

LP49 : Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques.

Approximation des milieux continus. (L3)

Version corrigée

Julien Ollitrault et Yoram Vadée Le Brun. 2012-2013

Bibliographie :

- C.Kittel Physique de l'état solide
- N.W. Ashcroft et N.D. Mermin Physique des solides
- Yves Quéré physique des matériaux
- Cap prépa PC-PC*
- J.P Faroux et J. Renault Mécanique des fluides et ondes mécaniques
- Garing Ondes mécaniques et diffusion

Éléments des rapports de jury :

- 2010, 2009 et 2006 La relation entre les paramètres macroscopiques du milieu et la modélisation microscopique doit être explicitée.
- 2001 et 2000 Il est indispensable de justifier la modélisation harmonique du potentiel d'interaction entre atomes et de préciser les ordres de grandeur des quantités introduites. Il faut dégager nettement les enseignements et les limites du modèle. Enfin on peut aussi tenter une approche énergétique.
- 2000 et 1999 On note que la plupart des candidats n'ont pas compris pourquoi on peut limiter la représentation de la relation de dispersion à la première zone de Brillouin.
- 2009 et 2010 L'interprétation de la première zone de Brillouin doit être reliée au caractère périodique du système.

Prérequis :

- Mécanique du point (dont oscillateurs ...)
- Physique des ondes
- Physique statistique
- Physique des milieux continus
- Cristallographie

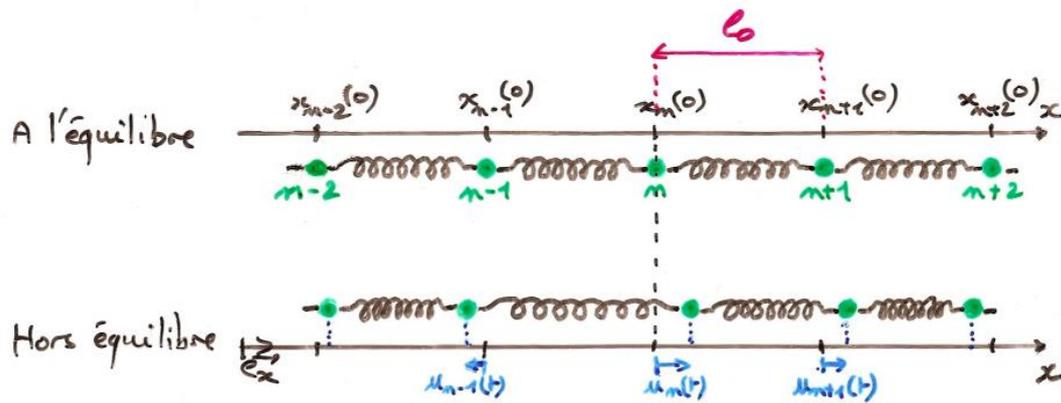
Introduction

- Nombreux exemples de propagations d'ondes mécaniques dans la vie de tous les jours par exemple les vagues ou de manière plus destructrice les tremblements de terre et tsunamis ! (cf les japonais)
- Expérience introductive avec la chaîne à soliton qui est une chaîne de pendule plan couplés. Attention ce n'est, à proprement parler, une chaîne d'oscillateurs harmoniques qu'aux petits angles. (On ne s'intéresse pas à la réflexion des ondes à l'autre extrémité de la chaîne.)
- On voit que des ondes progressives peuvent s'y propager en agitant les pendules couplés de proche en proche.
- Annonce du plan (grandes parties seulement)

Plan

I. Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques	3
A. Mise en équation	3
B. Résolution	4
II. Application au solide cristallin	7
A. Approche discrète	7
1. Modélisation du solide cristallin réel	7
2. Conséquences thermodynamiques	9
B. Du discret au continu	10
1. Démarche et mise en équation	10
2. Conséquences mécaniques	11

I. Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques



l_0 : Longueur à vide des ressorts

m : Masse des masselottes entre les ressorts

Vecteur position d'une masse n à l'instant t : $\vec{r}_n(t) = x_n(t)\vec{e}_x$, on a : $x_n(0) = n * l_0$

On note $u_n(t) = x_n(t) - x_n(0)$ le déplacement par rapport à l'équilibre.

On a alors : $\ddot{u}_n = \ddot{x}_n$

A. Mise en équation

Ecrivons alors les forces que subit la masselotte n : elle subit la force du ressort à sa gauche et de celui à sa droite. Comme la masse $n+1$ est reliée à l'autre extrémité du ressort de droite on dira que la force exercée par le ressort de droite est celle qu'exerce la masselotte $n+1$ et cette force sera notée : $\vec{F}_{n+1 \rightarrow n}$. On ne prend pas en compte le poids de la masselotte qui est supposé négligeable. On a :

$$\vec{F}_{n+1 \rightarrow n} = K(x_{n+1}(t) - x_n(t) - l_0)\vec{e}_x$$

$$\vec{F}_{n+1 \rightarrow n} = K(u_{n+1}(t) + x_{n+1}(0) - u_n(t) - x_n(0) - l_0)\vec{e}_x$$

$$\vec{F}_{n+1 \rightarrow n} = K(u_{n+1}(t) - u_n(t))\vec{e}_x$$

Pour avoir $\vec{F}_{n-1 \rightarrow n}$ on raisonne en deux étapes :

- Principe des actions réciproques : $\vec{F}_{n-1 \rightarrow n} = -\vec{F}_{n \rightarrow n-1}$
- Et $\vec{F}_{n \rightarrow n-1}$ est la même chose que $\vec{F}_{n+1 \rightarrow n}$ en remplaçant n par $n-1$.

Finalement on obtient :

$$\vec{F}_{n-1 \rightarrow n} = K(u_{n-1}(t) - u_n(t))\vec{e}_x$$

Maintenant que la cinématique et l'étude des forces sont faites, on n'a plus qu'à appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) à la masselotte n qu'on projette directement sur l'axe x (on a vu que le mouvement se fait suivant cet axe) :

$$m \cdot \ddot{u}_n(t) = K(u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t) - 2u_n(t))$$

Par analogie avec le cas de l'oscillateur harmonique isolé, on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ la pulsation propre des oscillateurs.

Bien évidemment l'équation obtenue est vraie pour tout n . On a donc un système infini dénombrable d'équations différentielles couplées.

B. Résolution

On s'intéresse à la propagation d'ondes mécaniques dans cette chaîne. Comme la chaîne est infinie, que tous les atomes sont identiques et que nous négligeons les frottements on peut penser que les ondes planes seront solutions. De plus le principe de superposition (valide ici car le système d'équation est linéaire) nous incite à rechercher de telles solutions. En effet, on aura alors (du moins formellement) la solution pour la propagation de n'importe quel signal grâce à la transformée de Fourier. Aussi afin de simplifier les calculs on fait le choix de passer en notation complexe.

On a donc pour tout n : $\underline{u}_n(t) = Ae^{i(\omega t - knl_0)}$ où ω représente la pulsation de l'onde et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ la norme du vecteur d'onde. On obtient pour $n-1$ et $n+1$:

$$\underline{u}_{n+1}(t) = Ae^{i(\omega t - knl_0)} e^{-ikl_0}$$

$$\underline{u}_{n-1}(t) = Ae^{i(\omega t - knl_0)} e^{ikl_0}$$

Et pour la dérivée seconde :

$$\ddot{\underline{u}}_n(t) = -\omega^2 Ae^{i(\omega t - knl_0)}$$

En réinjectant toutes ces expressions dans l'équation du mouvement et en simplifiant directement par $Ae^{i(\omega t - knl_0)}$ on obtient :

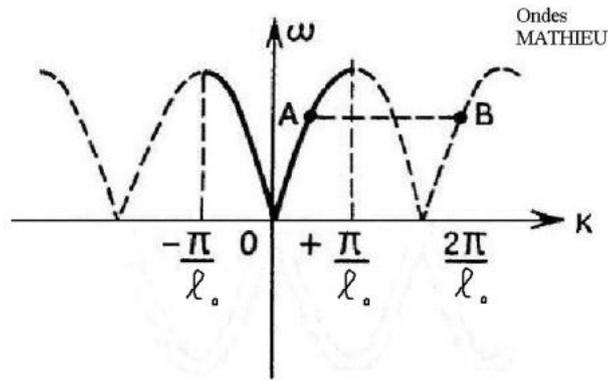
$$-\omega^2 = \omega_0^2 (e^{ikl_0} + e^{-ikl_0} - 2)$$

$$-\omega^2 = \omega_0^2 \left(e^{\frac{ikl_0}{2}} - e^{-\frac{ikl_0}{2}} \right)^2$$

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{kl_0}{2}\right)$$

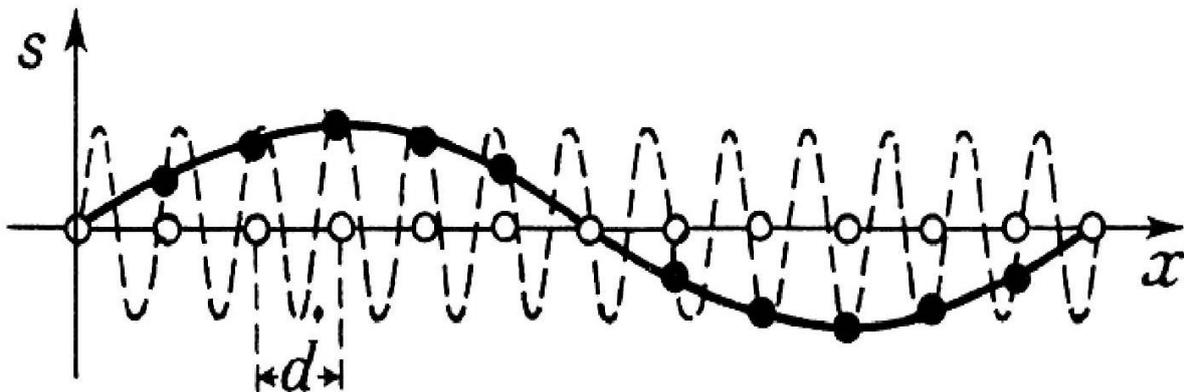
$$\omega = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{kl_0}{2}\right) \right|$$

Ce qui est la **relation de dispersion** des ondes planes dans ce milieu. (Au passage on a vu que les ondes planes vérifiant cette relation de dispersion sont bien des solutions du système.)



Relation de dispersion pour une chaîne d'atomes

- La relation de dispersion obtenue est périodique et on peut s'interroger sur le réel sens physique que cela a. On peut dire, au choix :
 - que cela n'a pas de sens physique de considérer des longueurs d'ondes plus petites que $2l_0$ le système ne pourrait pas les propager ;
 - ou bien on peut aussi considérer que l'onde se propage bien mais qu'elle est perçue par les masses comme une onde de longueur d'onde plus élevée comme nous le montre ce schéma : (C'est le deuxième choix qui est retenu pour l'oral)

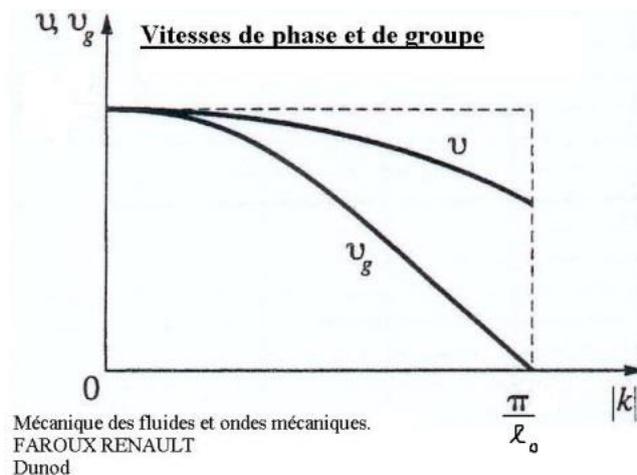


- On peut aussi constater que nous ne pourrions pas propager d'ondes de pulsations supérieures à $2\omega_0$. Cela peut se comprendre physiquement par le fait qu'une masse a une inertie et que ne contrôlant pas les forces s'appliquant sur elle on ne pourra pas la forcer à bouger trop vite.

Enfin on peut distinguer deux cas particuliers mais avant de les étudier introduisons la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

- $v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k}$ est la vitesse de phase des ondes planes. Elle représente la vitesse de propagation des surfaces équiphasées. Concrètement cela correspond à la vitesse de déplacement par exemple d'un maxima de l'onde. On a déjà vu que v_φ peut être aussi grande qu'elle le veut, en effet cette vitesse n'est pas une vitesse de propagation de l'information.
- la vitesse de groupe : $v_g(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial k}(\omega)$. Cette vitesse représente la vitesse de propagation de l'enveloppe d'un paquet d'ondes contenant une gamme de pulsations centrée sur la pulsation ω .

C'est cette vitesse qui traduit la vitesse de propagation d'un signal (une enveloppe étant facilement mesurable) et qui doit donc être plus petite que c . Attention cette vitesse n'a de sens que lorsque le paquet d'onde reste tel, c'est-à-dire que le milieu doit être faiblement dispersif. (Cette vitesse provient en fait d'un développement limité et les choses deviennent bien plus complexes autant mathématiquement que physiquement pour les milieux très fortement dispersifs)



Premier cas : $k \ll \frac{\pi}{l_0} \Leftrightarrow \lambda \gg 2l_0$

Dans ce cas on peut faire un développement limité du sinus et on obtient que $v_\phi = v_g = \omega_0 l_0$. **Le milieu n'est alors pas dispersif** (v_ϕ et v_g ne dépendent pas de k)

Deuxième cas : $k = \frac{\pi}{l_0} \Leftrightarrow \lambda = 2l_0$

Dans ce cas les masses oscillent en opposition de phase et on a $v_g = 0$. On peut donner un sens physique à ceci : imaginons des spectateurs dans un stade qui feraient une ola de longueur d'onde deux fois la distance entre deux spectateurs. Une fois établie dans tout le stade (possible car v_ϕ est non nulle) on ne verrait pas la ola se propager dans un sens ou dans l'autre du stade. **L'onde est alors dite stationnaire**. Par contre il faut faire attention à ne pas conclure trop vite : ici le milieu devient extrêmement dispersif et on ne peut se prononcer sur le sort d'un paquet d'onde centré sur cette longueur d'onde particulière. (Il serait probablement détruit c'est-à-dire que les ondes le composant allant à des vitesses trop différentes se sépareraient trop vite)

Transition :

Maintenant que nous avons vu les principales propriétés de ces chaînes d'oscillateurs infinies nous allons montrer que ce modèle va nous permettre de modéliser le solide cristallin afin de décrire la propagation d'onde dans ces milieux.

II. Application au solide cristallin

A. Approche discrète

1. Modélisation du solide cristallin réel

Hypothèses de travail

- Dans le solide cristallin réel il y a des défauts de périodicité (lacunes, dislocations ...), des impuretés et son extension spatiale est finie (quoique très grande devant la taille d'une maille). Considérer **le cristal comme parfait** revient à négliger tous ces problèmes. Le cristal est alors un arrangement spatial périodique infini d'atomes.
- De plus l'agitation thermique n'est qu'une vibration autour d'une position moyenne des atomes qui sera prise comme position d'équilibre. Les vibrations d'origine thermique peuvent elles aussi être décomposées en ondes planes et nous les considérerons donc comme une source particulière d'onde plane et non pas comme des vibrations aléatoires se superposant aux ondes planes.
- Enfin nous nous limiterons à considérer les interactions entre plus proches voisins et une maille cristalline cubique simple (cas du polonium par ex et bizarrement le seul !). Ce qui nous permet de découpler facilement les 3 dimensions de l'espace. Nous pourrons alors faire une étude 1D du cristal. Nous verrons cependant que le modèle reste pertinent pour les autres structures cristallines.
- Intéressons-nous maintenant à la **forme de l'interaction entre deux atomes**. Encore une fois nous allons considérer le cas très simple de l'interaction entre deux atomes neutres dont les seules forces se résument à la force attractive de Van der Waals et à la force répulsive à courte distance due au principe d'exclusion de Pauli.

L'énergie potentielle de liaison entre ces deux atomes est alors traditionnellement modélisée par le

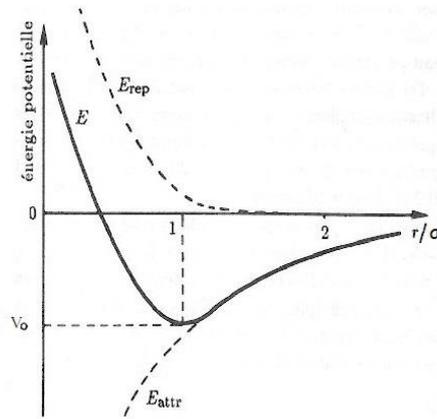
potentiel de Lennard Jones : $V(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$

Le terme en $\frac{1}{r^6}$ provient de l'expression analytique de l'énergie potentielle de la force de Van der Waals. Le terme en $\frac{1}{r^{12}}$ est lui empirique et a été choisi car il colle plutôt bien avec les données expérimentales obtenues avec les gaz rares en phase gazeuse tout en facilitant les calculs numériques. Nous réécrivons ce potentiel sous la forme :

$$V(r) = V_0 \left(\left(\frac{a}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right)$$

V_0 = la profondeur du puits de potentiel

a = la position du minimum (qui correspond donc à la distance entre atomes à l'équilibre)



En faisant un développement limité à l'ordre 2 du potentiel au voisinage de a on obtient :

$$V(r) = V(a) + (r - a) \frac{dV}{dr}(a) + \frac{(r - a)^2}{2} \frac{d^2V}{dr^2}(a)$$

$$V(r) = -V_0 + \frac{(r - a)^2}{2} \frac{72V_0}{a^2}$$

On reconnaît l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique de constante de raideur $K = \frac{72V_0}{a^2}$. Cela va nous permettre de modéliser la liaison entre 2 atomes par un ressort tant que l'amplitude des oscillations reste négligeable devant a .

En fait cette démarche est tout à fait générale : à partir du moment où l'on peut se limiter à considérer les plus proches voisins, l'atome est placé dans une cuvette d'énergie potentielle et on peut faire un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de la position d'équilibre (à condition que la cuvette ne soit pas trop plate : il faut que la dérivée seconde au minimum soit strictement positive sinon on a un ordre 4 et donc ce n'est pas harmonique ...). On aura alors $K = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(a)$. On pourra donc modéliser les liaisons interatomiques par des ressorts aux faibles oscillations.

Avec cette démarche nous pouvons modéliser notre cristal réel par la chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques.

Donnons quelques ordres de grandeurs :

- a est de l'ordre de deux rayons atomiques. $a \sim 2 * 10^{-10} m$
- On peut estimer V_0 en supposant cette énergie similaire à l'énergie d'agitation thermique à la fusion du cristal. $V_0 \sim 0.1 eV$
- $m \sim 10^{-25} kg$
- On a donc $K \sim 40 N.m^{-1}$ et $\omega_0 \sim 2 * 10^{13} s^{-1}$

Transition :

Nous voyons donc que cette modélisation du solide cristallin permet de décrire la propagation d'ondes mécaniques longitudinales dans les solides. Nous allons maintenant essayer d'en tirer un peu plus notamment sur les aspects énergétiques, c'est le domaine de la thermodynamique, afin de vérifier la pertinence de notre modèle. Pour cela nous allons voir que ce modèle prédit une certaine capacité thermique des cristaux.

2. Conséquences thermodynamiques

Calculons la valeur moyenne de l'énergie potentielle d'un atome indicé par n au passage d'une onde plane de pulsation ω :

$$\langle E_p \rangle = \left\langle \frac{1}{2} * \left[\frac{1}{2} K (u_{n+1} - u_n)^2 + \frac{1}{2} K (u_n - u_{n-1})^2 \right] \right\rangle$$

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{4} K [\langle (u_{n+1} - u_n)^2 \rangle + \langle (u_n - u_{n-1})^2 \rangle]$$

En remplaçant les amplitudes par leurs valeurs et en utilisant les formules de trigonométrie. On obtient :

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{4} K \left[2A^2 \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right) + 2A^2 \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right) \right]$$

$$\langle E_p \rangle = KA^2 \frac{\omega^2 m}{4K} \text{ via la relation de dispersion}$$

Finalement :

$$\boxed{\langle E_p \rangle = \frac{1}{4} mA^2 \omega^2}$$

Calculons maintenant la valeur moyenne de l'énergie cinétique de cet atome n :

$$\langle E_c \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m \dot{u}_n^2 \right\rangle$$

$$\boxed{\langle E_c \rangle = \frac{1}{4} mA^2 \omega^2}$$

On retrouve les mêmes valeurs que pour un oscillateur harmonique isolé. Ceci nous permet d'appliquer le théorème d'équipartition de l'énergie à cet atome qui nous donnera la valeur moyenne de son énergie mécanique non plus liée au passage d'une onde mais liée à l'agitation thermique de l'atome.

$$E_{m1} = 3 \left(\frac{k_b T}{2} + \frac{k_b T}{2} \right)$$

Le facteur « 3 » venant du fait qu'il faut prendre en compte les 3 directions de l'espace que nous avons découplées. On a alors pour l'énergie de N atomes :

$$E_{mN} = 3Nk_b T = 3nRT$$

Avec n le nombre de moles. Enfin si on introduit la capacité thermique molaire à volume constant on a :

$$\boxed{c_{vm} = \frac{1}{n} \frac{dE_{mN}}{dT} = 3R}$$

$$AN: c_{vm} = 25 J.mol^{-1}.K^{-1}$$

On retrouve, en assimilant la capacité à volume constant à celle à pression constante, la loi de Dulong et Petit qui, au XIX^{ième} siècle, avaient remarqué que les solides avaient à peu près tous la même capacité thermique molaire à pression constante à température ambiante.

Transition :

Encouragés par la bonne réussite de ce modèle pourtant très simple nous allons maintenant tâcher de décrire le comportement du solide aux échelles macroscopiques. Nous allons voir en particulier que vu les échelles en jeu nous pouvons encore simplifier ce modèle afin d'en déduire des lois à l'échelle macroscopique.

B. Du discret au continu

1. Démarche et mise en équation

Revenons tout d'abord sur les ordres de grandeurs. Nous avons vu que a était de l'ordre de quelques dixième de nanomètres. Quel est l'ordre de grandeur des longueurs d'ondes des ondes typiques (ondes sonores voir ultrasonore) que nous pouvons envoyer dans un solide ? Pour faire simple nous allons choisir une pulsation de $2\pi * 2 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. (Fréquence de 200 kHz donc ultrason)

La relation de dispersion obtenue précédemment : $\omega = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{kl_0}{2}\right) \right|$ peut s'inverser en (pour k positif dans la première zone de Brillouin) :

$$\lambda = \frac{\pi a}{\arcsin\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)} = \frac{2\omega_0}{\omega} \pi a$$

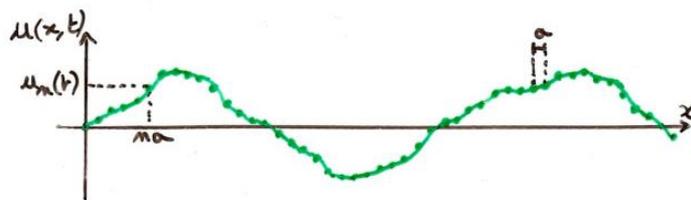
On obtient $\lambda = 10^8 a$. Donc $\lambda \gg a$. Pour cette raison nous allons pouvoir considérer qu'il y a un continuum d'atomes tant que cette condition est respectée. C'est **l'approximation des milieux continus**.

Dans le cadre de cette approximation, on va donc faire de l'interpolation entre les atomes. Ce qui mathématiquement se traduit par la création d'une nouvelle fonction :

$$\begin{cases} \vdots \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \\ \vdots \end{cases} \rightarrow u(t, x)$$

u est telle que pour tout n : $u(t, na) = u_n(t)$ et est de classe C^2

Graphiquement cela donne ceci (qui ne représente en aucun cas l'onde !):



Avec cette nouvelle formulation et cette approximation nous allons voir quelle forme prend le système d'équation du mouvement.

$$\begin{aligned} u_n(t) &= u(t, na) \\ u_{n-1}(t) &= u(t, na - a) = u(t, na) - a \frac{\partial u}{\partial x}(t, na) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, na) \\ u_{n+1}(t) &= u(t, na + a) = u(t, na) + a \frac{\partial u}{\partial x}(t, na) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, na) \end{aligned}$$

On a poussé le développement à l'ordre 2 car on obtient pas d'effets physiques à l'ordre 1. En injectant ces valeurs dans l'équation du mouvement on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, na) = \frac{Ka^2}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, na)$$

On obtient une **équation de d'Alembert** qui décrit la propagation d'ondes à la vitesse $v = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}} = a\omega_0$.

On n'a **pas de dispersion**. Ceci n'a rien d'étonnant puisque nous nous sommes placé dans la partie linéaire de la zone de Brillouin. Evidemment ce modèle sera faux si on s'en éloigne. On retrouve la condition de l'approximation des milieux continus. Avec les ordres de grandeur pour a et ω_0 on peut donner celui pour la vitesse de propagation : $v = 4000 \text{ m.s}^{-1}$. Cet ordre de grandeur est tout à fait correct (comme nous le verrons plus loin).

Transition :

Peut on aller plus loin et prédire une valeur plus précise de la vitesse de propagation ? Pour cela il nous faudrait pouvoir l'exprimer en fonction de paramètres macroscopiques plus faciles à mesurer. Nous allons voir que en essayant de faire cela nous allons retrouver certaines propriétés macroscopiques mécaniques des matériaux.

2. Conséquences mécaniques

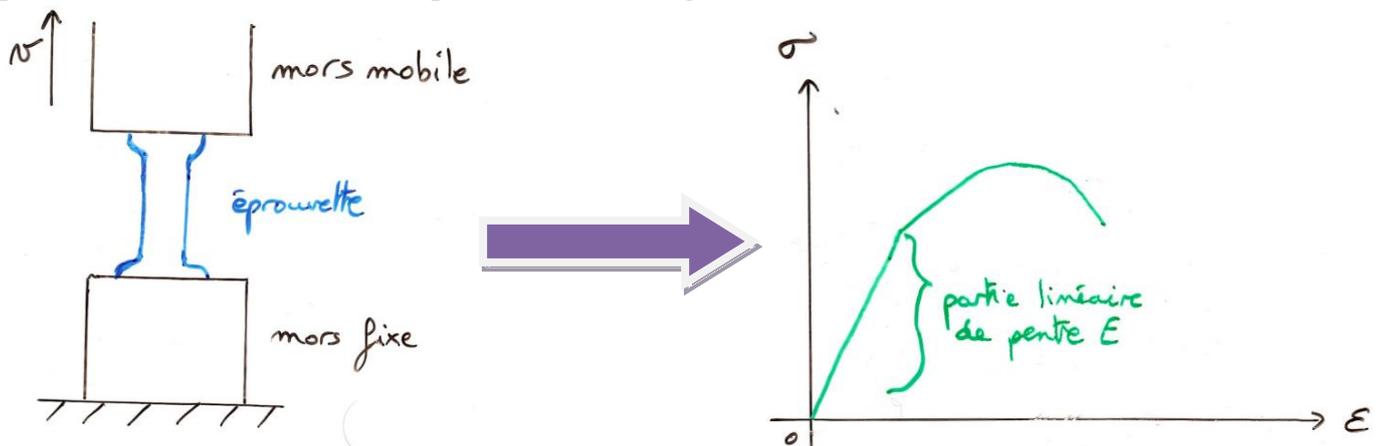
Notre modèle à base de ressort entre les atomes devrait pouvoir nous permettre d'estimer la rigidité du cristal. Celle-ci est définie à l'échelle macroscopique par le module d'Young issu de la loi de Hooke :

$$\sigma = E * \varepsilon$$

Où σ est la contrainte longitudinale, ε l'allongement longitudinal et E le module d'Young. On peut réécrire cette loi sous la forme : $\frac{dF}{dS} = E \frac{du}{dx}$ où dF est la force appliquée sur la surface dS , $\frac{du}{dx}$ est l'allongement relatif suivant la direction x .

Point expérimental :

Expérimentalement, on mesure le module d'Young en faisant un test de traction ou de compression sur une éprouvette de matériaux comme représenté sur cette figure :



Donnons quelques ordres de grandeurs :

Pour l'aluminium : $E = 69 \text{ GPa}$ et pour le diamant $E = 1000 \text{ GPa}$

- Retrouvons cette loi à partir de notre modèle en considérant l'équilibre d'une surface dS au bord du solide soumise d'un coté à la force dF et de l'autre à la force de rappel élastique. On a :

$$dF = \frac{dS}{a^2} K(u(x+a) - u(x))$$

Soit comme a est aussi petit qu'on le souhaite (approximation des milieux continus):

$$\boxed{dF = \frac{dS}{a^2} K * a \frac{du}{dx}}$$

On obtient exactement la loi de Hooke avec $E = \frac{K}{a}$. Remarque : ce n'est pas étonnant puisque Hooke lui-même avait utilisé un modèle de ressort pour poser sa loi ...

Donnons l'ordre de grandeur de E estimé avec les ordres de grandeurs déjà vus : $E = 200 \text{ GPa}$

Rem (pas le temps de le faire à l'oral) : Regardons si notre modèle prédit correctement les modules d'Young de l'aluminium et du diamant.

- Aluminium : $a = 2.1, 21. \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $T_{fus} = 660^\circ \text{C}$ donc $V_0 = 0.08 \text{ eV}$ on trouve $E = 66 \text{ GPa}$
- Diamant : $a = 2.0, 7. \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $T_{fus} = 3547^\circ \text{C}$ on trouve $E = 1384 \text{ GPa}$

On trouve des valeurs étonnement bonne surtout quand on voit comment sont estimés les paramètres et qu'on a même pas pris en compte la structure cristalline précise de ces matériaux.

Exprimons maintenant la masse volumique en fonction de paramètre microscopique. La cristallographie de base nous donne : $\rho = \frac{m}{a^3}$ pour la maille cristalline cubique simple.

On en déduit $\frac{a^2 K}{m} = \frac{E}{\rho}$ et comme on avait vu que $v = \sqrt{\frac{K a^2}{m}}$ on a $\boxed{v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$

Ce qui nous permet d'exprimer la vitesse en fonction de deux paramètres faciles à mesurer avec une bonne précision.

Rem : Pour l'aluminium on trouve 5000 m.s^{-1} à comparer aux 6400 m.s^{-1} tabulés.

Conclusion :

Nous avons vu que le modèle de la chaîne infinie unidimensionnelle d'oscillateurs est un modèle bien plus riche qu'il n'y paraît. En effet cette chaîne est dispersive et il faut voir que cela est un effet lié intrinsèquement à la nature discrète de la chaîne : en la modélisant dans le cadre des milieux continus on perd cette dispersion.

Aussi ce modèle, malgré sa grande simplicité conceptuelle, nous a permis de modéliser le solide cristallin avec un aisance déconcertante. Aussi bien dans le domaine de la propagation d'ondes que dans le domaine de la thermodynamique et celui de la mécanique des milieux continus.

Toutefois il est important de rappeler ses limites, nous n'avons pas pu expliquer la présence d'ondes de cisaillement, l'évolution de la capacité thermique aux faibles températures ou tout simplement le fait qu'un solide se dilate avec l'augmentation de la température (dans le cas général...). Pour rendre compte de ce dernier phénomène il faudrait prendre en compte les termes anharmoniques dans le développement limité du potentiel.

Question posées par les correcteurs :

- Que se passe t'il lorsqu'il y a deux types d'atomes disposés de manière régulière ?
Voir les leçons des années précédentes.
- Pourquoi appelle t'on les deux modes acoustiques et optiques ?
Dans les modes de type optique les atomes de types différent vibrent en opposition de phase. (Du coup si ces atomes sont de charges différentes on a des vibrations de dipôles et donc une interaction possible avec les champs électromagnétique.) Dans les modes de type acoustique les atomes vibrent en phase. De plus il y a un gap de fréquences entre les deux. Les modes optiques sont ceux de haute fréquences.
- Quelles sont les conséquences optiques de ces modes ?
- Que se passe t'il si il y a un défaut dans le cristal ?
On peuple le gap (analogie avec les semi-conducteurs dopés)
- Que se passe t'il si on essaie de propager une onde de fréquence interdite ?
Elle se réfléchit à la surface du matériaux. Dans le matériaux des interférences destructives l'empêchent de se propager.
- La méthode de l'essai de traction n'est pas précise. Peut-on mesurer le module de Young de manière plus précise ?
On mesure la fréquence de vibration d'une poutre encastrée d'épaisseur et de longueur connue.
Méthode de Oberst
- Dans le graphe déformation en fonction de la contrainte, que se passe t'il après la zone linéaire ?
A ce moment là et bien on sort de la zone d'élasticité du matériau et il subit une déformation permanente. Si l'on poursuit la traction, alors on va arriver à la rupture du matériau.
- Que se passe t'il physiquement en haut de la zone de Brillouin (lorsque la vitesse de groupe s'annule) ?
Ceci devrait être expliqué dans la leçon. On peut parler de ventre et des nœuds de l'onde stationnaire ce qui nous permet de découpler les oscillateurs.
- Que se passe t'il à basse température ?
C'est notre ouverture et il faut donc être prêt à débiter les modèles d'Einstein et de Debye.
- Attention aux notions de solitons et phonon. On peut aussi nous poser des questions dessus.