$

↳ $Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ le moment est conservé équaire

* $\mathcal{L}$ indépendant de t . Transformation : $t' = t + s$ $q'_i(t) = q_i(t+s)$

étape 1 : $\delta q_i = q_i(t+s) - q_i(t) = s \cdot \dot{q}_i$

étape 2 : $\delta L = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = s \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right\} = s \frac{d}{dt} L$
pas utiliser E.L.

↳ $Q = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = -\mathcal{H}$ l'énergie

* rotation $\vec{q}' = \vec{q} + s \vec{u} \wedge \vec{q}$, $\delta \vec{q} = s \vec{u} \wedge \vec{q}$, $\mathcal{F} = 0$ si L invariant par rotation

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta \dot{q}_i = \vec{p} \cdot \delta \dot{\vec{q}} = s \vec{p} \cdot (\vec{u} \wedge \dot{\vec{q}}) = s \underbrace{\vec{u} \cdot (\dot{\vec{q}} \wedge \vec{p})}_{\vec{L} \cdot \vec{u}}$$

$\vec{L} \cdot \vec{u}$ est conservé. On applique à tout $\vec{u} \rightarrow \vec{L}$ est conservé.

Propriété du système

espace homogène

espace isotrope

sys. indep du temps

pas d'identité propre des particules

pas de référence de phase pour les particules chargées

$$\forall a \frac{1}{r}$$

Invariance associée

translation dans l'espace

rotation dans l'espace

translation dans le temps

permutation des particules identiques

changement de phase

$$SO(4)$$

Quantité conservée

impulsion

moment cinétique

énergie

statistique de Fermi-Dirac, Bose-Einstein

charge électrique

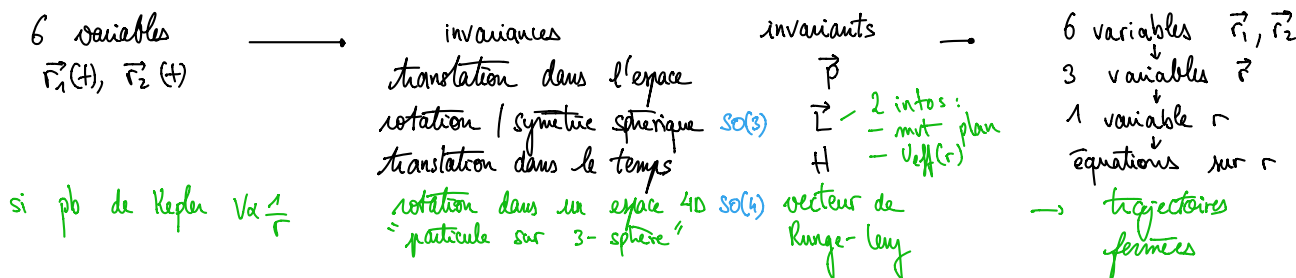
vecteur de Runge-Lenz

Problème à deux corps

Highlights

- * le problème à deux corps se ramène au problème à 1 corps à 1 degré de liberté
- * Hyp : les corps sont assimilables à une masse ponctuelle
- Pour l'appliquer à {Terre + satellite}, il faut négliger
 - (i) la non sphéricité
 - (ii) la rotation propre

Idees



Approche [Wikipedia, Brasselet PCSI]

Position du problème : R_0 réf. galiléen d'origine O . 2 particules ponctuelles isolées $\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{OH}_1 \\ \vec{r}_2 = \vec{OH}_2 \end{cases}$, masses m_1, m_2 .

Changement de variable

$$\begin{matrix} \vec{r}_1, \vec{r}_2 \\ \vec{p}_1, \vec{p}_2 \end{matrix}$$

$\longrightarrow$

variables du centre de masse

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

déplacement relatif

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{p} = \mu \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{p}_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{2/1} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{1/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}} = \vec{0} \\ \mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2/1} \end{cases}$$

Calcul : $\mu \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{p}_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}$

$\vec{p}_1 = \vec{p} - \vec{p}_2$

Approche lagrangienne $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 + V(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r})$

particule fictive

car $M \dot{\vec{R}}^2 + \mu \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{M} (m_1^2 \dot{\vec{r}}_1^2 + m_2^2 \dot{\vec{r}}_2^2 + 2 m_1 m_2 \dot{\vec{r}}_1 \dot{\vec{r}}_2) + \frac{m_1 m_2}{M} (\dot{\vec{r}}_2^2 + \dot{\vec{r}}_1^2 - 2 \dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_1) = m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + m_2 \dot{\vec{r}}_2^2$

ou lagrangien invariant par translation

Conclusion :

- * 1+2 isolé $\longrightarrow$ le centre de masse a un mouvement rectiligne uniforme
- * on se ramène à une particule fictive de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ qui subit une force $\vec{F}_{1/2}$
- * en résolvant $\vec{r}$, on repart à $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ par homothétie

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{cases}$$

Cas d'une force centrale

- conservation du moment cinétique
↓
planéité de la trajectoire
+
loi des aires
 $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \frac{c}{2}$
+
conservation de l'énergie
↓
problème réduit à 1D, $U_{\text{eff}}(r)$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \quad \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L} = \text{cte}$$

$(\vec{r}, \vec{p})$ dans un plan constant généré par $(\vec{r}(t=0), \vec{p}(t=0))$

dans les coordonnées cylindriques d'axe $z \parallel \vec{L}$,

$$\vec{L} = \mu (r \vec{e}_r) \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

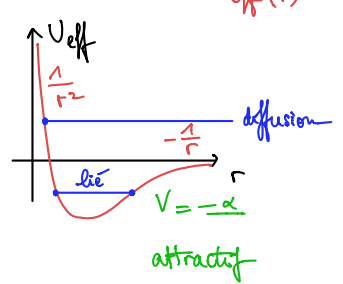
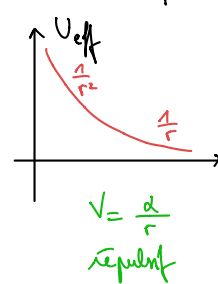
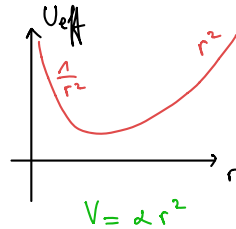
$$\|\vec{L}\| = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \frac{c}{2}$$

πr^2 au total

$$H = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + V(r) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + \underbrace{\dot{\theta}^2}_{\frac{L^2}{\mu^2 r^2}}) + V(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

$U_{\text{eff}}(r)$



Vecteur de Runge-Lenz

$$\vec{e}_r = -\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}$$

Avec la PFD, on écrit $\mu \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r = +\frac{K}{r^2} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = +\frac{K}{r^2 \dot{\theta}} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

$$\hookrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{K}{L} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \quad \text{ie} \quad \frac{d}{dt} \left(\vec{v} - \frac{K}{L} \vec{e}_\theta \right) = 0$$

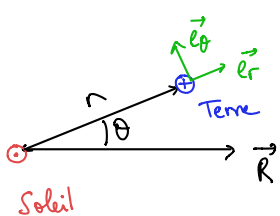
↳ en intégrant, le vecteur excentricité en constant

$$\vec{e} = \frac{L}{K} \vec{v} - \vec{e}_\theta \quad \text{vecteur excentricité} \quad \|\vec{e}\| = e$$

On définit alors

$$\vec{R} = \frac{K}{L} \vec{e} \times \vec{L} = \vec{v} \times \vec{L} - K \vec{e}_r \quad \text{vecteur de Runge-Lenz}$$

Trajectoire elliptique



$$\vec{R} \cdot \vec{L} = 0 \rightarrow \vec{R} \text{ dans le plan du mouvement}$$

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot \vec{r} &= (\vec{v} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - K \vec{e}_r \cdot \vec{r} \\ &= (\vec{v} \times (m \vec{v} \times \vec{r})) \cdot \vec{r} - Kr \\ &= m |\vec{v} \times \vec{r}|^2 - Kr \end{aligned}$$

$$R \cdot r \cos \theta = \frac{L^2}{m} - Kr$$



Trajectoire conique

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

avec

$$e = \frac{R}{K}, \quad p = \frac{L^2}{mK} = \frac{L^2}{\mu m^2 \kappa}$$

pointe vers le périhélie

compétition moment cinétique / gravitation

taille de la conique

Si $e < 1$, la trajectoire est liée et elliptique, avec le Soleil à un foyer

$e > 1$ hyperbole état libre
 $e = 1$ parabole $\leftarrow 2^e$ et 3^e vitesses cosmiques
 $0 < e < 1$ ellipse
 $e = 0$ circulaire $\leftarrow 1^{ère}$ vitesse cosmique

Valeur numérique

pour l'orbite de la Terre

$e = 0.017 < 1$ quasi-circulaire
 $p = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m} \approx 1 \text{ u.a.}$ unité astronomique

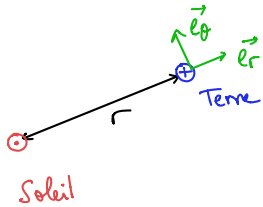
Objectif : on met en évidence une propriété importante du problème à 1 et 2 corps gravitationnel : l'invariance du vecteur de Runge-Lenz, dont découle les trajectoires fermées elliptiques.

Système : {Terra ⊙}

Référentiel : de Copernic considéré galiléen

Hypothèse : comme $\frac{m_{\oplus}}{m_{\odot}} \sim 10^{-6} \ll 1$, on considère le soleil ⊙ immobile

Rappel : le moment cinétique $\vec{L} = m_{\oplus} \vec{r} \wedge \vec{v} = L \vec{e}_z$ est conservé
la trajectoire est plane, perpendiculaire à $\vec{e}_z$



En appliquant la 2^e loi de Newton, en coordonnées cylindriques

$$m_{\oplus} \frac{d\vec{v}}{dt} = - \underbrace{\frac{G m_{\oplus} m_{\odot}}{r^2}}_{=K} \vec{e}_r = + \frac{K}{r^2} \frac{d\vec{\theta}}{d\theta} = + \frac{K}{r^2 \dot{\theta}} \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

$\vec{e}_r = -\frac{d\vec{\theta}}{d\theta}$

$$\hookrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{K}{L} \frac{d\vec{\theta}}{dt} \quad \text{ie} \quad \frac{d}{dt} \left(\vec{v} - \frac{K}{L} \vec{e}_{\theta} \right) = 0$$

$m_{\oplus} r^2 \dot{\theta}$ moment cinétique

↪ en intégrant, $\vec{e} = \frac{L}{K} \vec{v} - \vec{e}_{\theta}$ vecteur excentricité est constant
 $\|\vec{e}\| = e$

On définit alors

le vecteur de Runge-Lenz qui est constant :

$$\vec{R} = \frac{K}{L} \vec{e} \times \vec{L} = \vec{v} \times \vec{L} - K \vec{e}_r$$

Trajectoire elliptique

$\vec{R} \cdot \vec{L} = 0 \rightarrow \vec{R}$ dans le plan du mouvement

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot \vec{r} &= (\vec{v} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - K \vec{e}_r \cdot \vec{r} \\ &= (\vec{v} \times (m \vec{v} \times \vec{r})) \cdot \vec{r} - K r \\ &= m |\vec{v} \times \vec{r}|^2 - K r \end{aligned}$$

$$R \cdot r \cos \theta = \frac{L^2}{m} - K r$$

Trajectoire conique

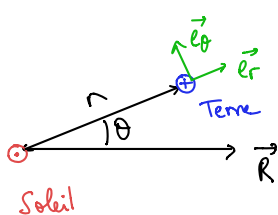
$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

avec

$$e = \frac{R}{K}, \quad p = \frac{L^2}{mK} = \frac{L^2}{G m^2 M}$$

Si $e < 1$, la trajectoire est liée et elliptique, avec le Soleil à un foyer

sur transparent



pointe vers le périhélie

compétition moment cinétique / gravitation

taille de la conique

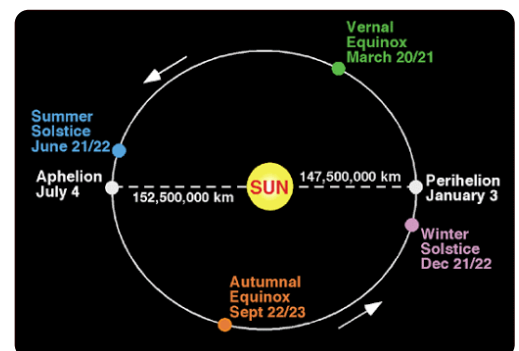
Valeur numérique

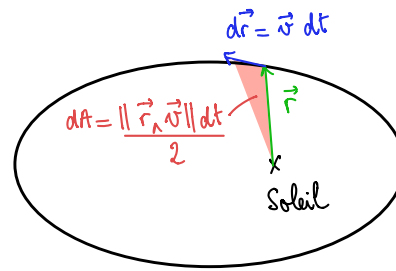
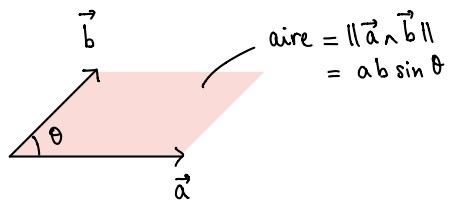
pour l'orbite de la Terre

$$e = 0.017 < 1$$

quasi-circulaire

$$p = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m} \approx 1 \text{ u.a. unité astronomique}$$





Compléments

Potentiel keplerien en $\frac{1}{r}$

- Invariance du vecteur de Runge-Lenz $\vec{e} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{L}}{GM_T \mu} - \vec{e}_r \longrightarrow$ trajectoires fermées
- Trajectoire conique $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$
 - $e > 1$ hyperbole état libre
 - $e = 1$ parabole $\leftarrow 2^e$ et 3^e vitesses cosmiques
 - $0 < e < 1$ ellipse $\leftarrow 1^{re}$ vitesse cosmique
 - $e = 0$ circulaire
- Lois de Kepler. Écarts : * influence des autres astres (Uranus $\leftarrow$ Neptune)
* écart à la sphéricité
- 3 vitesses cosmiques
- trajectoires hyperboliques et angle de diffusion ($\dot{r} = 0$ ie $\vec{v}$ orthoradial à r_{min})

Résolution analytique

À partir de l'intégrale première du mouvement H ,
on sépare les variables,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(H - V(r) - \frac{L^2}{2r^2} \right)}$$
$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(H - V(r') - \frac{L^2}{2r'^2} \right)}}$$

Avec l'intégrale première du mouvement L ,

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \rightarrow d\theta = \frac{L}{\mu r^2} dt = \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(H - V(r) - \frac{L^2}{2r^2} \right)}}$$
$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^r \frac{\frac{L}{r'^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(H - V(r') - \frac{L^2}{2r'^2} \right)}}$$

Trajectoires possibles : selon $H > 0$, $H = 0$, $H < 0$, trajectoires liées ou libres

Si le mouvement est périodique, on obtient la période avec

$$\frac{T}{2} = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(H - V(r') - \frac{L^2}{2r'^2} \right)}}$$

Théorème de Bertrand : seuls les potentiels newtonien $\propto \frac{1}{r}$
harmoniques $\propto r^2$
conduisent à des trajectoires fermées