

LP 56 : Illustration de l'intérêt de la notion de symétrie dans différents domaines de la physique

Dorian SIMON

Etienne PERTREUX

Pré-requis

Bases de électromag
 méca flu
 mécanique du point

Bibliographie

Jean SIVARDIERE « La Symétrie... »

[Si besoin, bouquins de prépa pour retrouver la résolution des exemples (simples)]

Plan

1. Le Principe de Curie
 - 1.1. Notions de symétrie
 - 1.2. Énoncé du principe de Curie
 - 1.3. Mise en œuvre du principe de Curie
2. Analyse dimensionnelle
 - 2.1. Plausibilité des formules physiques
 - 2.2. Adimensionnalisation et analyse dimensionnelle
 - 2.3. Maquettes
3. Brisure de symétrie
 - 3.1. La bifurcation
 - 3.2. Généralisation du principe de Curie
4. Limite des applications de la notion de symétrie

Introduction

La symétrie en tant que propriété géométrique est quelque chose d'observable dans la vie de tous les jours, il suffit de regarder ses mains, et que les mathématiciens de la Grèce antique avaient déjà remarqué.

Cependant, la généralisation de cette notion de symétrie et son utilisation en physique est beaucoup plus récente.

Au cours de cette leçon, nous allons voir, sur des exemples relativement simples, en quoi la notion de symétrie peut aider à résoudre certains problèmes physiques, ainsi que son caractère prédictif.

1. Le principe de Curie

1.1. Notions de symétrie

On dit qu'un système est invariant sous une certaine transformation si cette transformation le laisse globalement inchangé. Cette transformation est alors une opération de symétrie pour ce système.

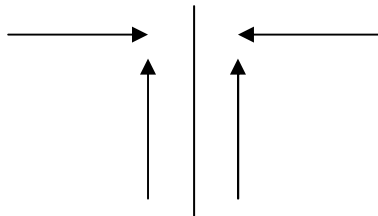
Exemples : L'image dans un miroir d'un carré est le même carré (si les sommets sont équivalents) ; la rotation de $\frac{\pi}{2}$ du même carré le laisse invariant aussi (sous la même hypothèse)...

On peut lister comme opérations de symétrie spatiales les rotations, les translations et bien sûr l'image par un miroir.

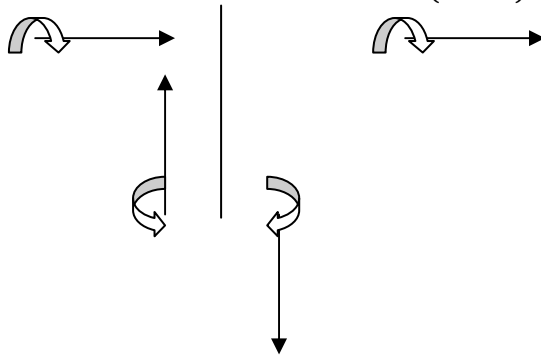
On peut distinguer les symétries discrètes des symétries continues. Par exemple, un fluide infini est invariant par toute translation mais un cristal infini n'est invariant que par les translations correspondant aux pas de son réseau.

On distingue deux comportements différents pour les scalaires, vecteurs et tenseurs d'ordres supérieurs : polaire et axial. Dans le premier cas, l'orientation de l'élément est intrinsèque (c'est le cas par exemple pour la vitesse ou la position), dans le deuxième, elle est relative à l'orientation de l'espace (c'est le cas par exemple pour le moment cinétique). Des éléments polaires et axiaux se comportent différemment face à un miroir. Nous allons illustrer cette propriété pour les vecteurs.

Comportement d'un vecteur polaire : $\vec{V}(m(M)) = m(\vec{V}(M))$ où M est un point quelconque et m la transformation miroir.



Comportement d'un vecteur axial. $\vec{A}(m(M)) = -m(\vec{A}(M))$



En effet, m inverse l'orientation de l'espace (flèches courbes sur le schéma).

On parle d'antisymétrie quand la transformation considérée ne laisse plus le système globalement invariant qu'à l'inversion d'une propriété près. Par exemple, la distribution du vecteur densité de courant d'une boucle de courant est antisymétrique par rapport à un plan perpendiculaire au plan contenant cette boucle et passant par le centre de cette boucle.

En notant m' un antimirop, on a donc : $\vec{V}(m'(M)) = -m'(\vec{V}(M))$ et $\vec{A}(m'(M)) = m'(\vec{A}(M))$.

1.2. Énoncé du principe de Curie

« Si les mêmes causes produisent les mêmes effets, alors les symétries des effets sont au moins aussi grandes que celles des causes, si le résultat est unique ».

Si le problème considéré admet une solution unique, alors tout élément de symétrie des causes (par exemple, en électromagnétisme, les distributions de charges et de courants) est un élément de symétrie des effets (les champs électrique et magnétique).

Ainsi, en optique, en l'absence d'un milieu anisotrope, seule la direction de propagation du faisceau lumineux est privilégiée ; toutes les directions qui lui sont perpendiculaires sont équivalentes. Toutes les polarisations du faisceau sont donc équivalentes. Seul un milieu anisotrope permet d'avoir un phénomène de biréfringence.

1.3. Mise en œuvre du principe de Curie

1^{er} cas : Champ électrique produit par une sphère de rayon a uniformément chargée en volume.

(On note ρ la charge volumique.)

On place l'origine au centre de cette sphère. Le problème est à symétrie sphérique : le centre de la sphère est un centre de symétrie, tout axe ou plan passant par le centre de cette sphère est un axe ou plan de symétrie et toute rotation autour de l'origine laisse le problème invariant.

Le champ électrique est un vecteur polaire (la justification sera vue plus loin). Donc $\vec{E}(\vec{r})$ est à symétrie sphérique. Toute rotation autour de l'origine laisse donc $\vec{E}$ invariant. Il n'est donc fonction ni de θ ni de φ . De plus, pour tout point appartenant à un plan de symétrie du problème, $\vec{E}$ en ce

point appartient à ce plan (car $\vec{E}(m(M) = M) = m(\vec{E}(M))$). $\vec{E}$ en tout point appartient donc à tout plan passant par l'origine et ce point. $\vec{E}$ est donc radial : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

Il ne reste plus maintenant qu'à appliquer le théorème de Gauss ($\Phi_{\vec{E}} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$) à une sphère de rayon r pour arriver à :

$$r \geq a : E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} ;$$

$$r < a : E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r.$$

2^{ème} cas : écoulement de Couette plan (stationnaire).

On considère un fluide illimité selon x et y et compris entre 0 et h selon z . Le fond ($z = 0$) est immobile. La surface est uniformément mise en mouvement à la vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_x$. On cherche la vitesse $\vec{v}(\vec{r})$ en tout point.

La vitesse est un vecteur polaire. (Cela vaut pour $\vec{V}$ comme pour $\vec{v}$.)

Le problème est invariant sous toute translation dans le plan (xOy). De plus, tout plan parallèle à (xOz) est un plan de symétrie du problème et tout plan parallèle à (yOz) est un plan d'antisymétrie du problème.

Le premier point implique que $\vec{v}$ n'est fonction que de z . Le deuxième point implique que $\vec{v}$ en un point d'une part appartient à tout plan parallèle à (xOz) et passant par ce point et d'autre part est perpendiculaire à tout plan parallèle à (yOz) et passant par ce point.

La dernière affirmation se justifie par : $\vec{v}(m'(M) = M) = m'(\vec{v}(M))$. **Dessin au tableau !**

On a donc $\vec{v} = v(z)\vec{e}_x$.

Il ne reste plus qu'à introduire ce résultat dans l'équation de Navier-Stokes projetée sur $\vec{e}_x$:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})v_x = \eta \Delta v_x$$

Avec les conditions aux limites, on trouve alors : $\vec{v} = \frac{z}{h} \vec{V}$.

2. Analyse dimensionnelle

2.1. Plausibilité des formules physiques

Une loi de la physique doit être indépendante de l'observateur. Elle doit donc être indépendante des conventions que celui-ci choisit, par exemple du choix de l'orientation de l'espace ou des unités de mesure.

Ainsi, une loi physique ne doit identifier entre elles que des quantités soit polaires soit axiales. En effet, si on pose $\vec{V}$ un vecteur polaire et $\vec{A}$ un vecteur axial, une loi du type $\vec{V} = \vec{V}'$ ou $\vec{A} = \vec{A}'$ n'est pas modifiée par changement de l'orientation de l'espace (dans le deuxième cas, on obtient $-\vec{A} = -\vec{A}'$). Par contre une loi du type $\vec{V} = \vec{A}$ est transformée en $\vec{V} = -\vec{A}$ et ne peut donc être une

loi physique. Cela revient à dire que les deux quantités doivent avoir le même comportement sous P (opération de parité).

De la même façon, deux quantités identifiées par une loi physique doivent avoir le même comportement sous les transformations C et T (conjugaison de charge et renversement temporel).

De plus, pour que l'égalité ait un sens en termes mathématiques, les deux quantités identifiées doivent être toutes deux soit des scalaires, soit des vecteurs de même dimension, soit de façon plus générale des tenseurs de même ordre et de même dimension.

Enfin, les deux quantités identifiées doivent être homogènes entre elles, c'est-à-dire qu'elles doivent s'exprimer dans les mêmes unités. En effet, le changement de la référence prise comme unité de base d'un certain type de grandeur physique doit avoir les mêmes répercussions des deux côtés de l'égalité. On préférera donc exprimer l'entropie S en fonction du terme $Nk_B \ln \left(\left(\frac{N}{N_0} \right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{U}{U_0} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-1} \right)$, homogène à S , plutôt qu'en fonction du terme $Nk_B \ln \left(N^{\frac{5}{2}} U^{-\frac{3}{2}} V^{-1} \right) + \text{cste}$, qui ne lui est pas homogène.

La première des contraintes permet de justifier le caractère polaire du vecteur champ électrique : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{él}} = q\vec{E}$, où $\vec{v}$ est un vecteur polaire et où m et q sont des scalaires polaires ; $\vec{E}$ est donc un vecteur polaire (même raisonnement pour $\vec{B}$ et $\vec{L}$ axiaux).

2.2. Adimensionnalisation et analyse dimensionnelle

Le but est ici d'obtenir une loi de la physique s'exprimant sous forme d'une équation adimensionnée, c'est-à-dire ne faisant intervenir que des termes sans dimension. On prend l'exemple d'une chute verticale avec frottement visqueux.

L'équation horaire s'écrit : $m \frac{d^2 z}{dt^2} + f \frac{dz}{dt} + mg = 0$.

$t_c = \frac{m}{f}$ est homogène à un temps.

$z_c = \frac{mg}{f} t_c$ est homogène à une distance.

On pose $\tau = \frac{t}{t_c}$ et $\zeta = \frac{z}{z_c}$. On obtient alors :

$$\frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} + \frac{d\zeta}{d\tau} + 1 = 0.$$

Cette équation a l'avantage d'être valable pour toute chute avec frottement visqueux alors qu'elle ne fait intervenir directement ni la masse du corps chutant ni son coefficient de frottement. On a obtenu une loi générale de la physique.

Ce genre de démarche peut se généraliser pour conduire à l'analyse dimensionnelle.

Pour un problème de physique donné, on note G_j la $j^{\text{ème}}$ grandeur pertinente de ce problème, définie comme étant une grandeur physique intervenant dans ce problème.

On appelle p_i une grandeur réduite de ce problème une grandeur telle que $p_i = \prod_j G_j^{\alpha_{ij}}$ et telle que p_i soit sans dimension.

Alors la loi physique $f(\{G_j\}) = 0$ doit pouvoir se mettre sous la forme $\Phi(\{p_i\}) = 0$, Φ ne dépendant plus des choix des unités par l'observateur.

L'impossibilité de construire des grandeurs réduites est alors signe que la modélisation du phénomène est incomplète.

Par exemple, si on veut décrire un pendule simple uniquement à partir de sa période T , de sa masse M et de sa longueur L , on ne peut pas trouver de grandeur réduite. Il faut aussi prendre en compte la pesanteur $\vec{g}$.

On définit alors $p = \frac{gT^2}{L}$, sans dimension. (Il s'agit d'un paramètre, pas d'une fonction.) Il existe donc une relation du type $\Phi(p) = 0$, dont la solution sera : $p = \text{cste}$, fixée dans le temps. D'où :

$$T \propto \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Ceci constitue bien une prédiction de l'analyse dimensionnelle, elle-même liée à la notion d'invariance, donc de symétrie.

On note que la résolution analytique du problème confirme bien ce résultat : $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$.

2.3. Maquettes

Le but est de modéliser à plus petite échelle (de longueur et/ou de temps) un phénomène physique afin de l'étudier plus facilement.

La loi $\Phi(\{p_i\}) = 0$ régissant ce phénomène est toujours la même. Donc, pour que la solution du problème de la maquette soit comparable à la solution du problème de départ, il faut que les $\{p_i\}$ soient les mêmes dans les deux cas.

Prenons le cas de la mécanique des fluides. Les deux nombres adimensionnalisés à maintenir constants sont le nombre de Reynolds $\mathcal{Re} = \frac{\rho v L}{\eta}$ et le nombre de Froude $\mathcal{Fr} = \frac{v^2}{gL}$. (Le deuxième compare les forces liées à l'inertie du fluide à celles liées à la gravité. Il permet de séparer des écoulements dits « torrentiels » d'écoulements dits « fluviaux ».)

Certaines grandeurs dimensionnées ne peuvent pas être aisément modifiées. C'est ici le cas de $\vec{g}$. Ceci implique que $\frac{v^2}{L}$ reste constante, puisque $\mathcal{Fr}$ reste constant.

On aura donc $\mathcal{Re} = \frac{\rho v^3 \text{cste}}{\eta}$. Or $\mathcal{Re}$ aussi doit rester constant. Donc $\frac{\rho v^3}{\eta}$ est une constante.

Il en découle que conserver un même fluide incompressible (par exemple, l'eau) de la réalité à la maquette empêche la réalisation de celle-ci. En effet, si on conserve ρ et η , on impose une vitesse

constante (car $\frac{\rho v^3}{\eta}$ est une constante) et donc une taille constante (car $\frac{v^2}{L}$ reste constante). La maquette devrait donc être à l'échelle 1 ! Il faut donc changer de fluide.

3. Brisure de symétrie

3.1. La bifurcation

Position du problème :



L'axe verticale est un axe de symétrie.

Équilibre des forces :

$$(m\vec{g} + m\omega^2 R \sin \theta \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

$$-mg \sin \theta + m\omega^2 R \sin \theta \cos \theta = 0$$

D'où :

$$\begin{cases} \sin \theta = 0 \\ \text{ou} \\ \cos \theta = \frac{g}{R\omega^2} \end{cases}$$

Stabilité : $\frac{d^2 E_m}{d\theta^2} > 0$ (où $E_m = mgz + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$). D'où, pour un angle nul, $g > R\omega^2$; et pour $\cos \theta = \frac{g}{R\omega^2}$, $g < R\omega^2$.

Donc, pour $g > R\omega^2$, la solution stable est $\theta = 0$, qui respecte bien la symétrie du problème. Mais pour $g < R\omega^2$, aucune des deux solutions ne respecte la symétrie du problème.

Cependant, on note que la superposition des deux solutions, elle, respecte la symétrie du problème.

3.2. Généralisation du principe de Curie

S'il y a plusieurs solutions équivalentes au problème, alors la symétrie du problème se retrouve *en moyenne* sur l'ensemble de ces solutions.

On insiste sur le fait que ces solutions doivent être équivalentes. Dans le problème précédent, $\sin \theta = 0$ n'est pas équivalente à $\cos \theta = \frac{g}{R\omega^2}$ (ces solutions ne sont pas stables dans les mêmes conditions).

Cela vaut également pour les ensembles continus de solutions, par exemples dans le cas du flambage d'une poutre ou de la cristallisation d'un liquide.

4. Limite des applications de la notion de symétrie

La notion de symétrie reste quelque chose de qualitatif, il sera donc impossible d'obtenir des résultats quantitatifs avec. Attention cependant à ne pas confondre « qualitatif » et « approximatif ». Un résultat qualitatif peut être une égalité ou une inégalité entre deux quantités ou la nullité ou non-nullité d'une quantité. Il ne s'agit pas de donner une vague valeur approchée. Un résultat « qualitatif » peut ainsi donner à lui seul de nombreux renseignements.

Considérons par exemple un objet ponctuel soumis à une force centrale (et conservative). Cela peut être un champ gravitationnel, mais aussi un rappel élastique. Ces deux types de lois ont d'ailleurs des expressions nettement différentes.

Le problème est à symétrie sphérique et le vecteur force $\vec{F}$ est un vecteur polaire. On a donc, comme dans le cas du champ électrique évoqué précédemment : $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$. Ce résultat est du domaine du qualitatif. Cependant, il permet à son tour de montrer que le moment cinétique est constant.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Or, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ et $\vec{p} = m\vec{v}$. Le premier terme est donc nul. De plus, $\vec{r} = r\vec{e}_r$ et $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = F(r)\vec{e}_r$. Le deuxième terme est aussi nul. Le moment cinétique est donc bien constant, ce qui implique par ailleurs que le mouvement est plan.

De plus : $\vec{L} = r\vec{e}_r \times m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$. On retrouve la loi des aires.

La seule notion de symétrie a permis de donner la planéité de la trajectoire ainsi que la loi des aires.

Cependant, pour déterminer la nature géométrique de la trajectoire (par exemple, pour montrer qu'il s'agit d'une orbite dans le cas d'un champ de pesanteur), il est nécessaire de recourir aux formes quantitatives des lois de la physique. De même, le théorème de Gauss a été nécessaire pour terminer le calcul sur le champ électrique produit par une sphère uniformément chargée en volume.

Conclusion

La notion de symétrie a beau n'être que qualitative, elle n'en permet pas moins d'obtenir un grand nombre de résultats, parmi lesquels des possibilités de vérification et de prédiction concernant les lois de la physique et la simplification de nombreux problèmes, simplification rendant possible leur résolution analytique.

La notion de symétrie joue également un rôle crucial en mécanique quantique de par la distinction bosons/fermions et en physique des particules où elle est à la base du mécanisme de Higgs (brisure de la symétrie électrofaible conduisant à donner une masse aux particules) et des théories au-delà du Modèle Standard telles que la Super-Symétrie (SUSY).