

# Moteurs et transformateurs électriques

Préparation à l'Agrégation de Physique

Jérémy Neveu – jneveu@lal.in2p3.fr

Montrouge 2020 – 2021

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Conversion électromécanique</b>	<b>4</b>
1.1	Conduction dans les métaux . . . . .	4
1.1.1	Modèle de Drude . . . . .	4
1.1.2	Électro-neutralité d'un milieu conducteur . . . . .	6
1.1.3	Les trois régimes de comportement d'un métal en régime sinusoïdal forcé . . . . .	8
1.1.4	Conducteur fixe dans un champ magnétique extérieur . . . . .	9
1.2	Le phénomène d'induction . . . . .	10
1.2.1	Définition du champ électromoteur . . . . .	10
1.2.2	Loi de Faraday . . . . .	12
1.3	Bilan d'énergie électromécanique . . . . .	12
1.3.1	Force de Laplace . . . . .	12
1.3.2	Bilan de puissance . . . . .	14
1.3.3	Actions mécaniques sur un dipôle magnétique . . . . .	15
1.4	La distribution de puissance en triphasé . . . . .	16
1.4.1	Définition d'un système de grandeurs sinusoïdales triphasées . . . . .	16
1.4.2	Exemple de structures électriques triphasées . . . . .	17
1.4.3	Puissance dans les systèmes triphasés . . . . .	18
1.4.4	Utilité du triphasé pour transporter l'énergie électrique . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Machines à champ magnétique tournant</b>	<b>21</b>
2.1	Génération d'un champ magnétique tournant . . . . .	21
2.2	Machine synchrone . . . . .	22
2.2.1	Structure . . . . .	23
2.2.2	Couple de la machine synchrone . . . . .	24
2.2.3	Problème du démarrage . . . . .	27
2.3	Machine asynchrone . . . . .	27
2.3.1	Structure . . . . .	27
2.3.2	Étude électrique du rotor . . . . .	28
2.3.3	Effets mécaniques . . . . .	29
2.3.4	Démarrage d'un moteur asynchrone . . . . .	30
2.3.5	Quelques remarques importantes . . . . .	30

2.4	Bilan de puissance d'une machine à champ magnétique tournant . . . . .	31
2.4.1	Bilan de puissance . . . . .	32
2.4.2	Fonctionnement en moteur . . . . .	32
2.4.3	Fonctionnement en génératrice . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Machines à courant continu</b>	<b>33</b>
3.1	Structure . . . . .	34
3.2	Principe général . . . . .	36
3.2.1	Rotor à une spire . . . . .	37
3.2.2	Cas général . . . . .	38
3.3	Modes de fonctionnement et bilan de puissance . . . . .	39
3.3.1	Bilan de puissance . . . . .	40
3.3.2	Caractéristiques de fonctionnement (en régime moteur) . . . . .	41
3.4	Modes d'excitation . . . . .	42
3.4.1	Excitation série . . . . .	43
3.4.2	Excitation parallèle (ou shunt) . . . . .	43
3.5	Machine à N spires . . . . .	43
3.5.1	Principe de base . . . . .	43
3.5.2	Bobinages réalistes . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Conversion de puissance électrique : le transformateur</b>	<b>47</b>
4.1	Notions préliminaires . . . . .	47
4.1.1	Théorème d'Ampère dans les milieux magnétiques . . . . .	47
4.1.2	Loi de la réfraction appliquée au champ $\vec{H}$ . . . . .	48
4.1.3	Matériaux ferromagnétiques . . . . .	49
4.2	Modélisation d'un transformateur électrique . . . . .	51
4.2.1	Structure d'un transformateur électrique . . . . .	51
4.2.2	Équations de fonctionnement . . . . .	52
4.2.3	Modèle du transformateur parfait . . . . .	55
4.3	Le transformateur réel . . . . .	56
4.3.1	Courant magnétisant . . . . .	56
4.3.2	Pertes dans les bobinages . . . . .	57
4.3.3	Non-linéarités du noyau ferromagnétique . . . . .	57
4.4	Quelques compléments . . . . .	57
4.4.1	Quand peut-on négliger les résistances des bobinages ? . . . . .	57
4.4.2	Quand est-ce que l'approximation de perméabilité infinie est valable ? . . . . .	58
4.4.3	Influence de la non-linéarité du noyau . . . . .	58
<b>A</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>59</b>
<b>B</b>	<b>Petit interlude technique : puissance (très facultatif)</b>	<b>59</b>
B.1	Puissance active . . . . .	59
B.2	Puissance réactive et apparente . . . . .	59
B.3	Puissance complexe . . . . .	60
B.4	Puissances en régime sinusoïdal de tension et en régime non sinusoïdal de courant . . . . .	61
B.5	Complément à caractère documentaire (complètement facultatif) . . . . .	61
B.5.1	Théorème de Boucherot . . . . .	61
B.5.2	Cas d'une réponse non linéaire . . . . .	62

---

<b>C Autres moteurs</b>	<b>62</b>
C.1 Le moteur universel . . . . .	62
C.2 Le moteur pas à pas . . . . .	63
<b>D Programme de PSI sur la conversion de puissance</b>	<b>63</b>

L'objectif de ce cours est de partir des lois de la conduction électrique et des équations de Maxwell pour aboutir à la compréhension des machines de conversion de puissance électromécanique ou électrique-électrique. Les aspects technologiques de ces machines seront évoqués lorsqu'ils font appel à des principes physiques simples et permettent de faire le lien avec le quotidien, l'industrie ou la paillasse de TP.

Pour l'agrégation de physique, ce cours concerne essentiellement :

- la leçon "LP09 Conversion de puissance électromagnétique",
- les montages "MP35 Moteurs" et "MP21 Production et conversion d'énergie électrique",

et de manière annexe :

- les leçons "LP10 Induction électromagnétique", "LP22 Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques" et "LP23 Mécanismes de la conduction électrique dans les solides"
- les montages "MP15 Production et mesure de champ magnétique" et "MP16 Milieux magnétiques".

## 1 Conversion électromécanique

### 1.1 Conduction dans les métaux

#### 1.1.1 Modèle de Drude

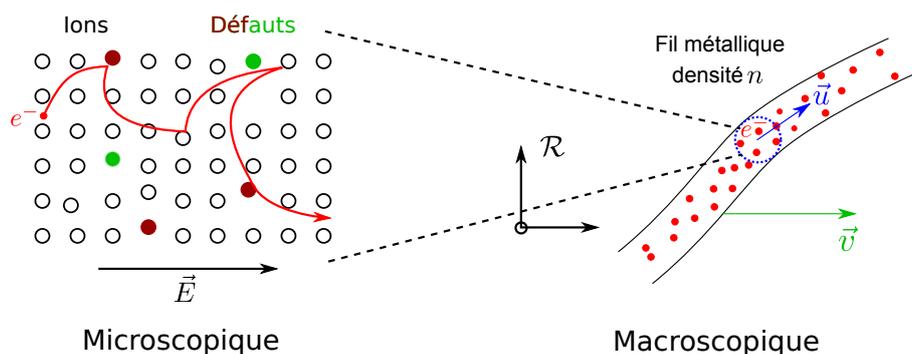


FIGURE 1 – Position du problème pour étudier la conduction dans les métaux. Un fil métallique de densité d'électrons libres  $n$  est en mouvement à vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  d'un observateur. Le fluide d'électrons du fil est animé d'une vitesse  $\vec{u}$  dans le référentiel lié au conducteur.

Un métal est constitué d'un cristal périodique d'ions positifs maintenus ensemble par la circulation d'électrons libres de se déplacer dans le conducteur. Typiquement, dans le cuivre on a une densité électronique de  $10^{29} e_{\text{libre}}^-/\text{m}^3$ .

On considère un conducteur métallique, sans propriétés magnétiques particulières, filiforme avec les notations définies figure 1. On pose  $\epsilon_r$  la permittivité diélectrique relative du milieu,  $n$  la densité d'électrons libres,  $\vec{u}$  la vitesse moyenne du gaz d'électrons par rapport au réseau cristallin et  $\vec{v}$  la vitesse du conducteur par rapport à un observateur.

Établissons l'expression de la conductivité électrique dans un régime sinusoïdal quelconque, à l'aide du modèle de Drude (établi en 1900, soit 3 ans seulement après la découverte de l'électron par Thomson). Le modèle de Drude étudie le déplacement des électrons dans le métal, soumis à un champ électrique extérieur et aux collisions avec les défauts du réseau cristallin, en s'inspirant de la théorie cinétique des gaz. On ne considère aucun champ magnétique pour le moment. On note  $\tau$  le temps de libre parcours moyen des électrons entre deux collisions avec des ions du réseau métallique ou des défauts. C'est

donc le temps typique d'interaction entre le gaz d'électrons et son support, de l'ordre de  $10^{-14}$  s. Si on étudie le comportement des électrons libres, de masse  $m$ , soumis à un champ électrique  $\vec{E}$  en régime sinusoïdal, dans le référentiel du conducteur, le bilan de ces déplacements sur une échelle mésoscopique, permet d'aboutir à une équation différentielle sur la vitesse moyenne  $\vec{u}$  du fluide électronique dans le métal :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{e}{m}\vec{E} - \frac{\vec{u}}{\tau} \quad (1.1)$$

Après un passage en notation complexe, on obtient rapidement :

$$\vec{u} = \frac{-e\tau/m}{1 + i\omega\tau}\vec{E} \quad (1.2)$$

Le courant électronique est donné par  $\vec{j} = -ne\vec{u}$ . En posant la conductivité statique  $\sigma_0 = ne^2\tau/m$ , on obtient la conductivité complexe  $\underline{\sigma}(\omega)$  valable en régime sinusoïdal quelconque :

$$\underline{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}, \quad \vec{j} = \underline{\sigma}(\omega)\vec{E} \quad (1.3)$$

Pour un métal usuel, on a  $\sigma_0 \approx 10^6$  à  $10^7$  S/m.

### Champ électrique dans un fil métallique

Dans le modèle de Drude, à l'échelle microscopique on admet la présence d'un champ électrique  $\vec{E}$  qui accélère les électrons. Si on repasse à l'échelle d'un circuit électrique, disons une pile branchée à un fil électrique, quelle est la forme du champ électrique? On se doute que le champ électrique doit être aligné avec le fil car le fluide d'électrons est condamné à suivre la direction du fil et la loi d'Ohm nous montre que le courant  $\vec{j}$  et le champ  $\vec{E}$  sont alignés. Mais  $\vec{E}$  est pourtant la cause donnant naissance à  $\vec{j}$ . Comment le courant  $\vec{j}$  rétroagit-il sur le champ  $\vec{E}$  pour que celui-ci soit aligné en tout point à la direction du fil?

Un rapide bilan des équations de Maxwell en statique et dans un milieu neutre nous montre qu'aucune de ces lois ne peut être la cause de la rétroaction du courant sur le champ électrique. On se doute que la seule façon de faire tourner un champ électrique est de lui opposer des charges électriques, qui s'accumuleraient dans les virages formés par le fil. Or comme on a  $\text{div } \vec{E} = 0$  dans un métal, ce serait donc des charges surfaciques et la relation de passage du champ  $\vec{E}$  serait donc à l'œuvre.

Au final, les équations pour décrire l'alignement du champ  $\vec{E}$  avec un fil métallique soumis à une différence de potentiel  $U$  sont :

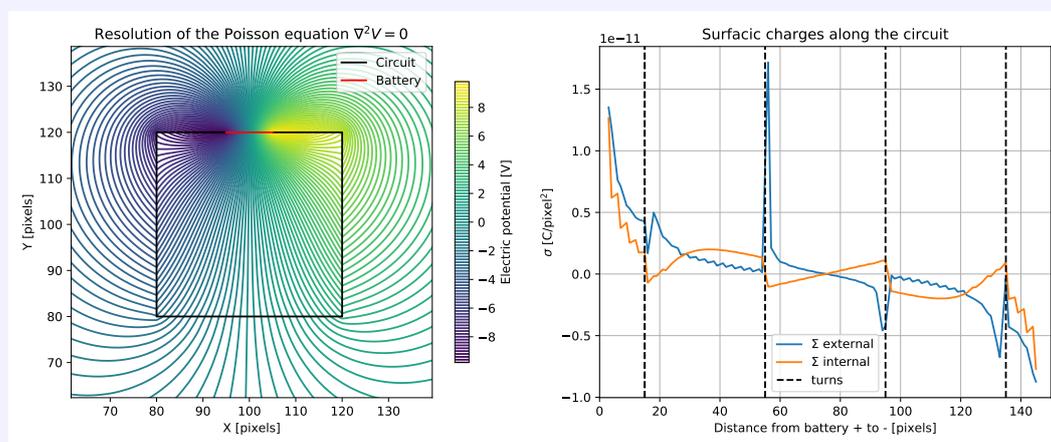
$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} = 0, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}, \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V, \quad \vec{E}_{\text{ext}} - \vec{E}_{\text{int}} = \frac{\Sigma}{\epsilon_0} \overrightarrow{n_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}} \\ \Delta V = 0, \quad I = \frac{U}{R}, \quad \|\vec{E}\| = \frac{I}{\sigma A} \end{aligned}$$

avec  $\Sigma$  une densité de charge surfacique,  $R$  la résistance totale du circuit, et  $A$  la section du fil. La densité surfacique de charge se calcule via l'angle  $\alpha$  que réalise le champ  $\vec{E}$  à la sortie du fil par rapport à sa direction :

$$\Sigma = \epsilon_0 \frac{I}{\sigma A} \tan \alpha \quad (1.4)$$

La résolution de ces équations se passent en quatre étapes. Premièrement, la pile et le circuit imposent le courant  $I$  ce qui impose la valeur de  $E$  le long du circuit, donc le potentiel électrique  $V$ . Puis il s'agit de résoudre l'équation de Poisson  $\Delta V = 0$  avec ces conditions initiales et une condition de nullité à l'infini. Troisièmement on calcule les équipotentielles autour du circuit et enfin à partir de celle-ci on détermine l'angle  $\alpha$  et donc la densité surfacique de charge  $\Sigma$  le long du circuit.

Le résultat de ces étapes pour un circuit carré très simple soumis à une tension  $U = 20\text{ V}$  est représenté dans la figure ci-dessous. Autour des angles du circuit, les équipotentielles arrivent de façon plus ou moins tangente ce qui indique la présence de charge surfacique à l'intérieur (courbe orange) ou à l'extérieur (courbe bleue) du circuit. Ce sont ces charges qui imposent l'alignement du champ  $\vec{E}$  avec la direction du fil et permettent d'infléchir le champ imposé par la pile. Ces charges surfaciques dans les virages du circuit peuvent être mises en évidence expérimentalement à l'aide de très fortes tensions.



Pour plus d'informations, voir le chapitre 18 de *Matter & Interactions II*, Ruth W. Chabay, Bruce A. Sherwood et *A semiquantitative treatment of surface charges in DC circuits*, R. Müller, *American Journal of Physics* 80, 782 (2012).

### 1.1.2 Électro-neutralité d'un milieu conducteur

Rappelons également l'origine de l'électro-neutralité dans un conducteur en régime sinusoïdal. En écrivant la conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (1.5)$$

et en utilisant  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  et  $\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \epsilon_r$  (deux équations valables pour tout régime sinusoïdal), on obtient en complexe :

$$\text{div } \vec{j} = \sigma \text{div } \vec{E} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 &\Rightarrow i\omega \underline{\rho} + \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \frac{\underline{\rho}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 0 \\
&\Rightarrow -\omega^2 \underline{\rho} + \frac{i\omega}{\tau} \underline{\rho} + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r \tau} \underline{\rho} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \rho = 0 \text{ avec } \omega_p^2 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r \tau} = \frac{ne^2}{m\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (1.7)
\end{aligned}$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre  $\omega_p$ , la *pulsation plasma*<sup>1</sup>.

Considérons que le milieu est excité par une onde électromagnétique de pulsation  $\omega$ . Un milieu métallique initialement neutre électriquement peut-il encore rester neutre ? L'onde électromagnétique crée des courants de conduction dans le métal. Regardons comment évolue la densité de charge électrique en régime sinusoïdal forcé :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \rho = 0 \Leftrightarrow \left( \omega_p^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau} \right) \rho = 0 \quad (1.8)$$

Cette dernière équation est vérifiée pour tout  $\omega$  par  $\rho = 0$ , sauf lorsque le facteur de gauche s'annule. Dans ce cas l'électroneutralité du milieu peut être brisée par l'onde électromagnétique car  $\rho \neq 0$  est solution. On a donc

$$\omega_p^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau} = 0 \Rightarrow \Delta = -\frac{1}{\tau^2} + 4\omega_p^2 \quad (1.9)$$

Or, en pratique on mesure que  $\omega_p \approx 100/\tau$ , donc la solution  $\rho(\omega) \neq 0$  est possible pour les pulsations :

$$\omega_{\pm} = \frac{-\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\Delta}}{-2} \approx -\frac{i}{2\tau} \mp \omega_p \approx \mp \omega_p \quad (1.10)$$

Ainsi, on montre qu'un métal soumis à une onde électromagnétique peut être localement non neutre s'il est excité à sa pulsation plasma. Pour toute pulsation  $\omega \neq \omega_p$ , le milieu conducteur reste donc neutre s'il est déjà neutre avant l'arrivée de l'onde électromagnétique.

Considérons maintenant que pour une raison quelconque une perturbation vient localement charger le milieu. Si à l'instant  $t = 0$ , on a une distribution de charge électrique  $\rho_0(\vec{r})$  non nulle, elle évoluera localement selon  $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r})e^{-t/\tau} \cos(\omega_p t)$  d'après l'équation de l'oscillateur amorti. Pour des ondes électromagnétiques de basses pulsations  $\omega \ll 1/\tau$ , alors cette perturbation de charge se résorbe très rapidement en  $e^{-t/\tau}$ , donc le milieu reste neutre pour ces ondes basse fréquence. Dans le régime  $1/\tau \ll \omega \ll \omega_p$ , les collisions des électrons avec le matériau ne suffisent plus à rétablir la neutralité immédiatement à l'échelle de la période de l'onde électromagnétique. Toutefois, la fréquence d'oscillation d'une perturbation de charge lors de son retour à l'équilibre s'effectue à la pulsation  $\omega_p$ . La moyenne temporelle de la densité de charge  $\rho$  à l'échelle de temps  $1/\omega \gg 1/\omega_p$  reste donc nulle : le milieu est encore considéré neutre vis à vis de l'onde étudiée. Par contre, dans le cas  $\omega \geq \omega_p$ , les oscillations de densité de charge  $\rho$  sont à considérées aux échelles de temps  $1/\omega$  étudiées.

---

1. De manière générale, pour les métaux on a  $1/\tau = 0.01\omega_p$  donc  $\omega_p \approx 10^{16}$  rad/s. De plus comme  $\epsilon_0 \approx 8 \times 10^{-12}$  F/m, on a  $\sigma_0/\epsilon_0 \epsilon_r \approx 10^{18}$  rad/s.

Conclusion :

1. une onde électromagnétique préserve l'électro-neutralité d'un métal ou d'un plasma si sa pulsation  $\omega$  est différente de la pulsation plasma  $\omega_p$
2. si une perturbation locale de charge préexiste dans le milieu, on peut considérer le milieu neutre vis à vis de l'onde électromagnétique seulement tant que  $\omega \ll \omega_p$
3. à  $\omega = \omega_p$ , des ondes de plasma (plasmons) peuvent se propager dans le métal.

### 1.1.3 Les trois régimes de comportement d'un métal en régime sinusoïdal forcé

On se place dans le régime de l'ARQS : tous les temps de propagation des différentes quantités électromagnétiques sont négligeables devant leurs périodes d'oscillation. En particulier, pour un conducteur, comme le milieu est globalement neutre on est dans le régime de l'ARQS magnétique. Mais dans l'ARQS on doit obtenir aussi  $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$  (i.e.  $\sigma(\omega) \approx \sigma_0$ ) pour ne pas avoir de phénomènes de retard entre le courant et le champ électrique, ce qui impose la condition supplémentaire  $\omega \ll 1/\tau$  : c'est l'ARQS métallique. L'ARQS est donc un peu plus restrictive dans le métal car elle apporte une nouvelle condition ( $\omega \ll 10^{14}$  rad/s) due aux interactions entre les charges dont il faut négliger le temps caractéristique  $\tau$ , en plus de la condition sur les longueurs d'onde de propagation des quantités électromagnétiques négligeables devant la taille du système étudié. Dans ce régime issu de l'ARQS magnétique, on montre que le courant de déplacement est bien toujours négligeable devant le courant de conduction :

$$\text{Courant de déplacement : } \left\| \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \approx \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega E \quad (1.11)$$

$$\text{Courant de conduction : } \left\| \mu_0 \vec{j} \right\| \approx \mu_0 \sigma(\omega) E \quad (1.12)$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega E \ll \mu_0 \sigma_0 E \Rightarrow \omega \ll \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} \approx 10^{18} \text{ rad/s} \quad (1.13)$$

puisque les propriétés des métaux donnent  $1/\tau \approx 10^{14}$  rad/s  $\ll \sigma_0/\epsilon_0 \epsilon_r$ .

Quel est le comportement des métaux aux fréquences supérieures ? On peut montrer que le courant de déplacement peut être négligeable sur une plage de fréquence plus large que celle donnée par  $1/\tau$ . En effet, dans le cas où  $\omega \gg 1/\tau$ , on a :

$$\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega E \ll \mu_0 \sigma(\omega) E \Rightarrow \omega \|1 + i\omega\tau\| \approx \omega^2 \tau \ll \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow \omega^2 \ll \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r \tau} = \omega_p^2 \quad (1.14)$$

Le courant de déplacement reste donc négligeable si  $\omega^2 \ll \sigma_0/\epsilon_0 \epsilon_r \tau = \omega_p^2$  avec  $\omega_p$  la pulsation plasma dont la fréquence est de l'ordre de  $10^{16}$  rad/s. Le courant de déplacement est donc négligeable aussi sur la plage  $1/\tau \ll \omega \ll \omega_p$  mais la conductivité  $\sigma$  devient dépendante de  $\omega$  ce qui nous fait sortir du cadre de l'ARQS métallique.

Selon que le courant de déplacement est négligeable ou non, on constate que la relation de dispersion associée à la propagation d'une onde électromagnétique dans un métal évolue. Il existe trois régimes d'interaction entre le métal et une onde électromagnétique, suivant l'ordre de grandeur de  $\omega$  vis à vis de  $1/\tau$  et  $\omega_p$ . Ces trois régimes conduisent à des phénomènes physiques bien distincts, mais seul le régime  $\omega \ll 1/\tau$  rentre dans le cadre de l'ARQS et voit la loi d'Ohm locale  $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$  vérifiée. Dans le régime  $\omega \ll 1/\tau$ , les oscillations du champ électrique sont suffisamment lentes pour que les électrons interagissent plusieurs fois avec le métal sur une période. Si  $1/\tau \ll \omega \ll \omega_p$  alors les électrons n'ont plus le libre parcours moyen suffisant pour interagir mais la longueur d'onde de l'onde électromagnétique est encore trop grande pour pénétrer le gaz électronique. Lorsque  $\omega \gg \omega_p$ , le fluide électronique et la maille métallique deviennent transparents pour l'onde.

Domaine spectral	Ondes radio à micrométriques $\omega \ll 1/\tau \ll \omega_p$	IR à UV $1/\tau \ll \omega < \omega_p$	UV dur, X faible $1/\tau \ll \omega_p \leq \omega$
ARQS	oui si $L \ll \lambda = c/f$	non	non
Électro-neutralité	oui	oui sauf pour une perturbation initiale de charge vers $\omega \lesssim \omega_p$	oui sauf à $\omega_p$ et sauf pour une perturbation initiale de charge
Relation dispersion	$\underline{k}^2 \approx -i\mu_0\sigma_0\omega$	$\underline{k}^2 \approx (\omega^2 - \omega_p^2)/c^2$	
Interprétation	pénétration de l'onde EM dans le métal amortie par effet Joule	interaction électrons-ions négligeable donc plus d'effet Joule et réémission totale de l'onde EM	les électrons ne suivent plus, le métal devient transparent à l'onde EM
Phénomènes physiques	loi d'Ohm, effet de peau, réflexion partielle	onde évanescente, réflexion totale (éclat métallique)	propagation libre, transparence des métaux, plasmons à $\omega = \omega_p$

TABLE 1 – Les trois régimes d'interaction entre un métal et une onde EM.

**Loi d'Ohm et métal dans l'ARQS :** dans le régime  $\omega \ll 1/\tau$ , on a simplement la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}, \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (1.15)$$

Pour les applications technologiques usuelles, l'ARQS est valable pour des objets de taille  $L \approx 1$  m si la fréquence des champs électromagnétiques vérifie  $f \ll 10^8$  Hz. Or la loi d'Ohm est applicable en régime variable tant que  $f \ll 10^{14}$  Hz. Donc supposer l'ARQS pour un système à taille humaine impose à la fois la loi d'Ohm, la négligeabilité du courant de déplacement et l'électro-neutralité. Dans un métal en ARQS on a donc :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0, & \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0\sigma_0\vec{E} \end{cases} \quad (1.16)$$

#### 1.1.4 Conducteur fixe dans un champ magnétique extérieur

Dans le modèle de Drude, la présence d'un éventuel champ magnétique n'a pas été prise en compte dans la force de Lorentz appliquée aux électrons. Pourtant, un champ magnétique apparaît nécessairement à cause de la circulation du courant électrique dans un circuit ou par des influences extérieures venant d'autres circuits électriques. Dans ce cas la partie magnétique de la force de Lorentz  $-e\vec{u} \wedge \vec{B}$  est à comparer par exemple à la force de frottement fluide :

$$\left\| -\frac{e}{m}\vec{u} \wedge \vec{B} \right\| \ll \left\| -\frac{\vec{u}}{\tau} \right\| \Leftrightarrow B \ll \frac{m}{e\tau} \approx \frac{10^{-30}}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-14}} \approx 10^3 \text{ T} \quad (1.17)$$

Même appliquée par une source extérieure, la force magnétique est donc en général négligeable devant la force de frottement fluide dans les cas usuels d'application du modèle

de Drude. Mais négligeable ne veut pas dire non mesurable dans des conditions usuelles, examinons l'effet de ce champ sur le mouvement collectif des électrons d'un conducteur.

Reprenons le modèle de Drude en supposant cette fois que le conducteur est plongé dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$ . On se place encore une fois dans le référentiel du réseau cristallin :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{e}{m} (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}) - \frac{\vec{u}}{\tau} \quad (1.18)$$

Avec  $\vec{j} = -ne\vec{u}$ , en régime permanent on obtient :

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} - \frac{e\tau}{m} \vec{j} \wedge \vec{B} = \sigma_0 \left( \vec{E} - \frac{\vec{j}}{en} \wedge \vec{B} \right) \quad (1.19)$$

On voit qu'il apparaît un champ électrique orthogonal à la propagation du courant appelé champ de Hall :

$$\vec{E}_H = \frac{\vec{j}}{en} \wedge \vec{B} = -\vec{u} \wedge \vec{B} \quad (1.20)$$

Dans un métal, pour un courant électrique raisonnable la différence de potentiel créée par ce champ électrique transversal est extrêmement faible car  $n \approx 10^{29} e^-/\text{m}^3$ . Néanmoins, pour un même courant électrique, dans un semi-conducteur dopé N où la densité électronique est plutôt de l'ordre de  $10^{20} e^-/\text{m}^3$  seulement à 300 K, la tension de Hall peut atteindre quelques mV, ce qui peut être exploité pour construire un teslamètre à effet Hall.

## 1.2 Le phénomène d'induction

Jusqu'à présent, nous avons étudié la conduction dans les métaux en se plaçant dans le référentiel du réseau cristallin, ou de façon équivalente en supposant que le conducteur électrique était fixe dans le référentiel de l'observateur. Si on lève cette dernière hypothèse, alors de nouveaux phénomènes apparaissent : c'est l'induction.

### 1.2.1 Définition du champ électromoteur

Reprenons le modèle de Drude et supposons le conducteur mobile à vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel d'un observateur et dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$ . Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron dans le référentiel de l'observateur  $\mathcal{R}$  donne l'équation :

$$\frac{d(\vec{u} + \vec{v})}{dt} = -\frac{e}{m} \vec{E} - \frac{e}{m} (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{B} - \frac{\vec{u}}{\tau} \quad (1.21)$$

Dans un métal en ARQS, si  $\vec{v}$  est quasi-constant<sup>2</sup>, on obtient la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \sigma_0 (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (1.22)$$

Or de manière générale le champ électrique peut s'écrire de la façon suivante :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.23)$$

avec  $\vec{A}$  le potentiel vecteur.

---

2. On peut montrer que le terme  $m d\vec{v}/dt$  est négligeable devant  $-e\vec{v} \wedge \vec{B}$  si la pulsation typique  $\Omega$  de variation de  $\vec{v}$  vérifie  $\Omega \ll eB/m$ .  $eB/m$  correspond à la pulsation cyclotron et vaut 175 GHz pour  $B = 1$  T donc en pratique pour les machines de conversion électromécanique la condition sur  $\Omega$  est vérifiée.

**Définition 1.1.** On définit le champ électromoteur par :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (1.24)$$

La loi d'Ohm locale s'écrit alors :

$$\vec{j} = \sigma_0(-\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{E}_m) \quad (1.25)$$

Établissons maintenant la loi d'Ohm dans un conducteur filiforme mobile. Dans l'ARQS métallique on a  $\text{div } \vec{j} = 0$  donc  $j(M, t) = j(t)$ . Pour un fil  $AB$  de section  $S$  (représenté figure 2), on définit le courant électrique par  $i(t) = Sj(t)$ . Intégrons la loi d'Ohm locale :

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{j} \cdot d\vec{l} &= \sigma_0 \int_A^B (-\overrightarrow{\text{grad}} V) \cdot d\vec{l} + \sigma_0 \int_A^B \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{l} \\ \Leftrightarrow i_{A \rightarrow B} \int_A^B \frac{dl}{S\sigma_0} &= V_A - V_B + \int_A^B \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{l} \end{aligned} \quad (1.26)$$

On définit la résistance du tronçon  $AB$  par :

$$R_{AB} = \int_A^B \frac{dl}{S\sigma_0} \quad (1.27)$$

et la force électromotrice par :

$$e_{AB} = \int_A^B \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{l} \quad (1.28)$$

La loi d'Ohm intégrée est donc :

$$V_A - V_B = R_{AB}i_{A \rightarrow B} - e_{AB} \quad (1.29)$$

Pour un circuit fermé, on a  $A = B$ , donc on obtient simplement  $e = Ri$ . On constate que le terme moteur est bien celui venant du champ électromoteur alors que le terme issu du potentiel électrostatique est nul. Les schémas électriques équivalents sont présentés figure 2.

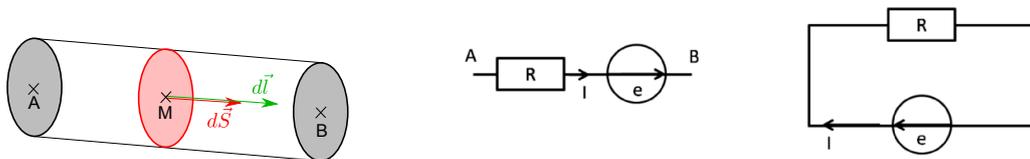


FIGURE 2 – Schémas électriques équivalents et conventions de calcul.

**Remarque importante :** lorsque l'on oriente le chemin d'intégration le long du conducteur, on fixe l'orientation de  $e$  et  $i$  qui sont alors dans le même sens, forcé par le choix commun de  $d\vec{l}$  dans l'établissement de la loi d'Ohm. En effet, l'intégration permettant d'obtenir  $i$  définit un élément de surface  $d\vec{S}$  dans la section du fil, et l'intégration permettant d'obtenir  $e$  définit un élément de longueur  $d\vec{l}$ . Le produit  $d\vec{l} \cdot d\vec{S}$  définissant un élément de volume il est nécessairement positif, donc  $e$  et  $i$  doivent être orientés dans le même sens sur les schémas électriques, les calculs donneront leurs véritables signes.

### 1.2.2 Loi de Faraday

On calcule la force électromotrice pour un circuit *fermé et rigide*, mobile dans un champ magnétique  $\vec{B}$  :

$$\begin{aligned} e &= \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \oint (-\partial_t \vec{A} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= \iint_{\Sigma} (-\partial_t \vec{B} + \text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B})) \cdot d\vec{S} \\ &= - \iint_{\Sigma} (\partial_t \vec{B} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}) \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (1.30)$$

en utilisant  $\text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{v} \text{div} \vec{B} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$  et  $\text{div} \vec{B} = 0$ . Le circuit étant rigide

$$e = -(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \left( \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

où l'on a reconnu l'opérateur dérivée totale par rapport au temps  $\frac{D}{Dt} = \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ . On retrouve donc la *loi de Faraday* :

$$\boxed{e = -\frac{D\phi}{Dt}} \quad (1.31)$$

## 1.3 Bilan d'énergie électromécanique

### 1.3.1 Force de Laplace

Jusqu'à présent, on a vu à travers le phénomène d'induction comment le mouvement d'un conducteur dans un champ magnétique pouvait engendrer un courant électrique. Cependant la création de ce courant électrique n'est pas gratuite et impose l'existence d'une force qui s'oppose à la poursuite de ce mouvement : c'est la force de Laplace. De manière générale, la force de Laplace s'applique à tout conducteur parcouru par un courant électrique et en mouvement dans un champ magnétique extérieur, que le courant soit induit par ce mouvement ou bien forcé par un générateur externe.

Réalisons le bilan des forces de Lorentz qui s'exercent sur une section de conducteur placé dans un champ magnétique extérieur, tel que défini figure 1. La force de Lorentz s'exerce à la fois sur les électrons et sur les ions du réseau, d'où la force volumique résultante :

$$d\vec{f}_{\text{Lorentz}} = \rho_e d\tau [\vec{E} + (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{B}] + \rho_{\text{ions}} d\tau [\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}] \quad (1.32)$$

Comme le conducteur reste localement neutre on a  $\rho_e = -ne = -\rho_{\text{ions}}$ . Avec  $\vec{j} = \rho_e \vec{u}$ , on obtient une résultante de force volumique non nulle appelée force de Laplace :

$$d\vec{f}_L = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B} \quad (1.33)$$

Dans le cas d'un conducteur filiforme, la force de Laplace linéique s'écrit :

$$d\vec{f}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (1.34)$$

Une autre interprétation de la force de Laplace est possible. Elle peut être vue comme la force due au champ de Hall<sup>3</sup> sur les ions métalliques :

$$\vec{E}_H = -\vec{u} \wedge \vec{B} \quad (1.35)$$

3. Dans la section 1.1.4, nous avons montré que le champ de Hall était infinitésimal dans un métal si on cherche à le mesurer à cause d'un facteur en  $1/n$ . Il n'empêche que ce champ, certes faible, appliqué à l'ensemble des ions du réseau de densité  $n$ , peut créer une force macroscopique importante.

$$d\vec{f}_{\text{Hall} \rightarrow \text{ions}} = d\tau \rho_{\text{ions}} \vec{E}_H = \rho_{\text{ions}} (-\vec{u} \wedge \vec{B}) = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B} = d\vec{f}_L \quad (1.36)$$

En étant en mouvement dans un champ magnétique extérieur, le courant électrique traversant le conducteur est dévié et il se crée un champ de Hall transversal au courant. Si le courant a été généré par induction, le champ de Hall s'oppose systématiquement à la poursuite du mouvement qui a donné naissance au courant, en s'opposant au mouvement des ions du réseau.

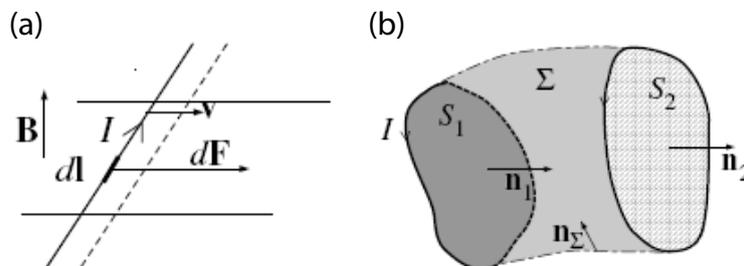


FIGURE 3 – (a) Force de Laplace. (b) Surfaces  $S_1$ ,  $S_2$  et  $\Sigma$  définies par le circuit.

**Travail des forces de Laplace :** la force de Laplace est le bilan de la force de Lorentz subie par tous les porteurs de charges dans un conducteur en mouvement. Or, il est "bien connu" que la force de Lorentz magnétique "ne travaille pas". On pourrait alors s'étonner du fait que la force de Laplace soit, elle, le moyen d'une conversion d'énergie... Pour lever ce paradoxe, on peut remarquer que la puissance  $\mathcal{P}$  résultant de la force de Lorentz magnétique s'écrit :

$$\mathcal{P} = (e\vec{u} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u} = 0 \quad (1.37)$$

En revanche, la puissance de la force Laplace est :

$$d\mathcal{P}_L = (\vec{j} d\tau \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} \quad (1.38)$$

mais cette fois  $\vec{j}$  n'a pas de raison d'être colinéaire à  $\vec{v}$ . La force de Lorentz ne travaille pas mais l'opérateur qui a mis le circuit en mouvement oui.

On cherche maintenant à évaluer le travail élémentaire des forces de Laplace  $\delta\mathcal{W}$  sur un circuit électrique avec une vue macroscopique. On introduit  $d\vec{x} = \vec{v}dt$ , pour obtenir :

$$\delta\mathcal{W} = I (d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{x} = I (d\vec{l} \wedge d\vec{x}) \cdot \vec{B} = Id\Phi_c \quad (1.39)$$

où  $d\Phi_c$  est le "flux coupé". Considérons désormais le cas d'un circuit indéformable, à courant constant. On peut alors exprimer ce travail comme la variation d'une fonction d'état en sommant sur tout un circuit fermé, en écrivant :

$$\mathcal{W} = I \int_1^2 d\vec{x} \cdot \oint d\vec{l} \wedge \vec{B} = I\Delta\Phi_c \quad (1.40)$$

où le flux coupé total  $\Delta\Phi_c$  est le flux total à travers la surface  $\Sigma$  balayée par le circuit et orientée de façon consistante avec le sens du courant  $I$  et le sens de déplacement (voir figure 3). En utilisant la conservation du flux magnétique, on a :

$$\Phi_\Sigma + \Phi_{S_1} + (-\Phi_{S_2}) = 0 \quad (1.41)$$

et donc finalement le résultat "bien connu" :

$$\mathcal{W} = I\Delta\Phi_c = I\Phi_\Sigma = I(\Phi_{S_2} - \Phi_{S_1}) \quad (1.42)$$

### 1.3.2 Bilan de puissance

Considérons une modélisation filaire des courants. La puissance mécanique liée au mouvement du système est alors :

$$d\mathcal{P}_L = d\vec{f}_L \cdot \vec{v} = I \left( d\vec{l} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v} = -I \left( \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{l} \quad (1.43)$$

où la seconde égalité est obtenue en exploitant les propriétés du produit mixte<sup>4</sup>. En introduisant le champ électromoteur :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.44)$$

et la force électromotrice d'induction :

$$de = \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \quad (1.45)$$

on obtient la relation suivante.

**Théorème 1.2.** *Relation fondamentale de la conversion de puissance électromécanique :*

$$\boxed{d\mathcal{P}_L = -Ide \Rightarrow \mathcal{P}_L + \mathcal{P}_e = 0} \quad (1.46)$$

avec  $d\vec{l}$  dans le sens de  $I$ ,  $\vec{B}$  stationnaire et  $\mathcal{P}_e = Ie$  la puissance électrique induite. Pour un circuit électrique mobile dans un champ  $\vec{B}$  permanent, si de la puissance électrique est fournie au système électrique via des phénomènes inductifs ( $\mathcal{P}_e > 0$ ) alors exactement la même puissance est prélevée sur le système mécanique ( $\mathcal{P}_L < 0$ ). Et vice versa : si de la puissance mécanique est fournie au système mécanique via les forces de Laplace ( $\mathcal{P}_L > 0$ ), alors exactement la même puissance est prélevée au système électrique via les phénomènes inductifs ( $\mathcal{P}_e < 0$ ).

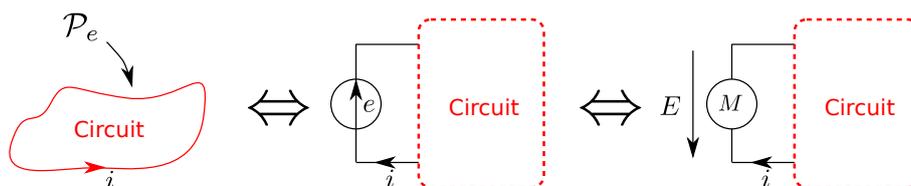


FIGURE 4 – Représentation de la force électromotrice ou contre-électromotrice alimentant un circuit électrique extérieur. Si  $\mathcal{P} = ei = -Ei = -\mathcal{P}_M > 0$ , alors les phénomènes inductifs fournissent de l'énergie au circuit et le dipôle équivalent aux phénomènes inductifs est bien un générateur ( $\mathcal{P}_M < 0$ ). Sinon la force contre-électromotrice s'oppose au passage du courant et prélève de la puissance au circuit extérieur ( $\mathcal{P}_M > 0$ ).

**Retour important sur les conventions de signes :** on remarque que les phénomènes inductifs peuvent être modélisés électriquement avec  $e$  et  $i$  de mêmes signes et orientés dans le même sens (sens du vecteur  $d\vec{l}$  le long du circuit). "De même sens" signifie que

4. En l'occurrence :  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b}$ .

le dipôle équivalent  $M$  soumis à cette tension  $e$  et parcouru par ce courant  $i$  peut être représenté en convention générateur.

Cependant, notons que si  $\mathcal{P}_e = ei > 0$ , alors des actions extérieures fournissent de l'énergie électrique au circuit par induction. De même si  $\mathcal{P}_L > 0$  alors des actions extérieures fournissent de l'énergie mécanique au circuit.

Or, on rappelle que les conventions électriques définissent la puissance reçue par le dipôle avec tension et intensité positives mais orientés en sens inverse (cf cours électronique). Celle-ci est positive pour un dipôle récepteur et négative pour un dipôle générateur. On remarque donc que cette convention électrocinétique va à l'encontre de la convention utilisée en induction puisque  $\mathcal{P}_e > 0$  avec  $e$  et  $i$  positifs et de même sens.

Pour rétablir l'harmonie des conventions dans les schémas électriques, on peut définir la tension contre-électromotrice  $E = -e$  qui, positive et orientée en sens inverse de  $i$ , redonnent les signes usuelles pour la puissance dans la convention électrocinétique. C'est-à-dire que la puissance reçue par le dipôle  $M$  équivalent  $\mathcal{P}_M = Ei = -ei$  est bien positive pour un dipôle récepteur et négative pour un dipôle générateur (voir figure 4). Pour une référence bibliographique, se référer à *Précis Électrotechnique PSI* p.126.

### 1.3.3 Actions mécaniques sur un dipôle magnétique

Désormais, on introduit une hypothèse supplémentaire en considérant que l'échelle spatiale typique de variation du champ magnétique est grande devant la taille du circuit. Ainsi le champ peut être considéré comme uniforme au niveau du circuit. Il est alors légitime d'assimiler le circuit à son moment dipolaire magnétique (à l'ordre le plus bas) noté  $\vec{M}$ . On rappelle que pour une spire de section  $S$  parcourue par un courant  $I$  le moment magnétique vaut  $\vec{M} = IS\vec{S}$  avec  $\vec{S}$  défini par la circulation de  $I$ .

De l'équation (1.42), on obtient l'énergie d'interaction d'un moment dipolaire avec le champ de la forme  $U = -I\Phi$ , que l'on peut alors réécrire sous la forme :

$$U = -\vec{M} \cdot \vec{B} \quad (1.47)$$

On en déduit alors :

$$dU = -\vec{M} \cdot d\vec{B} - d\vec{M} \cdot \vec{B} = -\vec{M} \cdot (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (d\vec{\theta} \wedge \vec{M}) \cdot \vec{B} \quad (1.48)$$

où l'on a introduit le déplacement infinitésimal  $d\vec{r}$  occasionnant la variation de  $\vec{B}$ , et la rotation infinitésimale  $d\vec{\theta}$  occasionnant la variation de  $\vec{M}$ . En remarquant que l'analyse vectorielle permet d'écrire :

$$\vec{M} \cdot (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - d\vec{r} \cdot (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = (d\vec{r} \wedge \vec{M}) \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}. \quad (1.49)$$

On en tire alors

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} - \vec{\Gamma} \cdot d\vec{\theta}, \quad (1.50)$$

où

$$\vec{F} = (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}, \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}. \quad (1.51)$$

On retrouve ainsi la force  $\vec{F}$  subie par le dipôle dans un champ non homogène, et le couple  $\vec{\Gamma}$  qui tend à orienter le moment dipolaire  $\vec{M}$  dans le sens du champ.

C'est d'une certaine façon ce couple qui est à la base des moteurs électriques, et qui permet d'en appréhender la subtilité. En effet, ce couple tend à faire tourner le moment, mais une fois celui-ci convenablement orienté, le couple s'annule et le mouvement cesse !

Il existe alors deux solutions :

- faire tourner le champ magnétique en même temps que le dipôle, ce qui est le principe des moteurs à courant alternatif,
- utiliser la rotation pour modifier la distribution de courants de sorte que l'orientation relative entre le dipôle et le champ ne soit pas modifiée, ce qui est le principe des moteurs à courant continu.

## 1.4 La distribution de puissance en triphasé

Les applications technologiques liées à la conversion de puissance électrique, et en particulier les machines à champ magnétique tournant, sont étroitement liées à la manière dont l'électricité est amenée à l'utilisateur (particulier ou industriel). Dans cette section nous allons revenir sur l'intérêt de distribuer l'électricité sous forme triphasée.

### 1.4.1 Définition d'un système de grandeurs sinusoïdales triphasées

**Définition 1.3.** Trois grandeurs  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  forment un système triphasé équilibré de grandeurs sinusoïdales si elles se présentent sous la forme :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X\sqrt{2}\cos(\omega t - \phi) \\ x_2(t) &= X\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \phi\right) \\ x_3(t) &= X\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \phi\right) \end{aligned} \quad (1.52)$$

Ces trois grandeurs sont donc de même valeurs efficaces  $X$  (RMS de la grandeur) et déphasées entre elles de  $2\pi/3$ .

En notation complexe, si on note  $\underline{X}_1 = X e^{j(\omega t - \phi)}$  et en posant  $a = e^{j2\pi/3}$ , on a :

$$\underline{X}_2 = a^2 \underline{X}_1 \text{ et } \underline{X}_3 = a \underline{X}_1 \quad (1.53)$$

Sur une prise de tension triphasée, on a accès aux trois tensions formant un système sinusoïdal triphasé équilibré (direct ou inverse suivant l'ordre de prise des tensions). Dans la pratique, les systèmes ne sont souvent pas équilibrés. Dans ce cas, on aura toujours trois grandeurs à définir, mais leurs amplitudes relatives et les déphasages qu'elles présentent entre elles n'auront plus rien de remarquable.

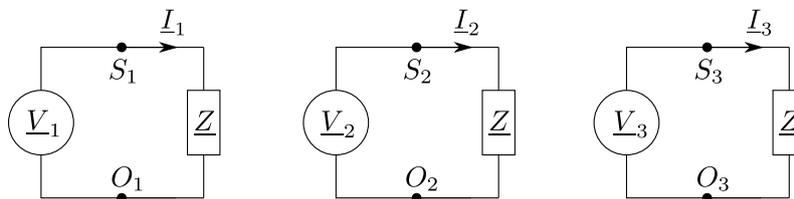


FIGURE 5 – Comment associer ces trois sources de tension chargées par des impédances identiques ?

### 1.4.2 Exemple de structures électriques triphasées

Considérons trois bobinages qui se comportent comme trois sources de tensions sinusoïdales équilibrées  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  chargées par des impédances identiques (figure 5). Ces trois bobinages sont parcourus par des courants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  qui forment également un système triphasé équilibré. Nous pouvons envisager deux types d'associations pour ces trois bobinages : l'association en étoile ou en triangle.

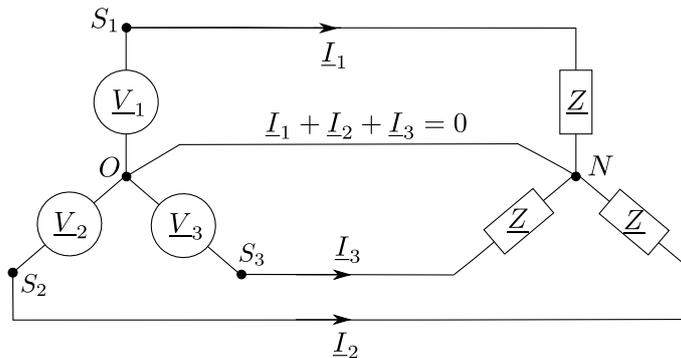


FIGURE 6 – Association étoile

**Association étoile** : les trois points  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$  sont mis au même potentiel. Dans ce cas le système prend la forme donnée figure 6. Le courant dans le conducteur de retour entre  $O$  et  $N$ , appelé fil neutre, est nul si le système est équilibré. Il y a donc en principe 4 fils qui relient les sources de tension aux impédances, mais le fil neutre peut éventuellement être supprimé (même en cas de système déséquilibré).

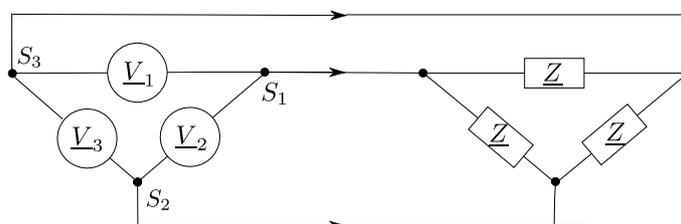


FIGURE 7 – Association triangle

**Association triangle** : cette fois les trois sources sont associées pour former un triangle. L'association avec la charge s'effectue donc de la façon présentée figure 7. Trois câbles suffisent à relier les sources à la charge.

**Remarque** : le couplage de la source ne préjuge en rien de celui de la charge. On peut donc associer un triangle avec une étoile, une étoile avec un triangle. Mais dans tous les cas, trois fils peuvent suffire pour distribuer l'énergie électrique. C'est pourquoi sur les pylônes haute tension (HT) ou très haute tension (THT) les fils sont présents par multiple de trois.

### 1.4.3 Puissance dans les systèmes triphasés

Nous allons montrer que la puissance instantanée fournie par un système triphasé est constante. Pour illustrer ce point, nous allons considérer un système triphasé équilibré :

$$\begin{aligned} V_1(t) &= V\sqrt{2}\cos(\omega t), & I_1(t) &= I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi), \\ V_2(t) &= V\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), & I_2(t) &= I\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right), \\ V_3(t) &= V\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right), & I_3(t) &= I\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) \end{aligned}$$

D'après le théorème de Boucherot (voir annexe), la puissance active totale dans le système est donnée par :

$$P(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) \quad (1.54)$$

avec

$$\begin{aligned} p_1(t) &= V_1(t)I_1(t) = VI[\cos(\varphi) + \cos(2\omega t - \varphi)] \\ p_2(t) &= V_2(t)I_2(t) = VI\left[\cos(\varphi) + \cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right)\right] \\ p_3(t) &= V_3(t)I_3(t) = VI\left[\cos(\varphi) + \cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right)\right] \end{aligned} \quad (1.55)$$

Dans chacune des phases, la puissance instantanée est fluctuante. En revanche, en calculant la puissance active totale dans le système triphasé équilibré, on trouve :

$$\boxed{P = 3VI \cos \varphi} \quad (1.56)$$

La puissance active instantanée dans un système triphasé équilibré est donc constante. C'est l'un des intérêts du triphasé par rapport au monophasé (où  $p(t)$  varie à la pulsation  $2\omega$ ), qui permet notamment d'éviter les fluctuations de couple dans les machines tournantes.

### 1.4.4 Utilité du triphasé pour transporter l'énergie électrique

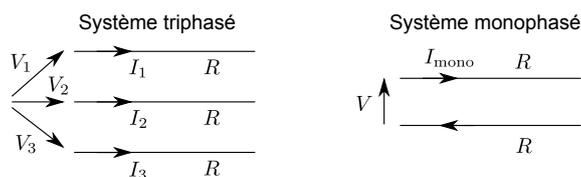


FIGURE 8 – Comparaison des systèmes monophasé et triphasé.

A l'heure actuelle, la majeure partie de la production et du transport de l'énergie électrique se fait sous la forme triphasée. Pour mieux comprendre l'intérêt du triphasé dans le transport de l'énergie, on peut raisonner sur l'exemple suivant présenté figure 8.

Nous allons supposer dans un premier temps que les lignes électriques sont réalisées avec des conducteurs de même résistance  $R$  et qu'elles transportent la même puissance  $P$ , à partir de tensions  $V$ . Le système triphasé est supposé équilibré. Si  $I$  est le courant efficace dans les lignes et  $\varphi$  le déphasage des tensions sur les courants correspondants, pour le système triphasé on a :

$$P = 3VI \cos \varphi \quad (1.57)$$

Transporter en moyenne la même puissance  $P$  sous tension  $V$  sur la ligne monophasée impose  $I_{\text{mono}} = 3I$ .

En triphasé, les pertes dans les trois lignes sont :

$$P_{J,\text{tri}} = 3RI^2 \quad (1.58)$$

Avec un système monophasé, l'effet Joule à dissiper dans les deux câbles dans lesquels circulent le courant. est :

$$P_{J,\text{mono}} = 2RI_{\text{mono}}^2 = 2R(3I)^2 = 18RI^2 \quad (1.59)$$

Les pertes en ligne dans ce dernier cas sont donc beaucoup plus importantes. Cependant, le problème n'est pas aussi simple. Pour ne pas abîmer le câble, on ne peut pas dimensionner une ligne qui laisse passer un courant  $I$  comme une ligne qui supporte un courant  $3I$ . La densité surfacique de courant ne doit jamais dépasser une valeur donnée ce qui impose de tripler la section utile de conducteur pour pouvoir tripler le courant. Cela revient à dire que la résistance de la ligne monophasée doit être trois fois moins résistive que son homologue triphasé. On obtient donc les pertes en ligne :

$$P_{J,\text{mono}} = 2\frac{R}{3}(3I)^2 = 6RI^2 \quad (1.60)$$

Ces pertes sont toujours supérieures à celles rencontrées dans une ligne triphasée. De plus si on compare la quantité de métal utilisée pour réaliser les lignes, on constate que pour une liaison de longueur  $L$ , on aura besoin d'un volume de cuivre  $V_{\text{tri}} = 3LS$  en triphasé et  $V_{\text{mono}} = 2L(3S) = 6LS$  en monophasé. Il est donc nécessaire d'employer une quantité double de matériau dans le cas d'une ligne monophasée, tout en ayant des pertes en ligne doubles ! Le système triphasé est donc bien plus favorable quant au transport de l'énergie que le système monophasé. Les systèmes 6-phasé et 12-phasé sont eux aussi plus défavorables que le système triphasé.

Il faut garder à l'esprit qu'environ 10% de la production électrique nationale est consommée dans le réseau (pertes par effet Joule dans les lignes et pertes dans les transformateurs). Pour diminuer l'effet Joule donc le courant  $I$ , on peut augmenter la tension  $V$  grâce à des transformateurs : c'est pourquoi les grandes lignes de transport de l'électricité sont portées à des tensions de plusieurs centaines de kilovolts. L'emploi de transformateurs pour transporter des hautes tensions fut un argument important qui favorisa le déploiement de la distribution de courant alternatif par rapport au courant continu, à la fin du XIXe siècle<sup>5</sup>.

Néanmoins, il faut constater que la plupart des appareils domestiques fonctionnent en monophasé (four électrique, plaques à induction, alimentation PC, machine à laver...). En pratique, dans la plupart des cas, EDF n'amène qu'une phase chez vous. L'utilisation directe d'énergie électrique sous forme triphasée concerne essentiellement des machines électriques de forte puissance utilisées dans l'industrie et la traction électrique.

---

5. Voir l'article [https://fr.wikipedia.org/wiki/Guerre\\_des\\_courants](https://fr.wikipedia.org/wiki/Guerre_des_courants) pour plus d'informations sur la bascule entre courant continu et courant alternatif.

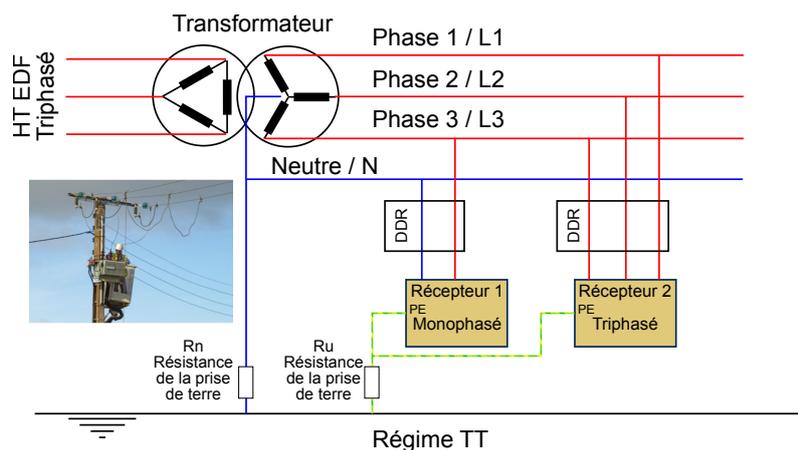


FIGURE 9 – Mise à la terre des installations électriques en régime TT (PE : Prise Equipotentielle, DDR : Dispositif Différentiel à courant Résiduel). (Source : adapté de Wikipedia)

### L'électricité chez vous

Le triphasé est très rarement disponible chez les particuliers. Néanmoins l'énergie électrique est transportée sous cette forme des centres de production (centrales) vers les lieux de consommation. Les particuliers disposent en général d'un abonnement monophasé : l'électricité arrivant par les lignes HT sous forme triphasée est distribuée sous forme monophasée aux particuliers via un transformateur.

Le particulier est relié au réseau via deux câbles appelés *phase* et *neutre* : le premier est relié à une des trois phases du réseau, le second est relié à la terre au niveau du transformateur. Il est donc "moins" dangereux de toucher le neutre que la phase car il est relié à la terre. En revanche, en touchant la phase avec un tournevis testeur, le courant peut circuler et reboucle à la terre via... vos pieds.

La prise de terre présente sur certains appareils est un troisième câble *distinct* qui relie la masse des appareils (leur carcasse par exemple) à la terre via un piquet de terre, tige métallique plantée dans le sol, *propre à chaque domicile*. En cas de contact entre la phase et la carcasse d'un appareil, le disjoncteur différentiel <sup>a</sup> détecte un débit de courant dans la phase sans retour dans le neutre et coupe le courant dans le domicile (seuils à 30 mA pour les risques à la personne, 500 mA pour les risques d'incendie). Cela évite que le particulier fasse lui-même le lien avec la terre en touchant l'appareil défectueux. Il existe plusieurs façon de relier une installation à la terre, le système obligatoire en France est le régime TT, avec la terre branchée sur une prise de terre au pied de l'installation à protéger.

Comme les usagers se partagent les phases du réseau, qui ont des installations électriques et des utilisations de l'électricité différentes, le réseau est a priori déséquilibré. Pour que le système fonctionne correctement, il est espéré que tous les utilisateurs utilisent *en moyenne* les trois phases identiquement.

a. Voir [ce blog](#) pour le détail de son fonctionnement.

## 2 Machines à champ magnétique tournant

Dans ce paragraphe, nous allons voir des exemples de structures électrotechniques, dans lesquelles des grandeurs triphasées sont mises en jeux. Nous verrons tout d'abord les machines synchrones, dont l'application principale est la production d'énergie électrique dans les centrales de grande puissance. Nous verrons ensuite les machines asynchrones, que l'on utilise beaucoup comme moteur dans des applications domestiques ou industrielles.

### 2.1 Génération d'un champ magnétique tournant

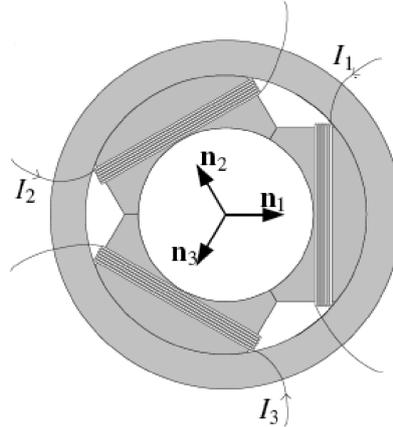


FIGURE 10 – Stator d'une machine à champ tournant : structure de principe de production d'un champ magnétique tournant à partir d'une alimentation triphasée, avec trois bobinages identiques espacés de  $120^\circ$ .

On considère une configuration de trois bobines identiques, d'axes coplanaires et réparties à  $120^\circ$  l'un de l'autre. Conformément à la figure (10), ces dernières sont montées sur un noyau de fer identique, permettant d'augmenter l'amplitude du champ magnétique généré au centre (voir section 4). Chacune de ces bobines est alimentée par des tensions triphasées, et donc parcourues par les courants décrits par l'équation (1.52). Les signaux des bobines sont donc distants géométriquement d'une rotation de  $120^\circ$  et en phase d'une translation de  $2\pi/3$ .

*Dans tout ce qui suit, on choisit comme référence de phase le courant traversant la première bobine, et comme origine des angles polaires la direction de la normale  $\vec{n}_1$  à cette bobine.*

Le champ magnétique résultant s'écrit alors

$$\vec{B}_s(t) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = B_S \left[ \cos(\omega t) \vec{n}_1 + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \vec{n}_2 + \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \vec{n}_3 \right] \quad (2.1)$$

On introduit alors les coordonnées cartésiennes  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  telles que  $\vec{u}_x = \vec{n}_1$  et :

$$\begin{cases} \vec{n}_2 &= -\frac{1}{2}\vec{u}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_y \\ \vec{n}_3 &= -\frac{1}{2}\vec{u}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_y \end{cases} \quad (2.2)$$

Pour simplifier le calcul, introduisons des champs complexes  $\underline{B}$  tels que :  $\vec{B}_s(t) = \text{Re}(\underline{B}_s) \vec{u}_x + \text{Im}(\underline{B}_s) \vec{u}_y$ . On a alors  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = e^{j2\pi/3} = a$  et  $n_3 = e^{j4\pi/3} = a^2$ , avec 1,  $a$  et  $a^2$  les racines cubiques de l'unité, vérifiant  $1 + a + a^2 = 0$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \underline{B}_s(t) &= B_S \left[ \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} 1 + \frac{e^{j\omega t - j2\pi/3} + e^{-j\omega t + j2\pi/3}}{2} a + \frac{e^{j\omega t - j4\pi/3} + e^{-j\omega t + j4\pi/3}}{2} a^2 \right] \\ &= \frac{B_S}{2} \left[ e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} + e^{-j\omega t + j4\pi/3} + e^{j\omega t} + e^{-j\omega t + j2\pi/3} \right] \\ &= \frac{B_S}{2} \left[ 3e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} (1 + a + a^2) \right] \\ &= \frac{3}{2} B_S e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Cela correspond à un champ tournant dans le sens trigonométrique, de fréquence angulaire  $\omega$ . En effet, en notation réelle on a :

$$\vec{B}_s(t) = \frac{3}{2} B_S [\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y] \quad (2.4)$$

**Théorème 2.1** (Théorème de Ferraris). *Trois bobinages décalés de  $2\pi/3$  alimentés par des courants sinusoïdaux triphasés équilibrés de pulsation  $\omega$  sont équivalents à un rotor fictif bipolaire tournant à la vitesse  $\omega$ . Ce rotor fictif passe par l'axe d'une bobine quand le courant  $y$  est maximum.*

### Cas d'une alimentation monophasée

Dans le cas d'un réseau électrique domestique, l'alimentation est monophasée. Comment générer un champ magnétique tournant pour faire tourner le moteur d'une machine à laver par exemple ? Si on considère un champ magnétique oscillant selon la direction  $\vec{u}_x$ , on peut le décomposer selon :

$$\vec{B}_s(t) = B_S \cos(\omega t) \vec{u}_x = \frac{B_S}{2} \left( \underbrace{\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y}_{\vec{u}_-(t) \text{ (sens anti-horaire)}} + \underbrace{\cos(\omega t) \vec{u}_x - \sin(\omega t) \vec{u}_y}_{\vec{u}_+(t) \text{ (sens horaire)}} \right) \quad (2.5)$$

Ce champ est ainsi la superposition de deux champs tournant en sens opposé. De ce fait, il est possible avec une seule bobine de mettre en rotation un moment magnétique à condition de le mettre préalablement en rotation pour qu'il "accroche" un des deux champs magnétiques tournants, ou en favorisant une rotation par rapport à l'autre avec un dispositif électrique.

## 2.2 Machine synchrone

Dans le cas d'une machine dite "synchrone", le rotor est un *moment magnétique permanent* (aimant ou bobine, avec ou sans noyau de fer). On notera ce dernier  $\vec{M}$ , que l'on modélisera par un enroulement parcouru par un courant constant  $I_R$ . Une description plus réaliste sera discutée ultérieurement. Ce type de machine produit l'énergie électrique dans les centrales électriques de forte puissance (on parle d'alternateur). Elle a été également

utilisée en traction ferroviaire (rôle moteur) dans le TGV Atlantique. Les premiers TGV fonctionnaient à l'aide de moteurs à courant continu (voir section 3) mais le développement de l'électronique de puissance dans les années 1980 a permis son remplacement par les moteurs synchrones, alimentés à l'aide d'onduleurs de courant convertissant le courant continu fournit via les caténares<sup>6</sup> en courant alternatif de fréquence commandable.

### 2.2.1 Structure



FIGURE 11 – Coupe d'une machine synchrone. On distingue en particulier deux des trois bobines qui créent le champ statorique (coupées), et le rotor alimenté en courant continu par deux bagues sur la droite.

Comme dans toutes les machines tournantes, on distingue la partie fixe appelée stator, de la partie tournante appelée rotor. Le stator permet de créer un champ magnétique tournant au moyen de courants alternatifs alors que le rotor va créer le champ continu qui va tourner lors de la rotation de la machine. Le couplage entre les deux champs nous permettra d'expliquer le fonctionnement du système.

**Le rotor :** le rotor va permettre de créer un moment magnétique  $\vec{M}$  de norme constante, soit à partir d'un aimant permanent (matériau ferromagnétique dur) soit à partir d'un électroaimant alimenté par un courant permanent  $I_R$  alimenté via deux contacts glissants. Dans les deux cas, le rotor comprend un circuit magnétique (matériau ferromagnétique doux) qui enrobe le moment magnétique permanent et permet de canaliser le flux magnétique pour avoir le meilleur couplage possible entre rotor et stator. Nous verrons que, quand la machine fonctionne, le rotor tourne à la même vitesse que le champ tournant créé par le stator. Il n'y a donc pas de phénomènes inductifs à prendre en compte dans la partie massive du rotor, qui n'a pas besoin d'être feuilleté (fabriqué à partir de tôles isolées) ce qui augmente la solidité de l'ensemble.

**Le stator :** il porte un bobinage triphasé qui permet de créer un champ magnétique tournant à la pulsation  $\omega_S$ . Contrairement au rotor, le stator est le siège de variations

6. Les premières lignes de TGV sont alimentées en courant continu, les plus récentes en alternatif. En France, le système d'alimentation ferroviaire n'est pas unifié et les deux systèmes coexistent.

temporelles de flux magnétique. Pour éviter les pertes par courants de Foucault et l'échauffement de la structure, il est donc feuilleté. La partie séparant le rotor du stator est appelée *entrefer*. Les stators sont conçus de telle sorte que le champ créé dans l'entrefer soit radial à répartition sinusoïdale, i.e. qu'il soit de direction radiale quelle que soit la position angulaire dans l'entrefer, et à tout instant qu'il prenne le plus possible la forme d'une fonction sinusoïdale de la position angulaire dans l'entrefer :

$$B_s(\theta, t) = B_S \cos(\omega_S t - \theta) \quad (2.6)$$

avec  $\theta$  l'angle que fait le champ tournant dans un référentiel cylindrique lié au bâti.

### 2.2.2 Couple de la machine synchrone

**Approche ancien programme :** pour la suite, on suppose que  $\vec{B}$  est un champ magnétique tournant venant de l'équation 2.4 et que  $\vec{M}$  est un moment magnétique permanent. En régime stationnaire, on suppose que le rotor tourne à la vitesse angulaire  $\omega_R$ , alors que le champ magnétique statorique tourne à la fréquence angulaire  $\omega_S$ , dont la direction pointe avec l'angle polaire  $\theta_S = \omega_S t - \theta$ . On introduit alors le *retard de phase*  $\alpha$  de  $\vec{M}$  par rapport à  $\vec{B}_s$  défini par l'intermédiaire de l'angle polaire de la direction de  $\vec{M}$  (le rotor) selon  $\theta_R = \omega_R t + \alpha - \theta$ .

À partir de l'expression du couple des forces de Laplace, on obtient immédiatement la valeur *instantanée* du couple  $\Gamma_z$  autour de l'axe de rotation  $Oz$  du rotor

$$\begin{aligned} \Gamma_z(t, \alpha) &= (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z \\ &= \frac{3}{2} B_S M (\vec{u}(\theta_R) \wedge \vec{u}(\theta_S)) \cdot \vec{u}_z \\ &= \frac{3}{2} B_S M \sin((\omega_R - \omega_S)t + \alpha). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ce moment instantané aura une valeur moyenne temporelle non nulle si et seulement si  $\omega_R = \omega_S$ , d'où le nom de "moteur synchrone". Si cette condition est vérifiée, le couple est alors constant,

$$\boxed{\Gamma_z = \frac{3}{2} B_S M \sin \alpha} \quad (2.8)$$

et positif (*i.e.* couple moteur) si  $\alpha$  est positif. La caractéristique correspondante est représentée figure 12.

**Propriété 2.2.** Dans un moteur synchrone, le moment  $\vec{M}$  est en retard d'un angle  $\alpha$  sur le champ tournant mais tourne avec la même pulsation.

**Approche nouveau programme :** dans les nouveaux programmes de PSI, une approche qui emploie plus la compréhension du rôle du fer dans les machines électrotechniques est adoptée. L'hypothèse principale est que le circuit magnétique est composé d'une partie ferromagnétique, non saturée, modélisée par une perméabilité  $\mu_r$  infinie, ce qui impose que le matériau canalise parfaitement les lignes de champ magnétique et que celles-ci sont perpendiculaires à la sortie du matériau, au niveau de l'entrefer (voir section 4.1.3). L'entrefer est rempli d'air à la perméabilité du vide.

Pour calculer le couple qu'exerce le champ statorique sur le rotor, commençons par calculer l'énergie magnétique dans l'entrefer, cylindre de longueur  $L$ , de rayon moyen  $R$  et d'épaisseur  $e$  :

$$\begin{aligned} U_e &= \int_0^{2\pi} \frac{|B_s(\theta, t) + B_r(\theta, t)|^2}{2\mu_0} eLR d\theta \\ &= \frac{eLR}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} [B_s(\theta, t)^2 + B_r(\theta, t)^2 + 2B_s(\theta, t)B_r(\theta, t)] d\theta \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $d\tau = eLRd\theta$  représente le volume élémentaire d'entrefer entre les positions  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ , et  $B_r(\theta, t) = B_R \cos(\theta_R(t))$  est le champ rotorique. Les deux premières intégrales sont des constantes valant respectivement  $\pi B_S^2 eLR/2\mu_0$  et  $\pi B_R^2 eLR/2\mu_0$ . Le terme suivant donne le terme de couplage entre les deux champs :

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{\pi eLRB_S^2}{2\mu_0} + \frac{\pi eLRB_R^2}{2\mu_0} + \frac{eLR}{\mu_0} \int_0^{2\pi} B_s(\theta, t)B_r(\theta, t)d\theta \\ &= U_S + U_R + \frac{eLRB_S B_R}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \cos(\omega_S t - \theta) \cos(\omega_R t + \alpha - \theta) d\theta \\ &= U_S + U_R + \frac{eLRB_S B_R}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} [\cos((\omega_S + \omega_R)t + \alpha - 2\theta) + \cos((\omega_R - \omega_S)t + \alpha)] d\theta \\ &= U_S + U_R + \frac{\pi eLRB_S B_R}{\mu_0} \cos((\omega_R - \omega_S)t + \alpha) \\ &= U_S + U_R + U_c \cos((\omega_R - \omega_S)t + \alpha) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Le couple se déduit de l'énergie magnétique par :

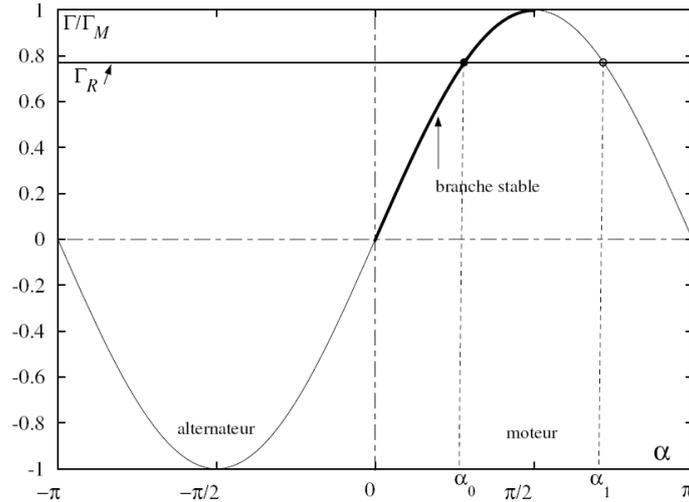
$$\Gamma_z(t, \alpha) = -\frac{\partial U_e}{\partial \alpha} = U_c \sin((\omega_R - \omega_S)t + \alpha) \quad (2.11)$$

et l'on retrouve le même résultat que précédemment. C'est tout à fait logique si l'on se rappelle que l'expression du couple  $\Gamma = \vec{M} \wedge \vec{B}$  est elle-même issue d'une dérivée de l'énergie de couplage entre un moment magnétique et un champ magnétique (voir section 1.3.3).

**Étude du couple :** le couple  $\Gamma_z$  prend sa valeur maximale  $\Gamma_M = 3B_S M/2$  lorsque  $\alpha = \pi/2$ , *i.e.* quand le champ et le moment magnétique sont en quadrature. Si le moteur est soumis à un couple résistant  $-\Gamma_r$ , avec  $0 < \Gamma_r < \Gamma_M$ , le retard  $\alpha$  est imposé par la charge mécanique (somme des moments nulle en régime établi).

À un couplage résistant donné, deux retards  $\alpha_0 = \arcsin(\Gamma_r/\Gamma_M) < \pi/2$  et  $\alpha_1 = \pi - \alpha_0$  sont possibles. Mais il ne suffit pas d'avoir un couple moteur, il faut également que le point de fonctionnement soit stable. Pour vérifier cela, on étudie le comportement d'un point de fonctionnement soumis à une petite perturbation extérieure, *i.e.* une petite fluctuation de  $\alpha$ . Le point de fonctionnement sera stable si la réponse correspond à un retour vers le point de fonctionnement initial.

Un tel raisonnement permet de conclure à l'existence d'une seule branche stable, pour  $\alpha \in [0, \pi/2]$ . Raisonnons avec la courbe de la figure 12 autour du point  $\alpha_0$ . Si une perturbation fait prendre du retard au rotor par rapport au stator, alors d'après la figure  $\Gamma_z$  augmente donc le rotor va pouvoir accélérer pour revenir au point de fonctionnement  $\alpha_0$ . Le raisonnement est identique dans le cas d'une prise d'avance du rotor, qui se traduit par une perte de couple. Pour le point de fonctionnement  $\alpha_1$  le même raisonnement montre que la branche  $\alpha \in [\pi/2, \pi]$  est instable.

FIGURE 12 – Caractéristique  $\Gamma(\alpha)$  d'une machine synchrone.

Il est utile pour la suite de relier le couple  $\Gamma_z$  au flux magnétique mis en jeu dans le moteur. Soit  $\Phi$  le flux magnétique du champ tournant dans l'enroulement rotorique de surface  $\Sigma_R$ , *i.e.*

$$\Phi = \left( \frac{3}{2} B_S \vec{u}(\theta_S) \right) \cdot (\Sigma_R \vec{u}(\theta_R)) = \frac{3}{2} B_S \Sigma_R \cos \alpha = \frac{3}{2} \mathcal{M} I_S \cos \alpha \quad (2.12)$$

où l'on a fait apparaître l'inductance mutuelle  $\mathcal{M} = B_S \Sigma_R / I_S$  entre l'une des bobines du stator et la bobine rotorique lorsqu'elles sont alignées. On peut alors écrire le couple magnétique en fonction du flux maximal  $\Phi_{\max} = 3\mathcal{M}I_S/2$  :

$$\Gamma_z = \Phi_{\max} I_R \sin \alpha = \frac{3}{2} \mathcal{M} I_S I_R \sin \alpha. \quad (2.13)$$

### L'alternateur

Le moteur synchrone est réversible, il peut fonctionner en générateur, et on le nomme alors *alternateur*. Le moment magnétique du rotor est la source du champ magnétique, dont le flux dans les enroulements du stator (constitué de trois bobinages qui ne sont plus alignés) est alternatif à cause de la rotation. On obtient donc un ensemble triphasé de forces électromotrices à la fréquence de rotation du rotor. Le rotor est alors appelé *inducteur* et le stator *induit*. Dans ce cas, le couple  $\Gamma_r$  est moteur et le couple  $\Gamma_z$  est résistant, donc  $\alpha$  est négatif : le moment magnétique est en avance sur le champ magnétique créé par les courants statoriques. Ce mécanisme est effectivement utilisé pour la production d'énergie électrique à partir d'énergie mécanique, le rotor étant mis en mouvement par des turbines à vapeur dans les centrales thermiques ou nucléaires, ou par un moteur à explosion dans les groupes électrogènes portatifs.

Un générateur synchrone peut absorber un couple maximale  $\Gamma_{\max} = 3B_S M/2$ , donc dans le cas d'un pic de demande trop fort sur le réseau électrique, les génératrices peuvent décrocher.

### 2.2.3 Problème du démarrage

L'avantage du moteur synchrone est qu'il est facilement commandable en vitesse par la vitesse de rotation du champ statorique car les deux vitesses sont égales. Mais l'inconvénient de ce moteur est que son couple au démarrage est de valeur moyenne nulle (car le rotor n'a pas encore accroché le champ statorique et sans couple il ne peut commencer à vaincre le couple de charge).

Il faut noter que certaines motrices de TGV sont pourtant équipées de moteurs synchrones. Le problème du démarrage est résolu par un système d'électronique de puissance, consistant en des onduleurs de fréquence variable, et permettant d'établir un asservissement de l'angle interne pour obtenir de façon constante un couple moteur. On parle alors de moteur synchrone *autopiloté*.

## 2.3 Machine asynchrone

Le moteur asynchrone est une machine à champ tournant, possédant un certain nombre de similitudes avec le moteur synchrone, mais dans lequel le rotor a une fréquence légèrement inférieure à celle du champ tournant. Le rotor, constitué d'une bobine en *court-circuit*, est alors parcouru par un courant *induit*, produit par le champ tournant statorique.

Les machines asynchrones sont des machines à courant alternatif très répandues. On les utilise dans de nombreux dispositifs domestiques (machines à laver, sèche linge, tondeuse électrique...) ainsi que dans des dispositifs industriels (machine outil). Elles sont également utilisées pour la traction ferroviaire dans les derniers modèles de TGV (TGV Nord) ainsi que sur certaines structures éoliennes. Les derniers développements de l'électronique de puissance dans les années 1990 ont permis de remplacer les moteurs synchrones des TGV par des moteurs asynchrones, moins coûteux et nécessitant moins d'entretien mais plus difficilement commandable en vitesse.

On se place dans le même cadre simplifié que pour l'étude du moteur synchrone, avec un rotor constitué d'une simple bobine ayant la forme d'une spire, caractérisée par sa surface  $\vec{\Sigma} = \Sigma_R \vec{u}(\theta_R)$ , où  $\vec{u}(\theta_R)$  est le vecteur unitaire repéré par l'angle  $\theta_R(t)$ . En régime stationnaire on aura  $\theta_R(t) = \omega_R t$  (l'origine des temps est choisie de manière à ce que  $\theta_R(0) = 0$ ) et  $\theta_S(t) = \omega_S t$ .

### 2.3.1 Structure

**Le stator :** il a une structure proche de celle des machines synchrones avec un bobinage triphasé dans des encoches creusées dans un circuit magnétique doux destiné à canaliser le flux magnétique.

**Le rotor :** le bobinage du rotor est le siège des courants induits. Il s'agit d'un circuit fermé supportant de très forts courants. On distingue principalement deux types de rotors. Il peut être réalisé à partir de bobinages (on a alors des bornes qui donnent accès à ce circuit afin de pouvoir changer sa résistance au démarrage). Il peut être également formé par une cage, réalisée à partir de barres en aluminium fixées entre deux anneaux. C'est la structure la plus robuste.

Dans le cadre de l'étude de la machine asynchrone, on suppose toujours que  $\vec{B}$  est un champ magnétique tournant venant de l'équation 2.4 mais  $\vec{M}$  est un moment magnétique induit.

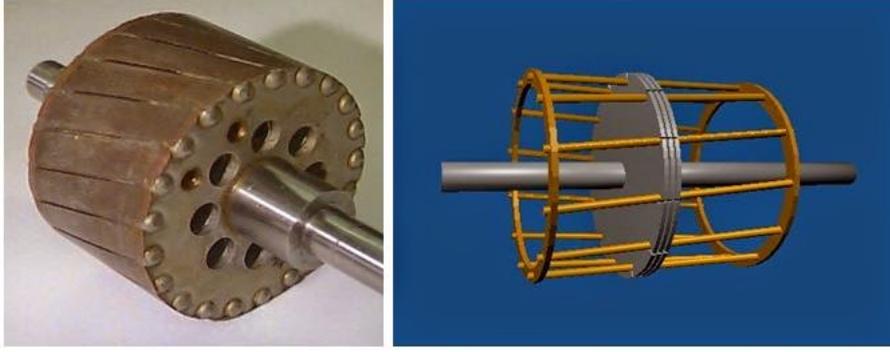


FIGURE 13 – Rotor à cage d'écureuil.

### 2.3.2 Étude électrique du rotor

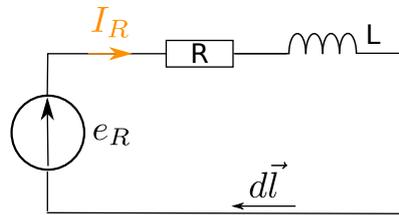


FIGURE 14 – Schéma électrique équivalent du rotor.

Soit  $\Phi_s(t)$  le flux magnétique instantané à travers la bobine rotor. En régime stationnaire on peut l'écrire sous la forme :

$$\Phi_s(t) = \frac{3}{2} B_S \vec{u}(\theta_S) \cdot \Sigma \vec{u}(\theta_R) = \Phi_S \cos(\omega_g t), \quad (2.14)$$

où  $\Phi_S = 3B_S \Sigma_R / 2$  est le flux maximal, et  $\omega_g$  est la *vitesse de glissement* définie selon :

$$\omega_g = \omega_S - \omega_R. \quad (2.15)$$

On définit également le glissement par  $g = (\omega_S - \omega_R) / \omega_S = \omega_g / \omega_S$  (grandeur sans dimension souvent exprimée en pourcentage). La force électromotrice induite  $e_R(t)$  dans le rotor est donc une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation  $\omega_g$ . En effet,

$$e_R(t) = -\frac{d\Phi_s}{dt} = \omega_g \Phi_S \sin(\omega_g t). \quad (2.16)$$

Le courant induit aura donc lui même une telle dépendance en temps, et on peut écrire les relations suivantes pour les amplitudes complexes <sup>7</sup> :

$$\underline{e}_R = (R + jL\omega_g) \underline{I}_R = -j\omega_g \Phi_S e^{j\omega_g t} \quad (2.17)$$

à l'aide de la figure 14, soit :

$$\underline{I}_R = -j \frac{\omega_g \Phi_S}{R + jL\omega_g}, \quad (2.18)$$

où l'on a introduit la résistance  $R$  et l'inductance  $L$  de la bobine rotorique. Pour une bobine bien conçue, on a  $R \ll L\omega_S$ . On introduit l'impédance complexe à la fréquence de glissement qui vérifie :

$$Z_R = R + jL\omega_g = |Z| e^{j\gamma}, \quad (2.19)$$

7. On rappelle que  $\sin(\theta) = \cos(\theta - \pi/2)$  d'où l'apparition du facteur  $-j$  lors du passage en complexe.

avec

$$|Z| = \sqrt{R^2 + L^2\omega_g^2}, \quad \text{et} \quad \tan \gamma = \frac{L\omega_g}{R}. \quad (2.20)$$

En revenant aux notations réelles, ce qui est indispensable pour la suite, on obtient donc :

$$I_R(t) = \frac{\omega_g \Phi_S}{|Z|} \sin(\omega_g t - \gamma). \quad (2.21)$$

Grâce à ce courant le rotor acquiert un moment magnétique :

$$\vec{M} = \frac{\omega_g \Phi_S}{|Z|} \Sigma_R \sin(\omega_g t - \gamma) \vec{u}(\theta_R), \quad (2.22)$$

qui varie dans le temps à la fois à cause de la rotation à  $\omega_R$  et de la modulation du courant  $I_R$  à la vitesse de glissement.

### 2.3.3 Effets mécaniques

Ce moment magnétique est soumis à un couple mécanique dont le moment par rapport à l'axe s'écrit :

$$\Gamma_z(t) = (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z = \frac{\Phi_S^2 \omega_g}{|Z|} \sin(\omega_g t - \gamma) \sin(\omega_g t), \quad (2.23)$$

en utilisant le produit mixte  $(\vec{u}(\theta_R) \wedge \vec{u}(\theta_S)) \cdot \vec{u}_z = \sin(\omega_g t)$ . Soit en valeur moyenne :

$$\langle \Gamma_z(t) \rangle = \frac{\Phi_S^2 \omega_g \cos \gamma}{|Z|} \frac{1}{2} = \frac{\Phi_S^2 \omega_g}{|Z|} \frac{R}{2|Z|}, \quad (2.24)$$

donc finalement :

$$\langle \Gamma_z(t) \rangle = \frac{\Phi_S^2}{2} \frac{R \omega_g}{R^2 + L^2 \omega_g^2}. \quad (2.25)$$

**Propriété 2.3.** Dans un moteur asynchrone, le couple fourni est non nul si et seulement si le rotor ne tourne pas à la même vitesse que le champ statorique, i.e.  $\omega_g \neq 0$ , d'où l'appellation de machine "asynchrone".

Ce couple est donc donné par une caractéristique en  $\omega_g$  (ou glissement  $g$ ), qui s'anule bien entendu au synchronisme (figure 15). On constate qu'elle possède un maximum caractérisé par :

$$\Gamma_M = \frac{\Phi_S^2}{4L} \quad \text{et} \quad g_M = \frac{R}{L\omega_S} \ll 1. \quad (2.26)$$

Ceci montre que le couple maximum est indépendant de la résistance  $R$  mais que la fréquence de rotation pour laquelle il est obtenu est d'autant plus proche de  $\omega_S$  que  $R$  est faible (encore une fois, pour une bobine bien conçue on a  $\frac{R}{L\omega_S} \ll 1$ ). Dans la pratique, le glissement  $g$  donnant ce couple maximum est de l'ordre de quelques %. Comme on le voit sur la figure 15, la courbe  $\Gamma(\omega_R)$  est alors très piquée autour de la valeur donnant le couplage maximum, elle-même très proche de la fréquence statorique.

Un autre point important de cette courbe est la valeur obtenue pour le couple de démarrage qui peut s'écrire (avec  $\omega_g = \omega_S$ ) :

$$\Gamma_0 \simeq \frac{\Phi_S^2}{2} \frac{R}{L\omega_S} = 2\Gamma_M g_M, \quad (2.27)$$

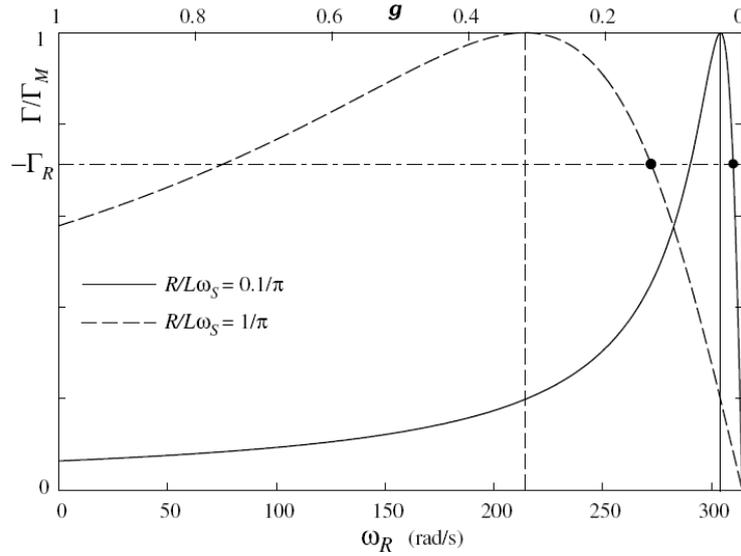


FIGURE 15 – Graphe du couple mécanique en fonction de la vitesse angulaire ou du glissement  $g = \omega_g/\omega_R$  (échelle du haut) avec  $\omega_S = \omega_g + \omega_R$ . Les points de fonctionnement stables sont marqués par un cercle.

qui est donc généralement très faible (voir section 2.3.4).

On voit encore sur la courbe que, si on impose un couple résistant  $-\Gamma_r$  inférieur en norme à  $\Gamma_M$ , on a a priori deux valeurs d'équilibre pour  $\omega_R$ . La première est inférieure à  $\omega_M$  et est *instable* : une diminution de  $\omega_R$  induit une diminution du couple, donc une nouvelle diminution de  $\omega_R$  et le moteur s'arrête. Au contraire, une infime augmentation de  $\omega_R$  va conduire le moteur à accélérer et dépasser  $\omega_M$ . Par contre, celle obtenue pour  $g_M < g < 1$  est stable, puisqu'une fluctuation de  $\omega_R$  donne lieu à une variation de  $\Gamma_z$  de signe opposé, qui ramène le moteur vers son point d'équilibre.

### 2.3.4 Démarrage d'un moteur asynchrone

La figure 15 montre l'évolution du couple mécanique. Le couple atteint un maximum  $\Gamma_M = \frac{\Phi_S^2}{4L}$  pour  $g_M = \frac{R}{L\omega_S}$ . Au démarrage, *i.e.*  $\omega_R = 0$  et  $\omega_g = \omega_S$ , le couple est non nul et vaut

$$\Gamma_0 = \frac{\Phi_S^2}{2} \frac{R\omega_S}{R^2 + L^2\omega_S^2}$$

De ce fait le moteur asynchrone n'a pas, a priori, de problème de démarrage. Toutefois ce couple est en général faible du fait que  $\frac{R}{L\omega_S} \ll 1$  pour une bobine relativement idéale. Il faut donc augmenter ce rapport en augmentant la résistance du rotor pour atteindre un couple qui permet le démarrage, cette résistance est ramenée à 0 après le démarrage. On peut trouver dans certains moteurs un système rhéostatique intégré au rotor et commandé par la force centrifuge.

### 2.3.5 Quelques remarques importantes

1. Le couple que l'on vient de déterminer avec le modèle à une spire est dépendant du temps. Cela vient du fait que ce modèle ne respecte pas la symétrie du stator composé de 3 bobines. Un rotor avec trois bobines identiques positionnées à  $120^\circ$  l'une

de l'autre correspond à la configuration la plus simple respectant la symétrie. Dans ce cas en sommant les moments magnétiques de chaque bobine dans le référentiel du rotor on obtient un moment résultant qui tourne à la fréquence  $\omega_g$ , donc dans le référentiel du stator  $\vec{M}$  tourne à la fréquence  $\omega_S$ , comme dans le moteur synchrone. Le couple développé est alors constant dans le temps - ce qui est avantageux pour les applications - et égal à 3 fois le couple moyen obtenu précédemment.

2. Le moteur synchrone ne peut démarrer seul, tandis que le moteur asynchrone le peut. Pour résoudre ce problème on peut placer sur le rotor de la machine synchrone des barres métalliques reliées par des couronnes, celles-ci jouent le rôle de cage d'écureuil, donc de machine asynchrone qui assure le démarrage du moteur. Une fois le synchronisme atteint le couple qui s'exerce sur cette cage devient nul.
3. Les moteurs asynchrones sont les plus répandus dans le domaine des moyennes puissances, du fait de leur faible rapport prix/puissance. On les trouve dans toutes les applications industrielles et domestiques correspondantes : machines outils, congélateurs, machines à laver, pompes diverses, etc... Par contre les machines asynchrones sont très peu utilisées en génératrices, même si cela est théoriquement possible (le glissement est alors négatif).

#### Les trucs et astuces des expériences de TP

Pour l'expérience qualitative sur les champs tournants :

- les trois bobines doivent être orientées dans le même sens,
- si l'aiguille de la boussole ne tourne pas malgré tout, il faut inverser le branchement de deux phases au niveau du variateur ou lui donner une pichenette dans un sens ou dans l'autre.

Pour l'étude de la machine asynchrone :

- il faut bien respecter le branchement proposé dans la notice,
- il faut toujours réfléchir en terme de point de fonctionnement et de puissance appelée par le système (faire varier la charge change le point de fonctionnement et la puissance appelée).

## 2.4 Bilan de puissance d'une machine à champ magnétique tournant

Les machines réelles présentent des écarts par rapport aux machines idéales jusqu'ici décrites. Par exemple, il est plus réaliste de prendre en compte les résistances et les inductances de l'induit et de l'inducteur dans les équations électriques, et en particulier lors d'un bilan d'énergie.

Dans une machine à champ magnétique tournant, les pertes d'énergie sont de plusieurs natures :

- les pertes électriques (ou pertes "cuivre")  $\mathcal{P}_J$  : elles se produisent par effet Joule dans les circuits électriques de l'inducteur et de l'induit :

$$\mathcal{P}_J = RI_R^2 + R_S I_S^2 \quad (2.28)$$

avec  $R_S$  la résistance du circuit inducteur et  $I_S$  le courant inducteur,  $R$  et  $I_R$  la résistance et le courant dans l'induit ( $R$  nulle pour une machine synchrone à aimant permanent). L'échauffement qui en résulte est réduit par une ventilation forcée.

- les pertes fer  $\mathcal{P}_{\text{fer}}$  : ce sont les pertes par hystérésis et les pertes par courants de Foucault produites dans la carcasse ferromagnétique du rotor et du stator, tout deux sièges de variations de flux magnétiques (plus de détails dans la section 4.1.3) ;

- les pertes mécaniques  $\mathcal{P}_{\text{frot}}$  : elles sont dues essentiellement à la liaison rotor-bâti et peuvent être modélisées par un frottement sec ou un frottement fluide.

### 2.4.1 Bilan de puissance

Pour réaliser proprement le bilan de puissance des machines à champ tournant, il faut remarquer tout d'abord que le théorème de conversion électromécanique le signe des puissances est régie par la convention algébrique thermodynamique. Dans ce cas une puissance positive signifie que de l'énergie est fournie au système. Cependant, les pertes décrites ci-dessus sont définies positives aussi, alors qu'elles font perdre de l'énergie au système. Pour réaliser correctement le bilan de puissance, nous pouvons soit changer de convention pour les pertes, soit se rappeler qu'en régime permanent la somme des puissances fournies est égale à la somme des puissances perdues.

En *régime permanent*, le bilan de puissance électrique réalisée sur la machine tournante, en tant que système mécanique et électrique, est alors :

$$\mathcal{P}_{\text{élec ext}} + \mathcal{P}_e = \mathcal{P}_J \tag{2.29}$$

avec  $\mathcal{P}_{\text{élec ext}}$  la puissance algébrique fournie ou reçue par le circuit électrique connecté à la machine. C'est donc une grandeur algébrique tout comme  $\mathcal{P}_e$ , positive si de l'énergie est fournie à la machine tournante et négative sinon (voir section 1.3.2). En régime permanent encore, le bilan de puissance mécanique est :

$$\mathcal{P}_{\text{méca ext}} + \mathcal{P}_L = \mathcal{P}_{\text{frot}} + \mathcal{P}_{\text{fer}} \tag{2.30}$$

avec  $\mathcal{P}_L$  la puissance fournie ou prélevée par les forces de Laplace au circuit mobile, et  $\mathcal{P}_{\text{méca ext}}$  la puissance mécanique fournie ou récupérable sur l'arbre du moteur (suivant son signe). On en déduit au final :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{élec ext}} + \mathcal{P}_{\text{méca ext}} = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{\text{frot}} + \mathcal{P}_{\text{fer}}} \tag{2.31}$$

à l'aide de la relation fondamentale de la conversion électromécanique<sup>8</sup>  $\mathcal{P}_e + \mathcal{P}_L = 0$  (équation 1.46).

### 2.4.2 Fonctionnement en moteur

Dans le cadre d'un fonctionnement moteur, on fournit de l'énergie électrique pour qu'elle soit convertie en énergie mécanique. On a donc  $\mathcal{P}_{\text{élec ext}} > 0$ . De plus, on a  $\mathcal{P}_L > 0$  car les forces de Laplace travaillent et apportent de l'énergie mécanique au système et  $\mathcal{P}_e < 0$  car l'énergie électrique est absorbée par les circuits inductifs et stockée en énergie magnétique (donc en dehors du circuit électrique qui est le système sur lequel nous réalisons le bilan de puissance). Au lieu de force électromotrice  $e$  on parle alors mieux de force contre-électromotrice  $E = -e$ , de sens positif opposé au courant  $i$  tel un récepteur électrique. On en déduit :

$$\mathcal{P}_{\text{élec ext}} = \mathcal{P}_J - \mathcal{P}_e, \quad \mathcal{P}_L = \mathcal{P}_{\text{frot}} + \mathcal{P}_{\text{fer}} - \mathcal{P}_{\text{méca ext}} \tag{2.32}$$

et enfin le bilan de puissance :

$$\mathcal{P}_{\text{élec ext}} = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{\text{frot}} + \mathcal{P}_{\text{fer}} - \mathcal{P}_{\text{méca ext}} \tag{2.33}$$

Si la puissance électrique fournie est suffisante pour compenser les pertes, i.e.  $\mathcal{P}_{\text{élec ext}} > \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{\text{frot}} + \mathcal{P}_{\text{fer}}$  alors  $\mathcal{P}_{\text{méca ext}} < 0$  et le système fournie de la puissance mécanique vers l'extérieur, qui peut ainsi être utilisée.

8. Ce dernier peut être appliqué ici car on peut se placer dans le référentiel tournant à la pulsation  $\omega_S$ . Pour la machine synchrone on aura  $\mathcal{P}_L = \mathcal{P}_e = 0$  alors que pour la machine asynchrone ces puissances sont liées uniquement à la différence des vitesses de rotation.

### 2.4.3 Fonctionnement en génératrice

Pour une machine fonctionnant en alternateur à l'aide d'une puissance mécanique fournie  $\mathcal{P}_{\text{méca ext}} > 0$ , de la même manière le bilan de puissance réalisé sur la machine tournante en tant que système mécanique et électrique est :

$$\mathcal{P}_{\text{méca ext}} = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{\text{frot}} + \mathcal{P}_{\text{fer}} - \mathcal{P}_{\text{élec ext}} \quad (2.34)$$

avec  $\mathcal{P}_{\text{élec ext}} < 0$  la puissance électrique récupérable si la puissance mécanique fournie est suffisante pour compenser les pertes. Dans le cadre d'un fonctionnement générateur, on a aussi  $\mathcal{P}_e > 0 = ei$  car l'énergie magnétique stockée dans les circuits inductifs est convertie en énergie électrique apportée au système, et  $\mathcal{P}_L < 0$  car les forces de Laplace sont résistantes et absorbent de l'énergie mécanique au système étudié.

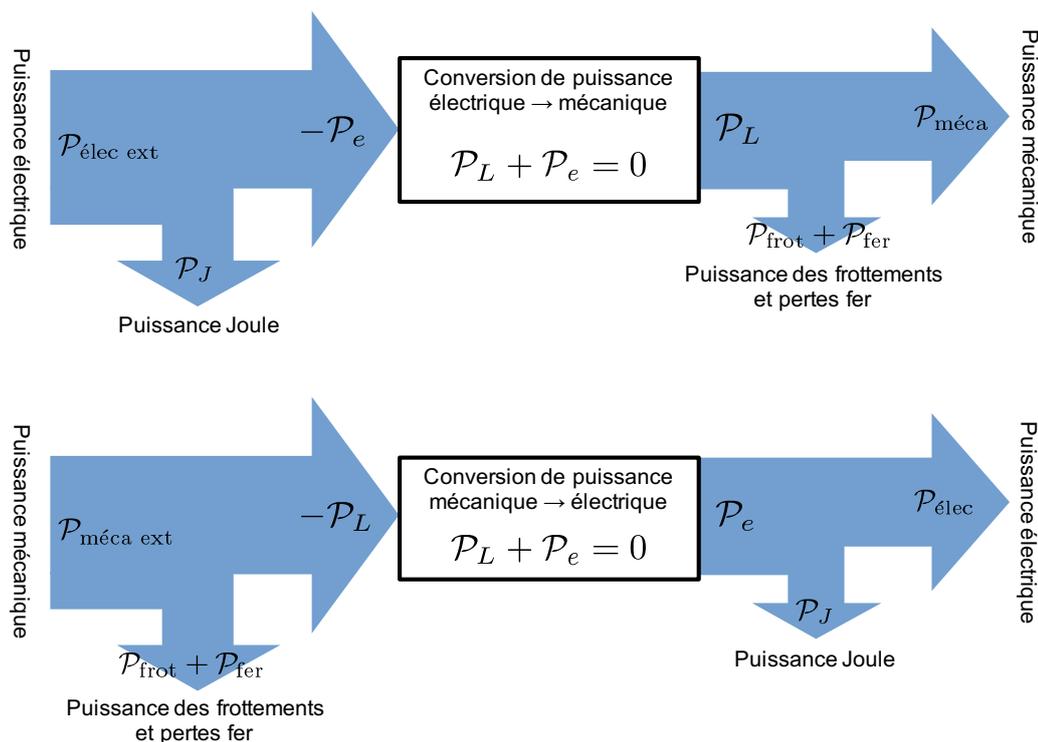


FIGURE 16 – Conversion d'une puissance électrique en puissance mécanique (haut) et conversion d'une puissance mécanique en puissance électrique (bas). Diagramme adapté du HPrépa PSI Électronique p.272.

## 3 Machines à courant continu

La stratégie des moteurs à courant continu consiste, dans un champ statorique  $\vec{B}$  constant, à utiliser la rotation pour commuter les courants dans les conducteurs rotoriques, de telle sorte que le moment magnétique associé reste à peu près orthogonal au champ magnétique. Et ainsi engendrer continuellement un moment moteur.

Comme ce moteur fonctionne avec des tensions et des courants continus, il est donc adapté à des sources d'énergie électrochimique (jouets à pile...). Pour les fortes puissances,

on le trouve dans les lignes de métro où elle fonctionne en moteur (traction) ou en génératrice (freinage). Son intérêt est de pouvoir commander sa vitesse de rotation par la tension d'alimentation et donc d'avoir un moteur à vitesse variable facilement commandable.

### 3.1 Structure

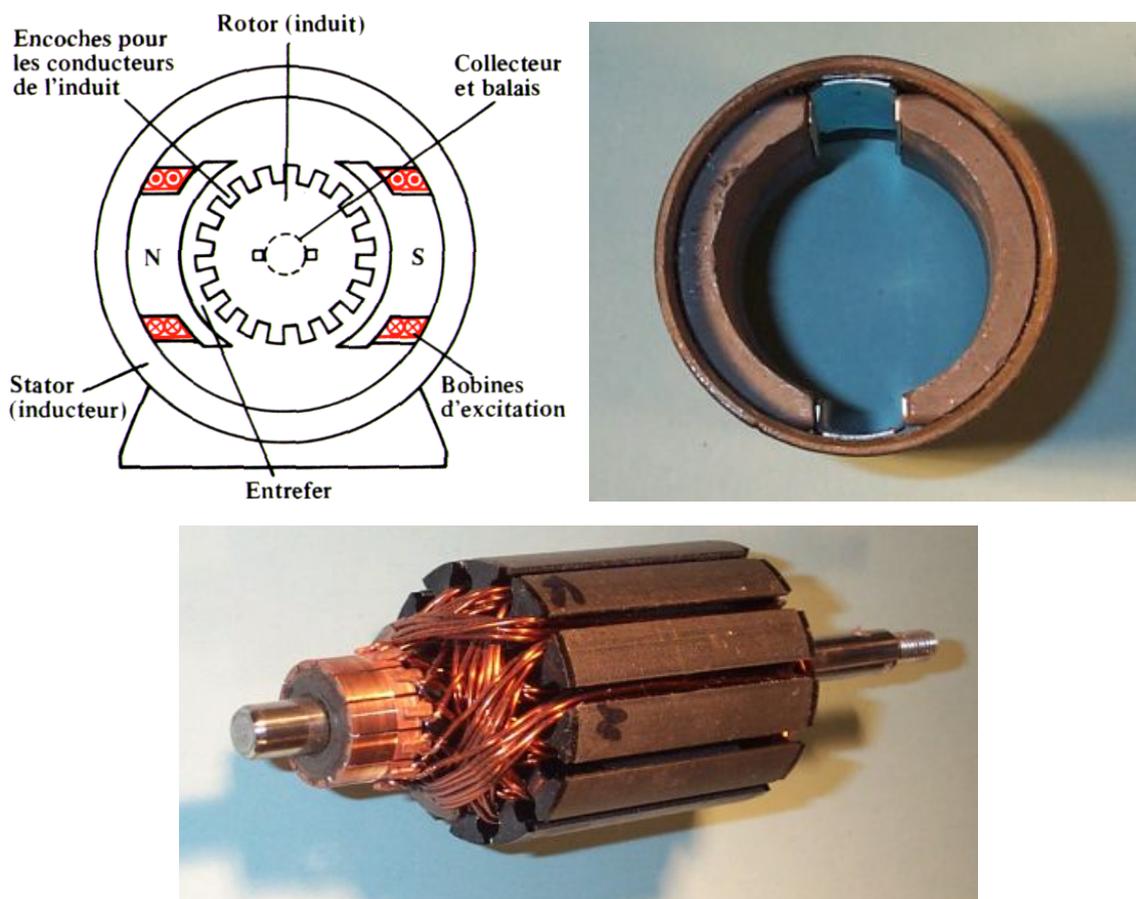


FIGURE 17 – Gauche : schéma de principe d'un moteur à courant continu bipolaire (une paire de pôles Nord-Sud). Droite : stator avec deux aimants permanents. Bas : rotor avec les spires et le matériau ferromagnétique. Photos issues de [http://explobotique.org/ancien\\_site/tech\\_mot/tech\\_mccap.htm](http://explobotique.org/ancien_site/tech_mot/tech_mccap.htm).

Le circuit bobiné sur le rotor et l'ensemble réalisant le collecteur est appelé *induit*. Dans la pratique, il est parcouru par des courants importants. Le circuit qui est à l'origine du champ  $\vec{B}$  dans l'entrefer est appelé *inducteur*. Il est situé au stator. Il est parcouru par des courants en général plus faibles que ceux de l'induit, sauf dans le cas d'un inducteur à aimants permanents ou sur quelques machines particulières.

La partie fixe, le stator, porte les éléments inducteurs (bobines ou aimants permanents), destinés à créer un champ magnétique. Celui-ci est supposé radial dans l'entrefer, à répartition sinusoïdale. La partie mobile, le rotor, porte des conducteurs en périphérie suivant des techniques de bobinage complexes afin de maintenir en permanence un circuit où va circuler le courant.

Les axes sur lesquels le champ magnétique s'annule sont appelés *lignes neutres*. Ailleurs, il a une valeur non nulle et a une structure périodique de période  $2\pi$  si la machine est

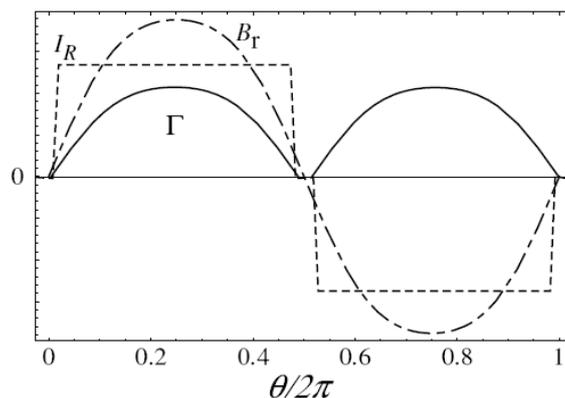


FIGURE 18 – Champ radial  $B_r$ , courant rotorique  $I_R$  et couple  $\Gamma$  pour un moteur à courant continu à une spire en fonction de l'angle de rotation.

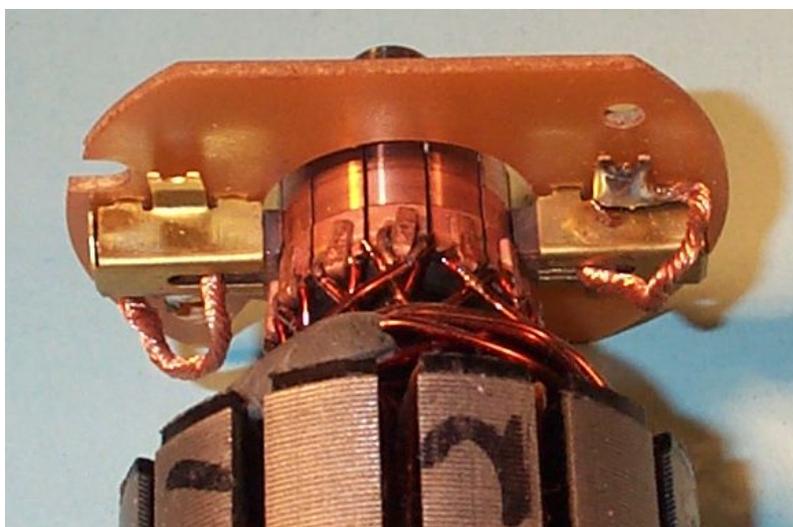


FIGURE 19 – Les balais (en haut à gauche et à droite) sont appuyés sur les pattes d'arrivées des spires grâce à des ressorts. Ils sont reliés électriquement au circuit pour alimenter le rotor en courant continu.

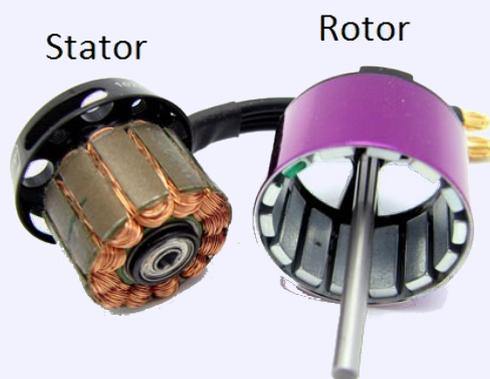
bipolaire. La rotation d'une spire traversée par le flux occasionné par  $\vec{B}$  va provoquer l'induction d'une tension électromotrice (ou force électromotrice f.e.m.) proportionnelle à la dérivée de ce flux et qui sera donc alternative. A cette spire, on associera un *collecteur* dont le rôle sera de redresser la f.e.m. induite : le collecteur est un redresseur mécanique. L'ensemble constitué par le collecteur et la spire est illustré figure 20. Le collecteur<sup>9</sup> est la pièce maîtresse du moteur à courant continu, mais aussi la plus fragile à cause des contacts glissants qui s'usent (frottements mécaniques, arcs électriques...) et qu'il faut donc remplacer régulièrement (voir figure 19).

9. Cette vidéo illustre parfaitement comment fonctionne le collecteur dans un véritable moteur : <https://www.youtube.com/watch?v=-qS85aIv1eQ>.

### Les moteurs sans balais

Avec le perfectionnement de l'électronique basse et haute puissance, il est maintenant possible d'avoir des moteurs à courant continu sans collecteur, mais avec un système électronique qui réalise lui-même la commutation des courant dans le circuit rotorique (interne ou externe au moteur). Ils équipent aujourd'hui les servo-mécanismes, les machines-outils, la robotique, les disques durs, graveurs DVD, ventilateurs d'ordinateur, voitures hybrides, vélos à assistance électrique... bref tout ce qui nécessite un moteur à courant continu (parce que l'alimentation est continue ou parce qu'on souhaite vraiment avoir une vitesse de rotation proportionnelle à la tension d'alimentation) mais dont on ne veut pas changer régulièrement les balais. Imaginez-vous changer le moteur de votre disque dur ?

Par son alimentation, il rentre dans la catégorie des machine à courant continu, mais par son fonctionnement il ressemble plutôt à une machine synchrone auto-pilotée. C'est l'électronique associée au moteur qui en permutant l'alimentation de bobines dans le stator permet la création d'un champ magnétique tournant qui exerce un couple sur un moment magnétique permanent crée par le rotor.



Vidéo sur son fonctionnement : <https://www.youtube.com/watch?v=bCEi0nuODac>

### 3.2 Principe général

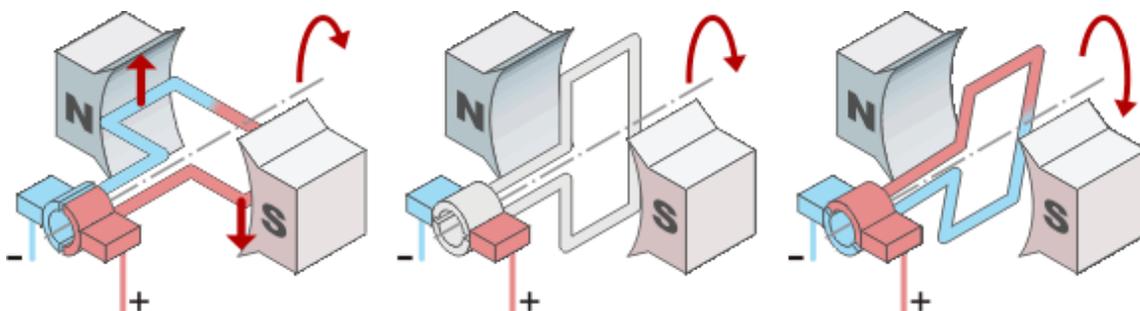


FIGURE 20 – Illustration de l'inversion de tension le collecteur dans une machine à courant continu bipolaire à une spire.

## 3.2.1 Rotor à une spire

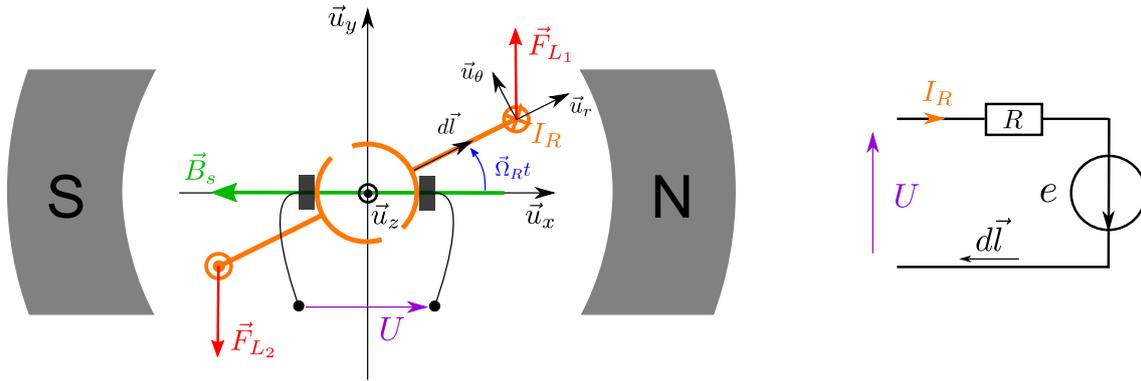


FIGURE 21 – Schémas mécaniques et électriques de calcul pour la machine à courant continu. Pour simplifier on ne considère pas les effets inductifs dans le rotor mais uniquement les effets résistifs.

Dans le cas d'un fonctionnement en moteur, une tension constante  $U$  est imposée aux bornes du collecteur par une alimentation extérieure. Dans le cas d'un fonctionnement générateur, la tension  $U$  est celle qui est fournie par la machine à un circuit électrique extérieur. Nous commençons par étudier le cas (purent de principe) où le rotor comporte une seule spire, formée de deux conducteurs diamétralement opposés. Si ces deux conducteurs sont parcourus par un même courant  $I_R$  en sens contraire, les forces de Laplace qu'ils subissent forment un couple, proportionnel au courant et à la composante radiale du champ magnétique, dont la variation avec l'angle est approximativement sinusoïdale (figure 18). On suppose que le champ  $\vec{B}_s$  prend la forme  $\vec{B}_s = -B_S \vec{u}_x$ . A partir de la modélisation proposée figure 21, pour une spire de rayon  $a$  et de longueur  $h$ , calculons les forces de Laplace :

$$\vec{F}_{L1} = \int_1 I_R d\vec{l} \wedge \vec{B}_s = h I_R B_S (-\vec{u}_z \wedge -\vec{u}_x) = h I_R B_S \vec{u}_y \quad (3.1)$$

$$\vec{F}_{L2} = \int_2 I_R d\vec{l} \wedge \vec{B}_s = -h I_R B_S \vec{u}_y \quad (3.2)$$

Le couple engendré vaut alors :

$$\vec{\Gamma}_z(t) = a \vec{u}_r \wedge \vec{F}_{L1} + a (-\vec{u}_r) \wedge \vec{F}_{L2} = 2ah I_R B_S \cos(\Omega t) \vec{u}_z \quad (3.3)$$

Au cours de la rotation, le courant électrique change de signe, et donc le couple également. C'est là qu'intervient le collecteur (ici une simple bague divisée en deux électrodes) : lors du passage des conducteurs par la ligne neutre, le courant  $I_R$  est interrompu, et rétabli dans l'autre sens. Cela permet de garder à tout instant un couple de même signe, bien que variant fortement dans le temps. En utilisant le facteur de forme  $2/\pi$  du cosinus redressé<sup>10</sup>, on obtient :

$$\langle \vec{\Gamma}_z(t) \rangle = 2B_S ah \langle |I_R \cos \Omega t| \rangle \vec{u}_z = \frac{2}{\pi} (2B_S ah) I_R \vec{u}_z \approx \frac{2}{\pi} \Phi_S I_R \vec{u}_z \quad (3.4)$$

où  $\Phi_S$  est le flux sortant du pôle nord et entrant dans le pôle sud du stator, et coupé par les deux conducteurs, soit la spire de surface  $2ah$ .

10. On rappelle que  $\langle |\cos \theta| \rangle = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} d\theta |\cos \theta| = 2/\pi$ .

Les deux conducteurs de la spire sont évidemment le siège d'une force électromotrice induite :

$$\begin{aligned}
 e(t) &= \int_{\text{spire}} (\vec{v} \wedge \vec{B}_s) \cdot d\vec{l} \\
 &= \int_1 (a\Omega \vec{u}_\theta \wedge -B_S \vec{u}_x) \cdot dl(-\vec{u}_z) + \int_2 (-a\Omega \vec{u}_\theta \wedge -B_S \vec{u}_x) \cdot dl\vec{u}_z \\
 &= 2a\Omega B_S h(\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_x) \cdot \vec{u}_z \\
 &= -2ah\Omega B_S \cos(\Omega t)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

variant selon une loi temporelle analogue à celle du flux magnétique. Le collecteur permet alors de *redresser* cette force électromotrice, conduisant à la valeur moyenne non nulle :

$$\langle e(t) \rangle = -\frac{2}{\pi} \Phi_S \Omega \tag{3.6}$$

On retrouve la relation fondamentale de la conversion de puissance électromécanique :

$$\langle \vec{\Gamma}_z(t) \cdot \vec{\Omega} \rangle = -\langle eI_R \rangle \tag{3.7}$$

avec  $\langle e(t) \rangle < 0$  si  $\Omega > 0$ , donc si les forces de Laplace sont motrices i.e.  $\langle \vec{\Gamma}_z(t) \cdot \vec{\Omega} \rangle > 0$ . Dans le cas d'un fonctionnement moteur par exemple, une partie de la puissance électrique fournie  $\langle UI_R \rangle$  est donc convertie en puissance mécanique  $\langle \vec{\Gamma}_z(t) \cdot \vec{\Omega} \rangle$  par les forces de Laplace. Le reste de la puissance électrique est dissipé par les pertes électriques et mécaniques.

### 3.2.2 Cas général

Les expressions précédentes seraient valables même sans les approximations précitées, à condition de remplacer le facteur de forme  $2/\pi$  par une constante sans dimension  $K$  convenable, qui dépend des caractéristiques géométriques et technologiques du moteur. Le paramètre  $K$  est appelé constante de couplage électromécanique .

**Propriété 3.1.** Avec les conventions choisies précédemment (en particulier  $\Omega > 0$  en fonctionnement moteur), on définit usuellement la force contre-électromotrice de la machine à courant continu par :

$$E = -e \tag{3.8}$$

Cette définition de la tension aux bornes de la machine à courant continu est adaptée à la modélisation de celle-ci par un dipôle électrique soumis à une tension  $E$ , traversé par un courant  $I_R$  orienté en sens inverse de  $E$ , et recevant une puissance électrique  $\mathcal{P} = EI_R$  (voir section 1.3.2).

**Propriété 3.2.** Les relations fondamentales décrivant le fonctionnement d'une machine à courant continu sont :

$$E = K\Phi_S\Omega \tag{3.9}$$

$$\langle \Gamma_z(t) \rangle = K\Phi_S I_R \tag{3.10}$$

Le flux magnétique  $\Phi_S$  dépend du courant inducteur  $i_e$  mais pas seulement : l'induit est parcouru par un courant qui crée un champ magnétique qui s'oppose au champ créé par  $i_e$ , ce qui entraîne une diminution de  $\Phi_S$  à mesure que  $I_R$  augmente. Ce phénomène est en général compensé par des enroulements supplémentaires. On peut donc supposer que  $\Phi_S(I_R, i_e) = \Phi_S(i_e)$ .

En réaction au mouvement une force électromotrice induite s'établit, proportionnelle à la vitesse de rotation  $\Omega$ . Le prix à payer dans la conversion électromécanique est que plus la puissance mécanique fournie devient importante, plus la force électromotrice  $e$  est importante (et négative) et fait décroître le courant  $I_R$  appelé à la source électrique<sup>11</sup>. Or les forces de Laplace sont proportionnelles à la valeur de  $I_R$ . On voit donc qu'un équilibre doit s'établir entre couple mécanique et tension induite, ce qui fait que le moteur à courant continu est naturellement un système en contre-réaction (voir le cours sur les systèmes asservis).

### 3.3 Modes de fonctionnement et bilan de puissance

**Fonctionnement moteur :** dans la figure de calcul 21, avec les conventions choisies, on a  $\langle \vec{\Gamma}_z \cdot \vec{\Omega} \rangle > 0$ . Les forces de Laplace travaillent dans le sens de rotation et  $\langle eI_R \rangle < 0$ . En convention électrique la puissance reçue par le dipôle moteur est  $EI_R = -eI_R > 0$ . La machine fonctionne en récepteur électrique et absorbe l'énergie électrique pour la stocker en énergie magnétique.

**Fonctionnement générateur :** pour fournir de l'énergie électrique, de l'énergie mécanique doit être transformée en énergie électrique donc  $\langle eI_R \rangle > 0$ . Cette condition impose que soit  $I_R$  soit  $\vec{\Omega}$  sont inversés par rapport à la figure 21. Par conséquent, le couple de Laplace devient résistif  $\langle \vec{\Gamma}_z \cdot \vec{\Omega} \rangle < 0$  que ce soit par inversion de  $I_R$  ou de  $\vec{\Omega}$ .

Une machine à courant continu est donc réversible, c'est-à-dire qu'elle peut fonctionner soit en moteur soit en génératrice. Dans le premier cas la machine est alimentée par une source de tension continue et fonctionne comme un récepteur électrique. Dans le second cas, la machine fonctionne comme un générateur de tension continue alimentant une impédance de charge  $Z_c$ . Puis, suivant le sens de rotation, chacun des deux modes de fonctionnement se divise en deux sous-cas : marche avant et marche arrière (voir figures 22 et 23).

Pour résumer, si on s'appuie sur la figure 23, on a :

- $EI_R > 0$  : la machine consomme de l'énergie électrique et fonctionne en récepteur
- $EI_R < 0$  : la machine fournit de l'énergie électrique et fonctionne en générateur
- $\vec{\Gamma}_z \cdot \vec{\Omega} > 0$  : la machine fournit une puissance mécanique et fonctionne en moteur
- $\vec{\Gamma}_z \cdot \vec{\Omega} < 0$  : la machine perd de l'énergie mécanique et fonctionne en freinage

Ce principe de réversibilité du fonctionnement de la machine à courant continu est utilisé dans les voitures à moteur électrique ou dans le métro. Par exemple en voiture, lorsqu'on veut accélérer, on utilise la machine comme moteur en prélevant de l'énergie électrique à la batterie, et lorsqu'on veut freiner, on utilise la machine comme générateur en rechargeant la batterie. En métro l'énergie électrique récupérée en mode générateur est réinjectée dans le rail pour alimenter les autres rames.

11. Pour un rotor de résistance  $R$ , le courant qui le parcourt est  $I_R = (U + e)/R$  avec  $e < 0$  dans notre cas. Or  $e$  est proportionnel à  $\Omega$  donc plus ce dernier est important, moins  $I_R$  donc le couple l'est.

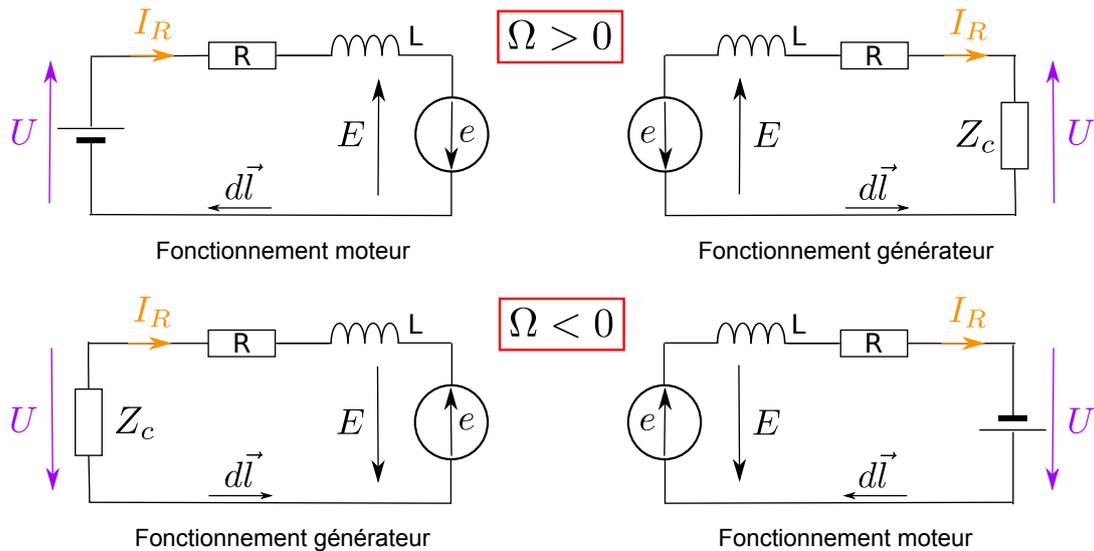


FIGURE 22 – Schémas électriques équivalents pour la machine à courant continu en fonctionnement moteur et générateur pour  $\Omega > 0$  et  $\Omega < 0$ . Sur tous les schémas, la flèche  $I_R$  représente le sens positif du courant et la flèche  $E$  une tension positive. Inverser  $\vec{\Omega}$  revient à changer le sens de  $d\vec{l}$  donc de  $e$ . Selon que la machine est représentée en convention électrique récepteur ou générateur par la paire  $E, I_R$ , on détermine si elle fonctionne en moteur ou en générateur (et aussi en marche "avant" ou en marche "arrière", voir aussi figure 23). Les résistances et inductances d'induit sont représentées ici pour modéliser les défauts de la machine réelle.

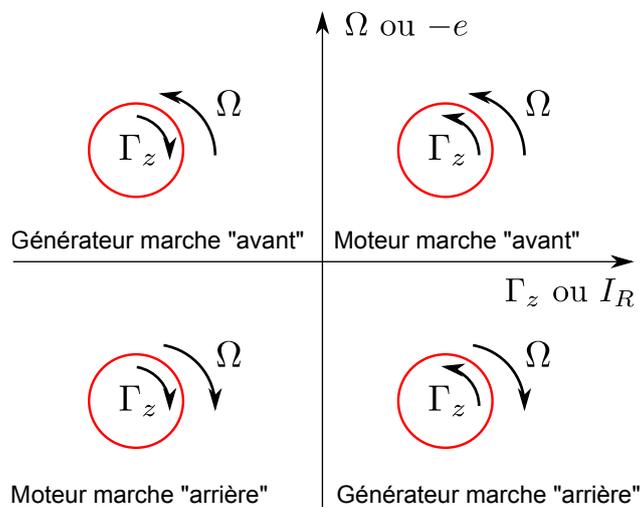


FIGURE 23 – Les quatre modes de fonctionnement d'une machine à courant continu. Ici  $E$  et  $I_R$  sont des quantités algébriques et peuvent adopter des signes négatifs.

### 3.3.1 Bilan de puissance

Encore une fois, les machines réelles présentent des écarts par rapport à la machine idéale jusqu'ici décrite. Par exemple, il est plus réaliste de prendre en compte les résistances et les inductances de l'induit et de l'inducteur dans les équations électriques, et en particulier lors d'un bilan d'énergie.

Dans une machine à courant continu, les pertes d'énergie sont de plusieurs natures :

- les pertes électriques (ou pertes "cuivre")  $\mathcal{P}_J$  : elles se produisent par effet Joule dans les circuits électriques de l'inducteur et de l'induit ainsi qu'au niveau des contacts collecteur-balais :

$$\mathcal{P}_J = RI_R^2 + r_e i_e^2 \quad (3.11)$$

avec  $r_e$  la résistance du circuit inducteur et  $i_e$  le courant inducteur (contribution nulle si l'inducteur est constitué par un aimant permanent). L'échauffement qui en résulte est réduit par une ventilation forcée ;

- les pertes fer  $\mathcal{P}_{\text{fer}}$  : ce sont les pertes par hystérésis et les pertes par courants de Foucault produites dans la carcasse ferromagnétique du rotor (plus de détails dans la section 4.1.3) ;
- les pertes par commutation  $\mathcal{P}_{\text{com}}$  : lors des commutations du collecteur les fortes variations de courants dans le circuit induit produisent des étincelles qui détruisent les contacts électriques et dissipent de l'énergie ;
- les pertes mécaniques  $\mathcal{P}_{\text{frot}}$  : elles sont dues au contact des balais sur le collecteur (sensiblement proportionnelles à la vitesse de rotation) et à la liaison rotor-bâti.

En *régime permanent*, pour une machine fonctionnant en moteur à l'aide d'une puissance électrique fournie  $\mathcal{P}_{\text{élec ext}} = UI_R > 0$ , le bilan de puissance est :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{élec ext}} - \mathcal{P}_J - \mathcal{P}_{\text{com}} = -\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_L = \mathcal{P}_{\text{frot}} + \mathcal{P}_{\text{fer}} - \mathcal{P}_{\text{méca ext}}} \quad (3.12)$$

avec  $\mathcal{P}_{\text{méca ext}} = \vec{\Gamma}_{\text{utile}} \cdot \vec{\Omega} < 0$  la puissance mécanique récupérable sur l'arbre du moteur. Pour une machine fonctionnant en génératrice à l'aide d'une puissance mécanique fournie  $\mathcal{P}_{\text{méca ext}} = \vec{\Gamma}_z \cdot \vec{\Omega} > 0$ , le bilan de puissance est :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{méca ext}} - \mathcal{P}_{\text{frot}} - \mathcal{P}_{\text{fer}} = -\mathcal{P}_L = \mathcal{P}_e = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{\text{com}} - \mathcal{P}_{\text{élec ext}}} \quad (3.13)$$

avec  $\mathcal{P}_{\text{élec ext}} = UI_R < 0$  la puissance électrique récupérable sur le circuit induit.

### 3.3.2 Caractéristiques de fonctionnement (en régime moteur)

Nous supposons que la réaction d'induit (effet du champ magnétique rotorique) est parfaitement compensée (en particulier par un positionnement adéquat des balais).

La résistance  $R$  de l'induit est généralement très faible, afin de réduire les pertes. Elle n'est cependant pas nulle, et affecte les propriétés mécaniques de la façon suivante : avec l'équation de fonctionnement  $U = RI_R + E$  avec  $E > 0$  la force contre-électromotrice, et  $\Omega = E/K\Phi_S$ , on obtient la loi :

$$\Omega = \frac{U}{K\Phi_S} - \frac{RI_R}{K\Phi_S} = \Omega_0 - \frac{RI_R}{K\Phi_S} \quad (3.14)$$

La pente de cette loi linéaire est généralement faible car  $R$  est la plus faible possible et  $\Phi_S$  le plus grand possible pour maximiser le rendement de la machine.

Toutefois le courant  $I_R$  est, lui, directement proportionnel au couple par la loi :

$$I_R = \frac{\Gamma_z}{K\Phi_S} \quad (3.15)$$

et on en déduit la caractéristique  $\Gamma_z(\Omega)$ , représentée pour différentes tensions sur la figure 24,  $\Gamma_M$  étant fixé par l'intensité rotorique maximale, et  $\Omega_M$  par la tension maximale :

$$\Gamma_z = K\Phi_S I_R = K\Phi_S \frac{U - E}{R} = \frac{K\Phi_S}{R} (U - (K\Phi_S)\Omega) \quad (3.16)$$

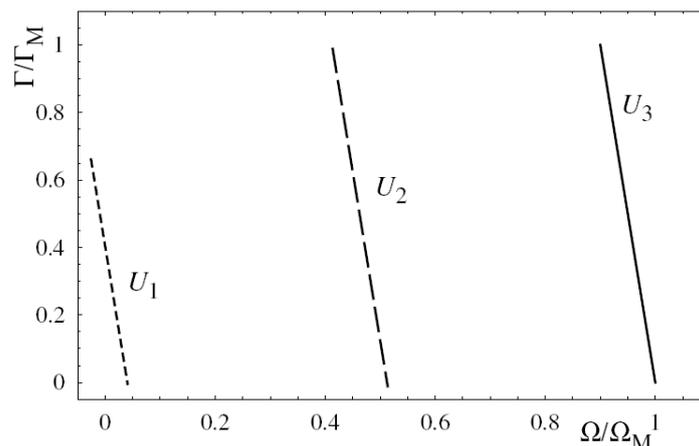


FIGURE 24 – Caractéristiques mécaniques d'un moteur à courant continu ( $U_1 < U_2 < U_3$ ).

Notons que la pente négative de cette caractéristique assure la stabilité de tous les points de fonctionnement.

**Propriété 3.3.** On en déduit que la vitesse du moteur à courant continu  $\Omega$  est donc essentiellement imposée par sa tension d'alimentation  $U$ , et peu par le couple à fournir.

*Ces caractéristiques, très différentes de celles obtenues pour une machine à champ magnétique tournant, permettent un contrôle indépendant de la vitesse et du couple, et font tout l'intérêt des moteurs continus, pour les machines-outils, le levage, les capteurs de vitesse de rotation (dynamo tachymétrique), etc...*

### 3.4 Modes d'excitation

Les moteurs considérés jusqu'ici sont des moteurs à excitation séparée : un générateur auxiliaire impose le courant et donc le flux dans les enroulements statoriques. Comme nous l'avons vu, c'est un mode de fonctionnement particulièrement flexible. Toutefois, on utilise aussi beaucoup les modes d'excitation "série" et "parallèle" ("moteur shunt"), que nous allons décrire succinctement (voir figure 25). Selon le branchement du circuit inducteur, la capacité des machines à produire un couple au démarrage ou à maintenir une vitesse de rotation stable change<sup>12</sup>.

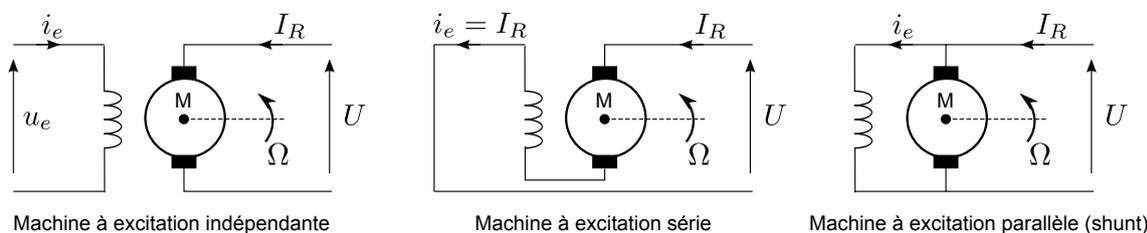


FIGURE 25 – Différents types de machines à courant continu.

12. Voir <https://www.youtube.com/watch?v=LAtPHANefQo> par exemple.

### 3.4.1 Excitation série

Dans ce mode, un même générateur alimente le stator et le rotor connectés en série. Le flux  $\Phi$  est alors lui-même proportionnel au courant  $I_R$ . On en déduit aisément les lois :

$$E = K' \Omega I_R \quad \text{et} \quad \Gamma_z = K' I_R^2. \quad (3.17)$$

Si, comme c'est généralement le cas, on peut négliger la chute de tension résistive  $(R_S + R)I_R$  devant la f.e.m., on a  $U \approx E$ . On en déduit alors la loi approchée :

$$\Gamma_z = \frac{U^2}{K'} \frac{1}{\Omega^2}, \quad (3.18)$$

valable si la vitesse, et donc la f.e.m., n'est pas trop petite. Notons qu'il est en outre indispensable d'utiliser un rhéostat de démarrage pour limiter le courant, car la f.e.m. étant initialement nulle, le courant appelé pourrait être destructeur.

*Ce mode de fonctionnement, assurant un couple maximal à vitesse réduite, est particulièrement adapté à des équipements de puissance requérant cette propriété : laminoirs, démarreur automobile, traction électrique...*

Inversement, une telle machine ne peut fonctionner à vide, car la vitesse dépasserait la limite admissible : il est alors indispensable de réduire fortement la tension.

### 3.4.2 Excitation parallèle (ou shunt)

Lorsque le rotor et le stator sont alimentés en parallèle par la même source de tension  $U$ , le stator appelle toujours le même courant  $i_e = U/R_S$ , et le flux  $\Phi$  est donc proportionnel à  $U$  (on néglige la réaction d'induit). L'intérêt de ce montage est d'avoir un réglage de la vitesse assez indépendant de la charge, et qui peut être réglée en jouant simplement sur un rhéostat inclus dans le circuit statorique. De ce fait, à tension constante, la vitesse ne dépend pas de la charge, ce qui est très utile dans les machines outils, au moment où l'on "attaque" la pièce à usiner. Hormis ce point, en utilisant deux rhéostats indépendants, dans chacun des deux circuits, on se rapproche beaucoup du mode d'excitation indépendante. Les équations sont par ailleurs très similaires.

## 3.5 Machine à N spires

Dans la pratique, la forte modulation du couple et de la f.e.m. induite instantanée ne sont pas tolérables. Il est donc souhaitable de répartir plus uniformément le champ magnétique produit en sculptant de façon optimale les matériaux ferromagnétiques du stator (de façon à avoir  $\vec{B}_s \approx -B_S \vec{u}_r$  pour  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$  et  $\vec{B}_s \approx +B_S \vec{u}_r$  pour  $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ ) et d'utiliser un plus grand nombre de conducteurs rotoriques, distribués de façon à réduire l'importance des oscillations du couple. Un premier pas consiste à ajouter une deuxième spire à  $90^\circ$  de la première, de telle sorte que les annulations de  $\Gamma(t)$  pour une paire de conducteurs coïncident avec les maxima de la seconde. C'est à peu près le cas pour un rotor bipolaire bobiné, comme dans le "modèle" disponible en TP.

### 3.5.1 Principe de base

Plus généralement, la configuration convenable est celle où  $2N$  conducteurs (soit  $N$  spires) sont équirépartis sur la circonférence (comme suggéré sur la figure 17, pour  $N = 6$ ).

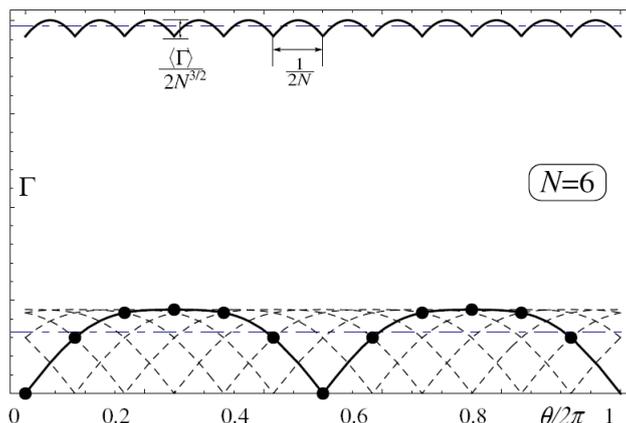


FIGURE 26 – Couples par spire et couple total pour un ensemble de  $2N = 12$  conducteurs, soit 6 spires. Les droites en tirets alternés représentent les valeurs moyennes, pour 1 spire et pour  $N$  spires.

On peut constater alors que les couples  $\Gamma_p(t)$  et  $e_p(t)$  successifs se déduisent par un simple déphasage de  $\phi = 2\pi/N$ , comme le montre la figure 26, pour  $N = 6$ . La courbe continue inférieure représente  $\Gamma_1(t)$ , et les courbes tiretées les  $\Gamma_p(t)$  suivants ; la courbe supérieure est la somme des courbes inférieures et représente le couple total résultant. Les points sur la courbe  $\Gamma_1(t)$  montrent les contributions de chacun des  $2N = 12$  conducteurs, à l'instant de la commutation du conducteur  $p$ .

### 3.5.2 Bobinages réalistes

Nous ne détaillerons pas dans ce qui suit les différentes méthodes de bobinages<sup>13</sup>. On peut réaliser des bobinages multipolaires ( $2p$  pôles) en étoiles, composés de plusieurs "voies d'enroulement" parallèles (voir figure 6), où  $2a$  spires équivalentes forment des plans parallèles. On peut montrer que pour un moteur possédant  $2N$  conducteurs actifs,  $2a$  voies d'enroulement, et  $2p$  pôles, les équations (3.4) et (3.6) peuvent alors se généraliser selon

$$E = K \frac{p}{a} \Phi_S \Omega \quad \text{et} \quad \Gamma_z = K \frac{p}{a} \Phi_S I_R, \quad (3.19)$$

où  $K$  est une constante du moteur, proche de  $N/\pi$ ,  $\Omega$  la vitesse de rotation du moteur,  $\Phi_S$  le flux sous l'un des pôles du stator, et  $I_R$  le courant total traversant le rotor.

#### Les machines tournantes en PSI

L'enseignement des machines tournantes en PSI a changé avec l'arrivée des derniers programmes. Tout d'abord, la machine asynchrone n'est plus au programme. Ensuite la façon dont la machine synchrone et la machine à courant continu est présentée ici est similaire à celle qui devait être enseignée avant : calcul des forces de Laplace appliquée à une/des spires(s) de conducteur métallique et calcul de la force électromotrice. Cette vision a l'avantage d'appliquer les notions d'électromagnétisme liées à l'induction, mais ne représente pas la réalité d'une machine réelle.

13. Voir par exemple <https://www.youtube.com/watch?v=bCwu5KPVv54> pour se rendre compte à quel point le bobinage des machines tournantes est un art.

En effet, dans une machine réelle les conducteurs de l'induit sont logés dans des encoches du rotor ferromagnétique comme suggéré dans la figure 17. Le matériau ferromagnétique canalisant les lignes de champ magnétique venant du stator, le champ magnétique devient quasi nulle au niveau des conducteurs ce qui compromet le calcul des forces de Laplace subies par le conducteur. De plus, il n'a pas été pris en compte l'interaction mutuelle du rotor comme dipôle magnétique avec le stator. Dans les nouveaux programmes, le couple électromécanique est déduit de considération sur l'énergie magnétique stockée dans la machine et convertie en force mécanique. Cette nouvelle approche permet de prendre en compte l'effet des matériaux ferromagnétiques présents dans le rotor et leur influence réciproque sur le stator.

Conclusion, pour la leçon sur la conversion de puissance électromécanique, attention à bien respecter le programme !

### Les moteurs électriques dans les transports

Les problématiques liées au réchauffement climatique et l'amélioration de la technologie des batteries au lithium ont permis le développement des véhicules électriques pour le grand public.

#### Voiture

Un premier modèle avait bien sûr déjà été proposé au XIXe siècle, mais face au moteur à combustion ce n'est pas le moteur électrique qui s'est imposé. Aujourd'hui, les moteurs électriques à courant continu équipent déjà par centaines les voitures, pour les vitres, le réglage des sièges, etc. Mais ils sont plus adaptés pour les faibles puissances et donc n'équipent pas la voiture en tant que système de propulsion. Ce sont donc les machines triphasées qui assurent celle-ci, en particulier le moteur asynchrone, mais aussi le moteur synchrone à aimant permanent (les technologies récentes de fabrication d'aimants permanents puissants et légers à partir de terres rares permet d'envisager cette technologie pour un véhicule). Le rendement d'un moteur électrique est généralement supérieur à 90% et peut, dans les conditions les plus favorables et selon le type de moteur, approcher 100%, alors qu'il est de l'ordre de 40% pour les moteurs thermiques les plus évolués.

#### Vélos et trottinettes électriques

Les vélos à assistance électrique et les trottinettes électriques sont équipés de moteurs à courant continu car les batteries délivrent nativement un courant continu. Ils peuvent être soit avec balais, soit sans balais mais dans ce cas ils doivent être accompagnés d'un contrôleur électronique.



*Moteur sans balai pour vélo à assistance électrique avec son contrôleur électronique, placé dans le moyeu de la roue.*

### Trains

Les trains à propulsion électrique sont alimentés en électricité soit par une caténaire soit par un troisième rail. Les premières lignes électrifiées utilisaient du courant continu, mais avec l'avènement de l'électronique de puissance les lignes modernes sont maintenant en alternatif. En France, la majeure partie du réseau ferré est équipée de caténaires alimentées en 25 kV à 50 Hz. Cependant on trouve encore de vastes zones alimentées pour des raisons historiques en courant continu 1500 V sur le réseau ferroviaire français : une partie de la France de l'Ouest (gare Montparnasse), toute la France du Sud-Ouest (gare d'Austerlitz) et toute la France du Sud et du Sud-Est (gare de Lyon) à l'exception de la Côte d'Azur. Signe de cette histoire de l'électrification du train, le RER B aujourd'hui encore est alimenté en tension continue au sud de la Gare du Nord, et en alternatif au nord. Les pantographes doivent donc être adaptés pour les deux types de tensions<sup>a</sup>, mais derrière le moteur reste un moteur à courant continu, quitte à redresser et abaisser le courant alternatif. Le métro parisien est quant à lui alimenté par un troisième rail en 750 V continu. En 2008, l'énergie consommée par la RATP s'élevait à 1,4 milliard de kWh par an. La puissance électrique nécessaire aux heures de pointe s'élève à 260 mégawatts.

### Avion

L'avion commercial à propulsion électrique est encore actuellement en développement. Il faut comprendre qu'un moteur d'avion développe une puissance colossale au décollage, et des problématiques de poids embarqués se rajoutent. Il semblerait que le futur proche voit l'avènement de moteurs hybrides d'abord, avant de passer au tout électrique.

<sup>a</sup>. Voir [ce blog](#) pour plus d'informations et une vidéo.

## 4 Conversion de puissance électrique : le transformateur

Ce chapitre a pour but de détailler le fonctionnement et les principales propriétés des transformateurs électriques. Ceux-ci sont par exemple utilisés par EDF en bout de ligne, d'un côté pour élever la tension électrique de la tension de production (6000 V) à la tension de transport (300 kV), puis à l'autre extrémité pour abaisser successivement cette tension jusqu'à la tension d'utilisation (230 V ou 380 V). Nous utilisons également des transformateurs pour charger les batteries (téléphones et ordinateurs portables par exemple), ils convertissent la tension du secteur de 230 V à 12 V.

### 4.1 Notions préliminaires

#### 4.1.1 Théorème d'Ampère dans les milieux magnétiques

L'aimantation  $\vec{\mathcal{M}}$  d'un matériau a pour origine l'orientation collective des moments magnétiques intrinsèques (ou spins) des particules constituant la matière (électrons, protons, neutrons). On l'assimile simplistement à la notion de courants "liés"  $\vec{j}_l = \text{rot } \vec{\mathcal{M}}$ . Si on note  $\vec{j}$  le courant libre<sup>14</sup>, l'équation de Maxwell-Ampère donne alors :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_l) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \text{rot } \vec{\mathcal{M}} + \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.1)$$

pour obtenir :

$$\text{rot } \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{\mathcal{M}} \right) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.2)$$

d'où l'introduction du vecteur excitation magnétique  $\vec{H}$  :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{\mathcal{M}} \quad (4.3)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.4)$$

Ainsi, si on considère une surface  $\Sigma$  orientée, de contour  $\mathcal{C}$ , d'après le théorème de Green on obtient :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\Sigma} = I_{\Sigma} + \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{\Sigma} \quad (4.5)$$

où  $I_{\Sigma}$  est le courant traversant la surface  $\Sigma$ . Les milieux magnétiques ayant une densité de charges électriques libres nulle, on obtient le théorème d'Ampère généralisé aux milieux magnétiques :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\Sigma}} \quad (4.6)$$

Si le milieu magnétique est supposé avoir une réponse linéaire à l'excitation magnétique, alors on a une relation de la forme :

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\chi}_m(\vec{r}) \cdot \vec{H} \quad (4.7)$$

14. C'est-à-dire le courant électrique circulant effectivement dans ce matériau.

où  $\vec{\chi}_m(\vec{r})$  est un tenseur qui dépend de la position a priori. Si le milieu est supposé homogène, alors ce tenseur ne dépend plus de la position. Enfin, si le milieu est isotrope, alors le tenseur  $\vec{\chi}_m = \chi_m \cdot \mathbf{1}$  est scalaire. On a alors :

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{\mathcal{M}} \quad (4.8)$$

Dans un milieu linéaire, on peut donc écrire :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{\mathcal{M}} + \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (4.9)$$

avec  $\mu = \mu_0 \mu_r$ , et  $\mu_r = 1 + \chi_m$ . Le paramètre  $\chi_m$  est appelé susceptibilité magnétique et est lié par définition à l'aimantation par :

$$\vec{\mathcal{M}} = \chi_m \vec{H} \quad (4.10)$$

#### 4.1.2 Loi de la réfraction appliquée au champ $\vec{H}$

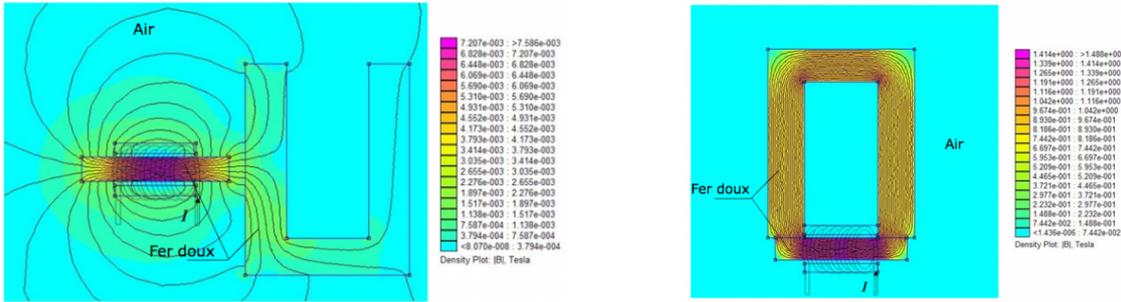


FIGURE 27 – Canalisation du flux magnétique par des matériaux ferromagnétiques doux avec différentes géométries (simulations).

Il existe une loi analogue à celle de la réfraction optique pour les milieux magnétiques appliquée au champ  $\vec{H}$ . L'analogue de l'indice optique est la perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  ( $\mu_r \leftrightarrow \epsilon_r$ ). Une grande perméabilité relative permet de confiner le champ magnétique (analogie avec les fibres optiques à saut d'indice).

Étudions ce qui se passe à l'interface entre un milieu ferromagnétique et l'air pour le champ  $\vec{B}$ . On a continuité de la composante tangentielle du vecteur excitation magnétique si aucun courant libre  $\vec{j}$  ne circule dans le matériau :

$$\vec{H}_{\text{air}} - \vec{H}_{\text{fer}} = \vec{j} \wedge \vec{n}_{\text{fer} \rightarrow \text{air}} = \vec{0} \Rightarrow H_T^{\text{air}} = H_T^{\text{fer}} \quad (4.11)$$

La relation de passage pour le champ magnétique :

$$\vec{B}_{\text{air}} - \vec{B}_{\text{fer}} = \mu_0 \vec{j}_{s, \text{liés} + \text{libres}} \wedge \vec{n}_{\text{fer} \rightarrow \text{air}} \quad (4.12)$$

donne la continuité de la composante normale du champ magnétique :

$$B_N^{\text{air}} = B_N^{\text{fer}} \quad (4.13)$$

Utilisons la définition de l'excitation magnétique :

$$\begin{cases} B_T^{\text{air}} = \mu_0 H_T^{\text{air}} \\ B_T^{\text{fer}} = \mu_0 \mu_r H_T^{\text{fer}} \end{cases} \Rightarrow \frac{B_T^{\text{fer}}}{B_T^{\text{air}}} = \mu_r \frac{H_T^{\text{fer}}}{H_T^{\text{air}}} = \mu_r \gg 1 \quad (4.14)$$

Comme  $\mu_r$  est très grand devant 1 dans les milieux ferromagnétiques, on a  $B_T^{\text{air}} \ll B_T^{\text{fer}}$ . On peut donc dire que la composante tangentielle de  $\vec{B}$  "s'annule pratiquement" quand on passe d'un milieu ferromagnétique à un milieu non ferromagnétique. Autrement dit, les lignes de champ magnétique ont tendance à être tangentes au dioptré dans le milieu ferromagnétique et plus resserrées (champ plus intense). Le flux sera donc nul dans l'air et canalisé dans le fer. La canalisation du flux par les matériaux ferromagnétiques doux est illustrée figure 27. Pour plus de précision, voir l'épreuve d'agrégation A de la session 1991.

### 4.1.3 Matériaux ferromagnétiques

On distingue les matériaux ferromagnétiques doux des matériaux ferromagnétiques durs.

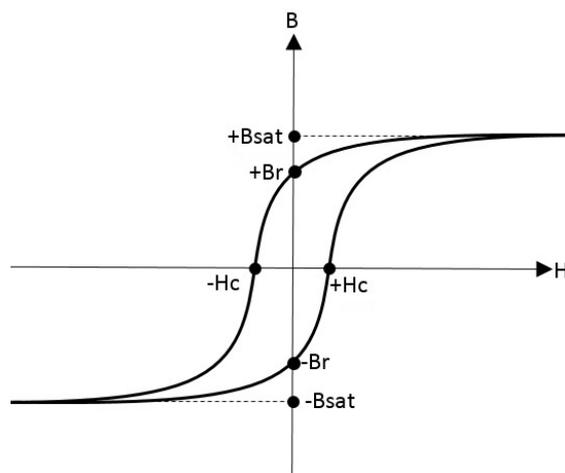


FIGURE 28 – Cycle d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique doux.

Les premiers servent à concentrer le flux magnétique. Pour cela on fait en sorte qu'ils aient une caractéristique la plus linéaire possible. Ils présentent des champs coercitifs  $H_c$  et des inductions rémanentes  $B_r$  faibles (voir figure 28). En l'absence d'excitation, les matériaux parfaitement doux ne présentent pas de champ magnétique notable dans leur voisinage.

Les matériaux durs, également appelés aimants, ont des valeurs de  $H_c$  et  $B_r$  élevées, et créent un champ dans leur voisinage en l'absence d'excitation. Il s'agit de matériaux qui, une fois aimantés, restent dans un état saturé en raison des défauts de structure qui bloquent les mouvements des parois de domaines de Weiss (domaines microscopiques dans le matériau d'aimantation identique).

Les transformateurs électriques sont basés sur l'utilisation de circuits en matériaux ferromagnétiques doux pour canaliser des flux de champ magnétique. On suppose donc que le matériau fonctionne dans son domaine linéaire  $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ . Il n'y a donc pas de saturation ni de phénomène d'hystérésis. En pratique, les limites de cette modélisation induisent des pertes d'énergie dans le matériau.

**Pertes par hystérésis :** une fois le matériau aimanté une première fois, si on diminue lentement  $H$  on ne reste pas sur la courbe de première aimantation mais on décrit un cycle d'hystérésis. Si ce cycle a été relevé pour des évolutions suffisamment lentes (nous verrons par la suite pourquoi prendre cette hypothèse), son aire représente l'énergie volumique

dissipées par les *pertes par hystérésis*. Ces pertes sont dues à des courants de Foucault très localisés résultant des variations d'induction provoquées par des irrégularités cristallographiques lors de l'évolution de la structure magnétique.

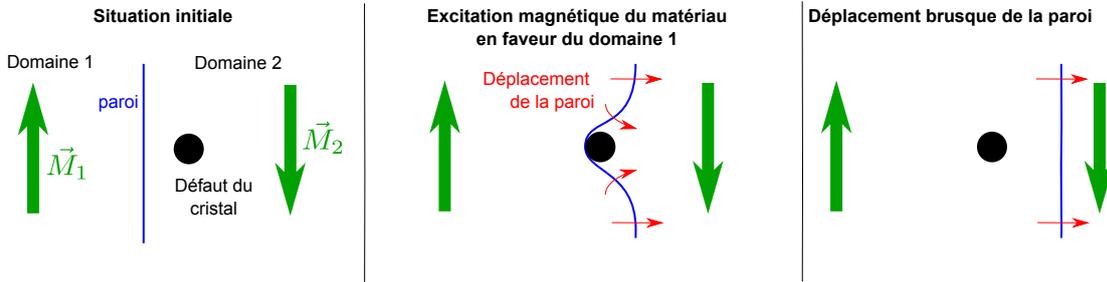


FIGURE 29 – Illustration du mécanisme microscopique des pertes par hystérésis dues au déplacement des parois séparant les domaines de Weiss.

Expliquons. Au niveau microscopique le matériau ferromagnétique est organisé en domaines d'aimantation différents dits domaines de Weiss. Lorsqu'on parcourt le cycle d'hystérésis on change l'aimantation globale du matériau en privilégiant certains domaines par rapport à d'autres. Par conséquent les parois séparant ces domaines d'aimantation sont déplacées par l'excitation magnétique. Mais en se déplaçant elles rencontrent des défauts dans la structure du cristal, s'y accrochent puis claquent brusquement pour passer l'obstacle (voir figure 29). Les moments magnétiques locaux changent rapidement ce qui induit d'importants courants de Foucault localement ( $d\vec{B}/dt$  important localement), donc des pertes par effet Joule.

Plus la paroi se déplace vite plus elle rencontre souvent des défauts et plus il y a des pertes. On modélise souvent la puissance dissipée par ces pertes par :

$$P_{\text{hyst}} \propto B^2 f \quad (4.15)$$

avec  $f$  la fréquence d'excitation qui correspond à la fréquence de parcours d'un cycle d'hystérésis ( $B^2$  représentant l'aire du cycle à un coefficient près). Pour limiter ces pertes il faut travailler avec un matériau ferromagnétique le plus doux possible.

Pourquoi l'aire du cycle d'hystérésis dans le plan  $\{H, B\}$  correspond-elle aux pertes liées à l'aimantation du milieu ? Plaçons-nous dans une situation où un matériau ferromagnétique de forme torique et de section  $\Sigma$  est excité par une bobine de  $N$  spires parcourue par un courant  $i$ , de résistance  $R$  et alimentée par un générateur de tension idéal  $E$ . L'aimantation du matériau produit une force contre-électromotrice importante  $e = -d\phi/dt$ , qui conduit à l'équation électrique suivante :

$$E = Ri + \frac{d\phi}{dt} \quad (4.16)$$

et fait travailler le générateur. En effet, le bilan énergétique donne :

$$Ei = Ri^2 + i \frac{d\phi}{dt} \quad (4.17)$$

d'où un travail lié à l'induction :

$$\delta\mathcal{W} = id\phi \quad (4.18)$$

identique à ce que l'on avait déjà établi pour les forces de Laplace (équation 1.39). Rapidement, le théorème d'Ampère sur un circuit fermé de longueur  $L$  passant par la bobine donne  $HL = Ni$ . Or  $\phi = NB\Sigma$  donc :

$$\delta\mathcal{W} = \mathcal{V}HdB \quad (4.19)$$

avec  $\mathcal{V}$  le volume du matériau. Ainsi, sur une période de fonctionnement, le travail lié à l'aimantation et à la force contre-électromotrice est :

$$\mathcal{W} = \mathcal{V} \oint_{\text{cycle}} H dB \quad (4.20)$$

et correspond bien à l'aire du cycle d'hystérésis dans le plan  $\{H, B\}$ .

**Pertes par courants de Foucault :** si on fait évoluer  $H$  périodiquement à une fréquence élevée dans un matériau ferromagnétique donné, on observe un cycle d'hystérésis d'aire plus importante que celui relevé pour des évolutions lentes. L'aire du cycle augmente donc avec la fréquence. La différence avec le cycle relevé en évolution quasi-statique représente l'effet des pertes dues à l'apparition de courants de Foucault.

Les pertes par courants de Foucault sont liées à l'apparition de boucles de courants macroscopiques dans le matériau qui dissipent de l'énergie par effet Joule. Ces pertes se rajoutent aux pertes par hystérésis déjà évoquées. Pour mémoire, dans un conducteur soumis à un champ magnétique variable, on montre que les pertes par courants de Foucault sont proportionnelles à  $B^2 f^2$  (voir TD2 Électromagnétisme).

On modélise souvent la puissance dissipée par ces pertes par :

$$P_{\text{Foucault}} \propto B^2 f^2 \quad (4.21)$$

La solution pour diminuer ces pertes est de feuilletter le matériau afin de limiter l'amplitude des boucles de courant (voir TD2 Électromagnétisme).

## 4.2 Modélisation d'un transformateur électrique

### 4.2.1 Structure d'un transformateur électrique

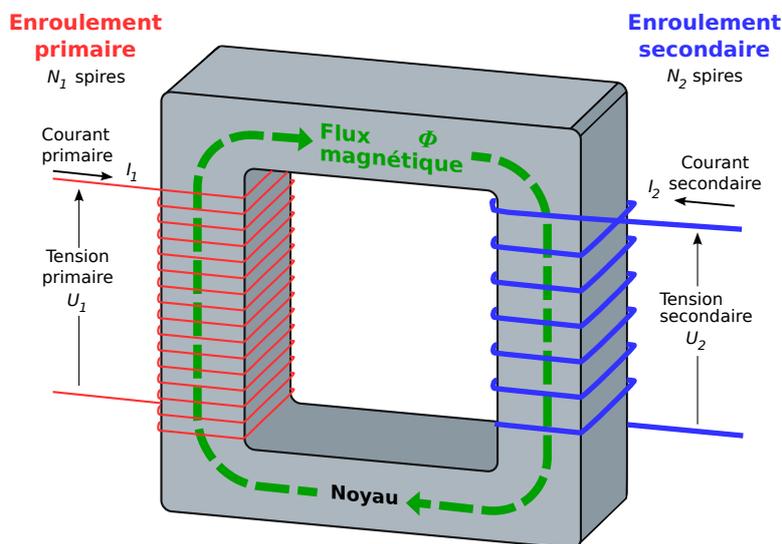


FIGURE 30 – Schéma de principe du transformateur monophasé (*Source : adapté de Wikipedia*).

Un transformateur électrique monophasé est constitué d'un circuit magnétique fermé (réalisé avec des tôles isolées) sur lequel on monte deux enroulements concentriques (afin

que le couplage soit le meilleur possible). Le premier enroulement (celui qui reçoit la tension électrique à transformer) est appelé primaire alors que le second, aux bornes duquel on récupère le fruit de la transformation est appelé secondaire. Le transformateur est représenté schématiquement figure 30.

On suppose que l'enroulement au primaire est constitué de  $n_1$  spires soumises à une tension  $u_1$  et un courant  $i_1$ . L'enroulement au secondaire est constitué de  $n_2$  spires (avec  $n_2$  pouvant être différente de  $n_1$ ), parcourus par un courant  $i_2$  sous une tension  $u_2$ . Les conventions d'orientation sont données par le schéma 30.

On oriente le circuit magnétique de façon arbitraire, mais ce choix impose l'orientation commune de toutes les sections du tore. Les spires bobinées sont ainsi également orientées. Or on a deux façons d'enrouler un fil autour d'un tore (par dessus et par dessous). Sur un schéma électrique équivalent on désigne par un point noir les bornes qui ont les mêmes polarités en tension (voir figure 31).

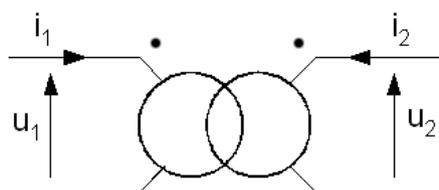


FIGURE 31 – Schéma électrique équivalent du transformateur parfait d'après la figure 30.

#### 4.2.2 Équations de fonctionnement

Nous considérerons dans un premier temps que :

- le noyau est de perméabilité  $\mu_r$ , supposé linéaire, homogène et isotrope (milieu LHI),
- l'enroulement en cuivre est supposé parfaitement conducteur (*i.e.* pas de pertes par effet Joule),
- le noyau magnétique est torique et sans fuites magnétiques (les lignes de champ sont assimilables à des cercles concentriques). De plus, on suppose que le diamètre de la section ( $\Sigma$ ) du tore est très inférieure au rayon  $R$  de ce dernier, de façon à considérer les champs uniformes sur une section.

On néglige les pertes de flux. Soit  $\phi_1$  (resp.  $\phi_2$ ) le flux magnétique à travers une section du primaire (resp. secondaire). On note  $\phi_{C_i} = n_i \phi_i$  le flux magnétique à travers le circuit  $C_i$  (il faut tenir compte du nombre de tours du bobinage). La loi de Faraday donne  $e_i$  la f.e.m. induite dans le bobinage  $i$  selon :

$$e_i = -\frac{d\phi_{C_i}}{dt} \quad (4.22)$$

Avec les conventions utilisées, on a  $u_i = -e_i$  la tension aux bornes du primaire/secondaire<sup>15</sup>. Par conservation du flux le long du tore,  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$  soit :

$$u_1 = n_1 \frac{d\phi}{dt} = \frac{n_1}{n_2} n_2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{n_1}{n_2} u_2 \quad (4.23)$$

15. On rappelle que la f.e.m. est orientée dans le même sens que la convention de courant qui sert au calcul.

**Propriété 4.1.** On définit  $m = n_2/n_1$  le rapport de transformation. Pour un transformateur électrique sans perte de flux on a :

$$u_2 = mu_1 \quad (4.24)$$

On considère le contour  $\mathcal{C}$  formé par le cercle de centre coïncidant avec celui du tore, et de rayon le rayon moyen du tour, orienté dans le sens horaire (chemin en pointillés gras sur la figure 30). Par hypothèse de l'énoncé,  $\vec{H}$  est homogène dans le noyau de fer. En appliquant le théorème d'Ampère sur ce contour, on obtient <sup>16</sup> :

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H\ell = n_1 i_1 + n_2 i_2 \quad (4.25)$$

or  $\ell = 2\pi R$ , soit :

$$H = \frac{n_1 i_1 + n_2 i_2}{2\pi R} \quad (4.26)$$

Désormais, on note  $\phi_H = H\Sigma$ . Attention, le flux  $\phi$  est un flux de champ magnétique alors que  $\phi_H$  est un flux de  $\vec{H}$ . On a  $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$  donc  $\phi = \mu_0\mu_r\phi_H$ , d'où le résultat

$$\phi = \frac{n_1 i_1 + n_2 i_2}{2\pi R} \mu_0\mu_r\Sigma \quad (4.27)$$

D'après la loi de Faraday établie précédemment, on a :

$$u_1 = n_1 \frac{d\phi_0}{dt} = \frac{\mu_0\mu_r\Sigma}{2\pi R} \left( n_1^2 \frac{di_1}{dt} + n_1 n_2 \frac{di_2}{dt} \right) \quad (4.28)$$

On obtient un résultat équivalent pour la tension  $u_2$ . En introduisant la *réductance*  $\mathcal{R}$  définie selon :

$$\mathcal{R} = \frac{2\pi R}{\mu_0\mu_r\Sigma} \quad (4.29)$$

### Notion de réductance

Le résultat précédent peut être généralisé à  $N$  circuits. On définit :

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = B\Sigma \quad (4.30)$$

et  $B = \mu_0\mu_r H$ , avec  $\mu_r \sim 100 \rightarrow 10^6$  typiquement. Le théorème d'Ampère appliqué aux  $N$  circuits  $\{i\}$  donne :

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N n_i I_i \quad (4.31)$$

En électronique, on a les relations suivantes :

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{et} \quad \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N e_i \quad (4.32)$$

16. On rappelle que le point noir du schéma électrique définit le sens d'orientation positif du courant rentrant pour le théorème d'Ampère.

ce qui donne les relations suivantes :

$$\int \vec{j} \cdot \frac{d\vec{l}}{\sigma} = \sum_{i=1}^N e_i \Rightarrow \sum_{i=1}^N e_i = I \left( \int \frac{dl}{\sigma \Sigma} \right) = RI \quad (4.33)$$

Par analogie, dans un circuit magnétique, on a :

$$\int \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N n_i I_i \Rightarrow \phi \left( \int \frac{dl}{\mu \Sigma} \right) = \sum_{i=1}^N n_i I_i \quad (4.34)$$

et on définit, par analogie avec la résistance en électronique, la *réductance*, une caractéristique de la géométrie et des matériaux utilisés selon :

$$\mathcal{R} = \int \frac{dl}{\mu \Sigma} \quad (4.35)$$

Le flux magnétique est l'analogie du courant électrique et  $\sum_i N_i I_i$  de la tension électrique. On a un analogue de la loi d'Ohm :

$$\sum_{i=1}^N n_i = \mathcal{R} \phi \quad (4.36)$$

Si différents milieux ou différentes géométries sont rencontrés le long d'une boucle de champ magnétique, alors les réductances peuvent être combinées en série ou en parallèle telles les résistances électriques.

on obtient :

$$u_1 = \frac{n_1^2}{\mathcal{R}} \frac{di_1}{dt} + \frac{n_1 n_2}{\mathcal{R}} \frac{di_2}{dt} \quad (4.37)$$

$$u_2 = \frac{n_2 n_1}{\mathcal{R}} \frac{di_1}{dt} + \frac{n_2^2}{\mathcal{R}} \frac{di_2}{dt} \quad (4.38)$$

Le terme croisé en  $n_1 n_2 / \mathcal{R}$  traduit le couplage entre les deux circuits. La réductance ne dépend que de la géométrie et de la caractéristique du matériau constitutif du tore.

On a un couplage de la forme :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathcal{M} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

avec :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} \\ M_{21} & L_2 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

où  $M_{12} = M_{21}$  est l'*inductance mutuelle* entre les deux circuits, et  $L$  est l'inductance propre. Dans ce cas, on montre avec les équations (4.37) que :

$$\boxed{\det \mathcal{M} = 0 = L_1 L_2 - M_{12}^2} \quad (4.41)$$

égalité caractéristique d'une influence totale entre les deux circuits, ce qui est logique compte tenu des hypothèses de l'énoncé (pas de pertes de flux).

### 4.2.3 Modèle du transformateur parfait

Dans le modèle du transformateur parfait, on considère que  $\mu_r$  est infini mais que  $\phi$  reste fini. Alors nécessairement l'équation (4.27) ne sera valable que si  $(n_1 i_1 + n_2 i_2) \rightarrow 0$ . On a alors la relation suivante de transformation des courants :

$$-\frac{i_2}{i_1} = \frac{1}{m}. \quad (4.42)$$

**Propriété 4.2.** Dans le modèle du transformateur parfait, on a :

$$i_2 = \pm \frac{i_1}{m} \quad (4.43)$$

le signe dépendant de la convention choisie.

La puissance instantanée dans le primaire est  $\mathcal{P}_1 = u_1 i_1$  et dans le secondaire  $\mathcal{P}_2 = u_2 i_2 = (u_2/m)(m i_2) = -u_1 i_1 = -\mathcal{P}_1$ . Donc le rendement est de 100% ( $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = 0$  avec les conventions de signes choisies). C'est logique, puisque tous les phénomènes dissipatifs et les pertes de flux ont été négligés.

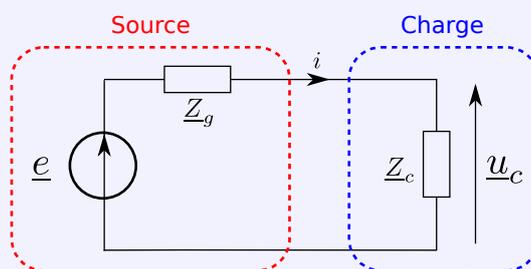
Si une impédance  $Z_2$  est connectée au circuit secondaire, on a alors  $u_2 = -Z_2 i_2$ . Or  $u_1 = u_2/m = -Z_2 i_2/m = Z_2 i_1/m^2$ . Donc, vu du primaire, on a une impédance équivalente  $Z'_2 = u_1/i_1$  soit :

$$Z'_2 = \frac{Z_2}{m^2} \quad (4.44)$$

Cette propriété a d'importantes applications aux problèmes d'adaptation d'impédance (lignes HT, etc...). Par exemple, pour une charge résistive, la puissance transférée à la charge sera maximale quand cette dernière vaut la valeur de la résistance interne du générateur  $r$ . Ainsi, en tenant compte du rapport de transformation, une adaptation d'impédance optimale sera réalisée si  $m$  est telle que :

$$\frac{R}{m^2} = r \quad (4.45)$$

#### Notion d'adaptation d'impédance



En électronique, l'adaptation d'impédance consiste à trouver la bonne combinaison d'impédances entre une impédance de charge  $Z_c$  et une source de tension réelle  $\{e, Z_g\}$  afin de maximiser soit le rendement du montage, soit la puissance fournie à l'impédance de charge. Cependant, en général on n'a pas la main sur l'impédance de la source de tension  $Z_g$ . Si on se réfère à la figure ci-dessus, le rapport des tensions

est égale à :

$$\frac{u_c}{e} = \frac{Z_c}{Z_g + Z_c} \quad (4.46)$$

Après décomposition des impédances complexes en résistance  $R$  et réactance  $X$ , on en déduit la puissance consommée par la charge  $P_c$  et le rendement  $\eta$  :

$$P_c = Z_c i i^* = Z_c \frac{e}{Z_c + Z_g} \frac{e^*}{Z_c^* + Z_g^*} = e^2 \frac{R_c + jX_c}{(R_c + R_g)^2 + (X_c + X_g)^2} \quad (4.47)$$

$$P_c = \Re(P_c) = e^2 \frac{R_c}{(R_c + R_g)^2 + (X_c + X_g)^2}; \quad \eta = \frac{P_c}{P_{\text{tot}}} = \frac{R_c}{R_g + R_c} \quad (4.48)$$

Selon les ordres de grandeur relatifs des impédances, différents cas sont possibles :

	$\eta$	$P_c$
$ Z_c  \gg  Z_g $	100%	$\rightarrow 0$
$Z_c \approx Z_g^*$	50%	$P_c^{\text{max}} = e^2/4R_c$
$ Z_c  \ll  Z_g $	0%	$\rightarrow 0$

Le maximum de puissance transmise à la charge est donc atteint si  $Z_c \approx Z_g^*$ . Comme souvent on n'a pas la main sur l'impédance interne du générateur, éventuellement l'accordement des deux impédances peut-être réalisé par la mise en place d'un transformateur de rapport de transformation  $m$  entre la source et la charge de telle sorte que  $Z_c/m^2 \approx Z_g^*$ .

### 4.3 Le transformateur réel

Les différentes sources de pertes dans le transformateur réel peuvent être modélisées électriquement par des dipôles associés au circuit du transformateur parfait. Le circuit électrique équivalent au transformateur réel est présenté figure 32.

#### 4.3.1 Courant magnétisant

Si le secondaire est ouvert, alors  $i_2 = 0$ . On obtient alors immédiatement le *courant magnétisant au primaire*  $i_1^{(0)}$  :

$$i_1^{(0)} = \frac{1}{n_1} \int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{2\pi RH}{n_1} = \frac{2\pi R\phi}{n_1 \mu_0 \mu_r \Sigma} \quad (4.49)$$

Ce courant est non nul si  $\mu - r$  est fini, ce qui signifie qu'un transformateur consomme du courant même si rien n'est branché derrière. Conséquence directe : un chargeur de portable laissé branché à une prise électrique consomme même si le téléphone n'est pas branché dessus. Les équations couplées (4.37) :

$$\begin{cases} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M i_2 \\ u_2 &= M i_1 + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (4.50)$$

deviennent, compte tenu que  $i_2 = 0$  :

$$\begin{cases} u_1^{(0)} &= L_1 \frac{di_1^{(0)}}{dt} \\ u_2 &= M i_1^{(0)} \end{cases} \quad (4.51)$$

Le schéma équivalent du transformateur à secondaire ouvert est donc une inductance  $L_1$ .

### 4.3.2 Pertes dans les bobinages

Les autres sources de pertes proviennent des résistances des bobinages, que l'on peut modéliser par une résistance en série  $r_1$  au primaire, et une résistance  $r_2$  au secondaire. De plus, les lois d'influences totales ne sont pas vérifiées en général : il y a des fuites de flux magnétique. Ces dernières peuvent être modélisées par des bobines supplémentaires en série captant le flux perdu, d'inductance  $L_{fi}$ . On a alors les lois de Faraday au primaire et au secondaire :

$$e_1 = -n_1 \frac{d\phi}{dt} + L_{f1} \frac{di_1}{dt} \quad (4.52)$$

$$e_2 = -n_2 \frac{d\phi}{dt} + L_{f2} \frac{di_2}{dt} \quad (4.53)$$

Remarque : pour minimiser les pertes de flux, en pratique, les deux bobinages sont réalisés l'un sur l'autre.

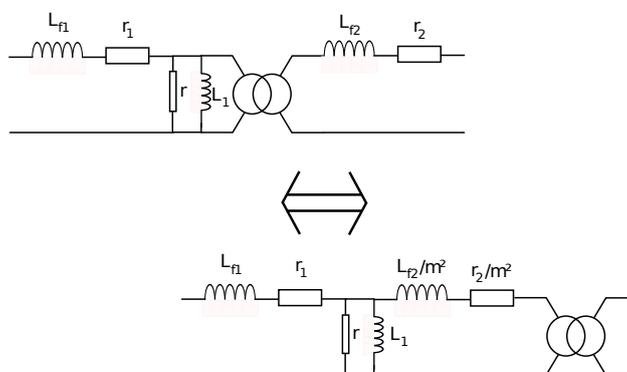


FIGURE 32 – Modélisation du transformateur réel et impédance équivalente au primaire.

### 4.3.3 Non-linéarités du noyau ferromagnétique

Un milieu ferromagnétique va pouvoir être modélisé par un milieu linéaire si  $H \ll H_c$  où  $H_c$  est l'excitation coercitive du ferromagnétique. Au-delà de cette approximation linéaire, le cycle d'hystérésis dans le milieu introduit des pertes énergétiques (orientation des domaines de Weiss, voir leçon sur le ferromagnétisme et BFR IV). Pour les minimiser, des matériaux doux sont employés. Il y a également des pertes par courants de Foucault, minimisées en utilisant des matériaux feuilletés et des ferrites (isolantes). Ces deux pertes sont grossièrement modélisables par une résistance  $r$  en parallèle.

## 4.4 Quelques compléments

### 4.4.1 Quand peut-on négliger les résistances des bobinages ?

On travaille à la pulsation  $\omega$ . Il faut donc que  $L\omega \gg r_1$ . Or  $r_1$  provient du bobinage et donc :

$$r_1 \sim \frac{\ell}{\sigma \Sigma} = \frac{\ell_0 n_1}{\sigma \Sigma} \sim (10^{-3} \Omega) \cdot n_1, \quad (4.54)$$

et, à partir de l'équation (4.37), on a à 50 Hz :

$$L\omega \sim (3 \cdot 10^{-2}\Omega)n_1^2. \quad (4.55)$$

Donc  $L \propto n_1^2$  et  $r_1 \propto n_1$ . Si les bobines sont bien conçues, la partie inductive domine.

Remarque : comme  $L \propto n^2$ , l'impédance augmente quadratiquement avec  $n$ . Ainsi, pour saturer le fer d'un transformateur en TP, il peut être préférable de diminuer le nombre de tours au primaire, contrairement à l'intuition (voir TP milieux magnétiques). En effet, on a :

$$H_1 \propto n_1 I_1 \quad (4.56)$$

et :

$$I_1 = \frac{u_1}{L_1} = \frac{\mathcal{R}u_1}{n_1^2} \quad (4.57)$$

donc :

$$\boxed{H_1 \propto \frac{1}{n_1}} \quad (4.58)$$

#### 4.4.2 Quand est-ce que l'approximation de perméabilité infinie est valable ?

On a :

$$\phi = \frac{n_1 i_1 + n_2 i_2}{\mathcal{R}}, \quad u_1 = n_1 \frac{d\phi}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = n_2 \frac{d\phi}{dt} \quad (4.59)$$

Si  $u_1$  est fixé (tension du secteur au primaire par exemple) alors le flux  $\phi$  est fixé. Quand le secondaire est ouvert,  $i_2 = 0$  et  $\phi = n_1 i_1^{(0)} / \mathcal{R}$ . Donc, comme le flux est constant et fixé par  $u_1$ , indépendamment du secondaire, on a :

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = n_1 i_1^{(0)} \quad (4.60)$$

d'où le courant  $i_2$  dans le cas général :

$$\boxed{i_2 = -\frac{n_1}{n_2} (i_1 - i_1^{(0)})} \quad (4.61)$$

Peut-on négliger le courant magnétisant  $i_1^{(0)}$  ? On a :

$$i_1^{(0)} \approx \frac{u_1}{jL_1\omega} \longrightarrow |i_1^{(0)}| = \frac{|u_1|\mathcal{R}}{n_1^2\omega} \quad (4.62)$$

Au final, on obtient la loi d'échelle suivante :

$$\boxed{|i_1^{(0)}| \propto \frac{1}{\mu_r n_1^2}} \quad (4.63)$$

En pratique,  $\mu$  et  $n_1$  sont grands pour avoir de petits courants de magnétisation  $i_1^{(0)}$ .

#### 4.4.3 Influence de la non-linéarité du noyau

Si on tient compte de la non linéarité du noyau, alors si  $u_1$  la tension au primaire est sinusoïdale,  $u_2$  l'est forcément car est lié au flux de champ magnétique  $\vec{B}$ . Donc  $i_2$  est sinusoïdale si la charge au secondaire est linéaire. La non-linéarité va donc se répercuter uniquement sur le courant au primaire  $i_1$ .

*Il y a donc une distorsion du courant au primaire, importante proche de la saturation.*

## A Bibliographie

1. *Machines électriques*, Niard, AG PhF2 NIA
2. *Machines électriques*, Chatelain, AG PhF2 CHA
3. *Génie électrotechnique*, Mérat, AG PhF2 MER
4. *Physique tout-en-un PSI-PSI\* - nouveau programme*, Dunod, AG PhA1 DUN 2014
5. *Physique tout-en-un PSI-PSI\* - ancien programme*, Dunod, AG PhA1 DUN
6. *Tout-en-un Physique PSI-PT - nouveau programme*, Les nouveaux précis, AG PhA1 BRE
7. *Électronique 2e année PSI-PSI\* - ancien programme*, HPrépa, AG PhA1 BRE
8. *Ondes 2e année*, HPrépa, AG PhA1 BRE
9. *Électromagnétisme*, Mauras, AG PhA1 MAU

## B Petit interlude technique : puissance (très facultatif)

### B.1 Puissance active

La puissance moyenne consommée en régime sinusoïdale par un dipôle d'impédance  $Z = Ze^{i\varphi}$  porte le nom de *puissance active*. Elle a pour expression :

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi = \frac{U_{\text{max}} I_{\text{max}}}{2} \cos \varphi, \quad (\text{B.1})$$

où  $X_{\text{eff}}$  est la valeur efficace de la grandeur  $X$ .

### B.2 Puissance réactive et apparente

Le théorème de Boucherot permet, en régime sinusoïdal de tension et de courant, de calculer la puissance totale consommée par une installation électrique comportant plusieurs dipôles de facteurs de puissance divers, ainsi que le courant total appelé dans cette installation. Cette méthode permet de faire des calculs selon un formalisme de type vectoriel sans utiliser la représentation de Fresnel plus lourde lorsque l'on est en présence de nombreux dipôles.

Pour appliquer cette méthode, il est nécessaire de créer deux intermédiaires de calcul qui n'ont pas véritablement de sens physique. La puissance apparente notée  $S$  est égale au produit des valeurs efficaces :

$$S \stackrel{\text{déf.}}{=} U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}, \quad (\text{B.2})$$

en Volt Ampère ou VA.

*C'est en général cette puissance qui est indiquée sur la carcasse des moteurs comme puissance maximale admissible et a fortiori exprimée en VA.*

La puissance apparente est utilisée pour quantifier la capacité de puissance d'un transformateur. Par exemple, un transformateur qui peut délivrer 1000 A sous 220 V sera appelé un transfo de 220 kVA. Il se peut que ce transfo débite 220 kW... si le  $\cos \varphi$  de l'installation qui y est branchée vaut 1 (si l'installation est globalement purement résistive). Mais si l'installation présente un facteur de puissance de 0.8, la puissance développée par le transfo sera de  $220 \times 1000 \times 0.8 = 176$  kW. Le fournisseur ne peut présager des caractéristiques de l'installation de son client : il annoncera donc un transfo de 220 kVA.

La puissance réactive notée  $Q$ , est telle que :

$$Q \stackrel{\text{déf.}}{=} U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \varphi, \quad (\text{B.3})$$

en Volt Ampère Réactif ou var. Les dipôles ayant une impédance dont la valeur est un nombre imaginaire pur (capacité ou inductance) ont une puissance active nulle et une puissance réactive égale en valeur absolue à leur puissance apparente. En moyenne, une inductance pure (un bobinage de moteur) ou un condensateur pur ne consomment donc rien au réseau, ils ne font pas tourner le disque du compteur. Et pourtant, ils appellent du courant !

*Les unités sont différentes des watts alors qu'elles sont homogènes à une puissance afin de respecter le principe physique qui autorise d'additionner des grandeurs de mêmes unités. En effet additionner des puissances actives avec des puissances réactives ou apparentes n'a aucun sens physique car ce sont les projections réelles et imaginaires de la puissance complexe défini ci-après.*

Les trois puissances sont liées par la relation :

$$S^2 = P^2 + Q^2. \quad (\text{B.4})$$

Soit un dipôle dont l'impédance complexe s'écrit :

$$\underline{Z} = R + jX. \quad (\text{B.5})$$

On a alors :

$$P = RI^2, \quad Q = XI^2 \quad S = |\underline{Z}| I^2. \quad (\text{B.6})$$

La puissance réactive apparaît dans tout système ayant des composants réactifs (c'est-à-dire capacitifs ou inductifs). Elle peut être soit "produite" (circuit capacitif) soit "consommée" (circuit inductif) par les différents éléments des circuits. Même si elle est imaginaire, la puissance réactive a une signification physique réelle et sa valeur est essentielle au dimensionnement et à la stabilité des réseaux électriques (les lignes électriques étant elles-mêmes inductives).

Alors que la puissance active est utilisée pour générer un travail (par exemple celui d'un moteur) ou de la chaleur, la puissance réactive correspond, lorsqu'elle est "consommée", par exemple à l'établissement du champ magnétique dans les machines électriques (transformateurs, machine asynchrone, etc.).

### B.3 Puissance complexe

La puissance complexe est un outil mathématique de traitement des puissances électriques à l'aide de la transformation complexe :

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*, \quad (\text{B.7})$$

et :

$$\underline{S} = P + jQ, \quad (\text{B.8})$$

où  $P$  est la puissance active et  $Q$  la puissance réactive.

## B.4 Puissances en régime sinusoïdal de tension et en régime non sinusoïdal de courant

Ce cas est très important : la distribution de l'électricité se fait en régime sinusoïdal de tension à la fréquence  $\omega$ , mais une grande quantité des récepteurs utilisés par les particuliers ou les industriels appellent des courants non-sinusoïdaux du fait des convertisseurs de l'électronique de puissance qui sont utilisés pour les alimenter, et éventuellement des noyaux ferromagnétiques dans le cas des moteurs, génératrices et transformateurs.

Dans l'expression générale de la puissance instantanée :

$$\mathcal{P}(t) = u(t)i(t) \quad (\text{B.9})$$

on substitue la décomposition en séries de Fourier de l'intensité, la tension étant supposée sinusoïdale, ne contenant qu'un seul harmonique de valeur efficace  $U_{\text{eff}}$ . On a alors

$$i(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (\text{B.10})$$

avec  $I_{\text{eff}} = I_1/\sqrt{2}$ . La puissance active est alors la valeurs moyenne de la puissance instantanée : seul les produits de termes de même fréquence ont une valeur moyenne non nulle. La puissance active est donc

$$P = \langle \mathcal{P}(t) \rangle = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \quad (\text{B.11})$$

Ainsi, seul le premier harmonique (le fondamental) transporte la puissance active.

## B.5 Complément à caractère documentaire (complètement facultatif)

*Cette section n'est que documentaire, pour toute personne cherchant à savoir pourquoi diable les puissances apparente et réactive sont introduites en électrotechnique.*

### B.5.1 Théorème de Boucherot

La méthode de Boucherot permet, en régime sinusoïdal, de calculer la puissance totale consommée par une installation électrique comportant plusieurs dipôles électriques de facteur de puissance divers, ainsi que l'intensité totale appelée.

Lors de l'étude d'une installation électrique, on considère les quantités suivantes :

- la puissance totale consommée, *i.e.* le coût,
- l'intensité nécessaire, et donc la calibration des câbles, disjoncteurs,...
- le choix de condensateurs pour limiter la puissance réactive, et limiter les pertes de la ligne d'alimentation (imposé par EDF).

En pratique, pour chaque dipôle  $i$ , on calcul la puissance active  $P_i$  et  $Q_i$ , et on obtient la consommation totale par le théorème de Boucherot.

**Théorème B.1.** *Si un circuit contient  $n$  composants absorbant chacun une puissance active  $P_i$  et une puissance réactive  $Q_i$  alors les puissances totales du circuit vérifient :*

$$P_T = \sum_i P_i \quad \text{et} \quad Q_T = \sum_i Q_i. \quad (\text{B.12})$$

On en déduit  $S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$  et donc l'intensité totale :

$$I_T = \frac{S_T}{U}. \quad (\text{B.13})$$

En France, pour les installations alimentées en haute tension, la partie réactive  $Q$  est gratuite tant qu'elle est inférieure<sup>17</sup> à  $0.4P_T$ . L'excédent est facturé pendant les heures pleines en hiver. En pratique, on rajoute des condensateurs pour diminuer la puissance réactive.

### B.5.2 Cas d'une réponse non linéaire

Dans le cas d'un courant à plusieurs composantes spectrales (équation (B.10)), la puissance active est alors :

$$P = U_{\text{eff}} \frac{I_1}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1. \quad (\text{B.14})$$

La puissance apparente  $S$  peut s'écrire alors :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} \quad (\text{B.15})$$

où

$$Q = U_{\text{eff}} \frac{I_1}{\sqrt{2}} \sin \varphi_1. \quad (\text{B.16})$$

est la puissance réactive et :

$$D = \sqrt{\frac{U_{\text{eff}}^2}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} I_n^2} = \sqrt{\frac{U_{\text{eff}}^2}{2} I_h^2}, \quad (\text{B.17})$$

est appelée *puissance déformante*, avec :

$$I_h = \sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} I_n^2}, \quad (\text{B.18})$$

qui est la valeur efficace du courant de l'ensemble des harmoniques supérieures à 1.

## C Autres moteurs

### C.1 Le moteur universel

Il s'agit d'un moteur continu à excitation série, utilisé en alternatif<sup>18</sup>. Les courants d'induit et d'inducteur changeant de signe simultanément, le couple reste de signe constant. Il suffit alors de feuilleter les composants du circuit magnétique pour limiter les pertes par courants de Foucault. Son grand couple à faible vitesse, pour une puissance moyenne restant limitée, en fait un composant d'usage très répandu : tous les appareils électroménagers et outillages de faible puissance sont fondés sur de tels moteurs.

17. Décret n°2002-1014 du 19 juillet 2002, fixant les tarifs d'utilisation des réseaux publics de transport et de distribution d'électricité.

18. <https://www.youtube.com/watch?v=OPDRJKz-mqE>

## C.2 Le moteur pas à pas

Il peut être vu comme un moteur alternatif fonctionnant en continu<sup>19</sup>. Son rotor est généralement un aimant permanent, le stator étant un stator multipolaire dont les différents pôles sont alimentés de façon indépendante : le champ tournant est alors réalisé en commutant convenablement les courants continus qui les alimentent. Pour chaque état de ces courants, le rotor s'immobilise dans la direction définie par le champ magnétique, ce qui permet un repérage exact de l'angle de rotation.

## D Programme de PSI sur la conversion de puissance

---

19. <https://www.youtube.com/watch?v=eyqwLiowZiU>

Pertes d'une bobine réelle à noyau.	Exprimer le lien entre l'aire du cycle hystérésis et la puissance moyenne absorbée. Décrire les différents termes de perte d'une bobine à noyau : pertes fer par courants de Foucault et par hystérésis, pertes cuivre.
-------------------------------------	---

## CONVERSION DE PUISSANCE

### Présentation

En première année, la conversion de puissance est abordée à l'occasion du transformateur de tension et du moteur à courant continu dans la partie « induction et forces de Laplace ». Il s'agit ici d'approfondir cette étude en donnant le moyen d'aborder tous les éléments d'une chaîne énergétique faisant intervenir des éléments électriques, magnétiques et mécaniques.

Afin de pouvoir aborder des problématiques industrielles de forte puissance, le rôle essentiel du fer est considéré. Ainsi, les forces électromagnétiques ne se réduisent pas aux seules forces de Laplace s'exerçant sur les conducteurs traversés par des courants, l'aimantation du milieu participe de manière prépondérante au calcul des actions. De même, la prise en compte de la forte perméabilité du noyau d'un transformateur est indispensable afin d'établir une relation entre les intensités indépendante de la charge. Par ailleurs, on étudie la conversion électronique de puissance permettant d'adapter les différentes sources d'énergie à leur utilisation.

Cet enseignement est une initiation dont l'objectif est d'expliquer les principes physiques mis en œuvre dans des réalisations concrètes, il ne s'agit pas de multiplier les exemples de solutions techniques. En particulier, les dispositifs en triphasé ne sont pas étudiés.

### Objectifs de formation

- Réaliser des bilans d'énergie.
- Appliquer l'électromagnétisme à des problématiques industrielles.
- Élaborer des modèles, analyser des limitations et des défauts.
- Associer divers éléments (sources, convertisseurs) afin de concevoir une chaîne énergétique complète.

Le bloc 1 présente quelques résultats généraux relatifs à la puissance électrique en régime sinusoïdal. La représentation de Fresnel, abordée en première année, est utilisée pour illustrer le facteur de puissance. La notion de puissance réactive est hors programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>1. Puissance électrique en régime sinusoïdal</b>	
Puissance moyenne, facteur de puissance.	Définir le facteur de puissance, faire le lien avec la représentation des tensions et des courants sur un diagramme de Fresnel. Citer et exploiter la relation $P = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi$ .
Puissance moyenne absorbée par une impédance.	Citer et exploiter les relations $P = \Re_e(Z) I_{eff}^2 = \Re_e(Y) U_{eff}^2$ . Justifier qu'un dipôle purement réactif n'absorbe aucune puissance en moyenne.

Le bloc 2 complète le modèle du transformateur de tension vu en première année. On ajoute ici le rôle d'un noyau de fer doux de forte perméabilité permettant d'obtenir un transformateur de courant. Les pertes et les défauts sont évoqués mais ne sont pas modélisés. En particulier, l'inductance magnétisante est hors programme. On explique l'intérêt du transformateur pour l'isolement et le transport de l'énergie électrique sur de longues distances.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>2. Transformateur</b>	
Modèle du transformateur idéal.	Citer les hypothèses du transformateur idéal. Établir les lois de transformation des tensions et des courants du transformateur idéal, en respectant l'algébrisation associée aux bornes homologues.  Relier le transfert instantané et parfait de puissance à une absence de pertes et à un stockage nul de l'énergie électromagnétique.
Pertes.	Citer les pertes cuivre, les pertes fer par courant de Foucault et par hystérésis. Décrire des solutions permettant de réduire ces pertes.
Applications du transformateur.	Expliquer le rôle du transformateur pour l'isolement.  Établir le transfert d'impédance entre le primaire et le secondaire.  Expliquer l'intérêt du transport de l'énergie électrique à haute tension afin de réduire les pertes en ligne. Expliquer l'avantage d'un facteur de puissance élevé.  <b>Mettre en œuvre un transformateur et étudier son rendement sur charge résistive.</b>

Le bloc 3 est consacré à la conversion électro-magnéto-mécanique de puissance. Afin d'étudier ces systèmes en prenant en compte le rôle du fer, on privilégie un calcul des actions électromagnétiques en dérivant l'énergie magnétique stockée dans le système par rapport à un paramètre de position. Les milieux magnétiques sont modélisés par des milieux linéaires. La notion de coénergie est hors programme.

Dans une première partie, la méthode de calcul de la force s'exerçant sur une partie mobile de fer est illustrée sur un contacteur en translation faisant partie d'un circuit magnétique dont l'entrefer est variable. À l'aide d'un bilan énergétique, le professeur pourra justifier la relation  $F = (\partial E / \partial x)_i$  mais cette démonstration ne doit pas être considérée comme une capacité exigible.

On aborde ensuite le moteur synchrone en dérivant l'énergie magnétique localisée dans l'entrefer afin de déterminer le moment du couple électromagnétique. Les champs glissants statorique et rotorique sont radiaux dans l'entrefer et présentent des formes d'onde sinusoïdales. On montre que le moment moyen est non nul si les champs glissants sont synchrones. Le modèle électrique des phases de l'induit est abordé afin de décrire la conversion électromécanique de puissance, mais on n'étudiera pas l'utilisation d'une machine à vide comme compensateur synchrone.

Dans une troisième partie, on explique le fonctionnement du moteur à courant continu par analogie avec le moteur synchrone, en montrant que le collecteur réalise le synchronisme entre un champ statorique

stationnaire et un champ rotorique qui lui est orthogonal quelle que soit la position angulaire du rotor, produisant ainsi un moment maximal.

On évoque la réversibilité énergétique des machines électriques, en distinguant avec rigueur  $f_{em}$  et  $f_{cm}$ . La puissance mécanique des machines est reliée à la puissance électrique des forces électromotrices induites par des bilans énergétiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>3. Conversion électro-magnéto-mécanique</b>	
<b>3.1. Contacteur électromagnétique en translation</b>	
Énergie et force électromagnétique.	Exprimer l'énergie magnétique d'un enroulement enlaçant un circuit magnétique présentant un entrefer variable.  Calculer la force électromagnétique s'exerçant sur une partie mobile en translation en appliquant l'expression fournie $F = (\partial E / \partial x)_i$ .
Applications.	Sur l'exemple du relais, expliquer le fonctionnement d'un contacteur électromagnétique.
<b>3.2. Machine synchrone</b>	
Structure d'un moteur synchrone à pôles lisses et à excitation séparée.	Décrire la structure d'un moteur synchrone diphasé et bipolaire : rotor, stator, induit, inducteur.
Champ magnétique dans l'entrefer.	Pour une machine de perméabilité infinie à entrefer constant, exprimer le champ magnétique dans l'entrefer généré par une spire passant dans deux encoches opposées. Expliquer qualitativement comment obtenir un champ dont la dépendance angulaire est sinusoidale dans l'entrefer en associant plusieurs spires décalées.
Champ glissant statorique.	Justifier l'existence d'un champ glissant statorique lorsque les deux phases sont alimentées en quadrature.
Champ glissant rotorique.	Justifier l'existence d'un champ glissant rotorique associé à la rotation de l'inducteur.
Énergie et couple.	Exprimer l'énergie magnétique totale stockée dans l'entrefer en fonction de la position angulaire du rotor.  Calculer le moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor en exploitant l'expression fournie $\Gamma = \partial E / \partial \theta$ .
Condition de synchronisme.	Justifier la condition de synchronisme entre le champ statorique et le champ rotorique afin d'obtenir un moment moyen non nul.  Discuter qualitativement la stabilité du système en fonction du déphasage entre les deux champs glissants.  Identifier la difficulté du démarrage d'un moteur synchrone, décrire qualitativement le principe de l'autopilotage.

Modèle électrique de l'induit.	En admettant les expressions des coefficients d'inductance, établir les équations électriques vérifiées par les phases de l'induit et donner les représentations de Fresnel associées.  À l'aide d'un bilan énergétique où seules les pertes cuivre sont envisagées, justifier l'égalité entre la puissance électrique absorbée par les fcem et la puissance mécanique fournie.
Fonctionnement réversible.	Décrire les conditions d'utilisation de la machine synchrone en alternateur.
Applications.	Citer des exemples d'application de la machine synchrone.
<b>3.3. Machine à courant continu</b>	
Structure d'un moteur à courant continu à pôles lisses.	Décrire la structure d'un moteur à courant continu bipolaire à excitation séparée : rotor, stator, induit, inducteur.
Collecteur.	Par analogie avec le moteur synchrone, expliquer que le collecteur établit le synchronisme entre le champ statorique stationnaire et le champ rotorique quelle que soit la position angulaire du rotor.
Couple et fcem.	Citer l'expression du moment du couple $\Gamma = \Phi i$ , établir l'expression de la fcem induite $e = \Phi \Omega$ par un argument de conservation énergétique.  Décrire qualitativement les pertes existant dans une machine réelle : pertes cuivre, pertes fer, pertes mécaniques.  Établir les équations électrique et mécanique. Tracer la caractéristique $(\Omega, \Gamma)$ à tension d'induit constante. Analyser le démarrage d'un moteur entraînant une charge mécanique exerçant un moment $-f \cdot \Omega$ .  <b>Mettre en œuvre un moteur à courant continu.</b>
Fonctionnement réversible.	Décrire les conditions d'utilisation de la machine à courant continu en génératrice. Choisir des conventions d'orientation adaptées.
Applications.	Citer des exemples d'application de la machine à courant continu.

Le bloc 4 aborde la conversion électronique statique de puissance principalement sur l'exemple du hacheur série. Il ne s'agit pas de traiter un cours exhaustif sur les convertisseurs en multipliant les exemples de circuits, l'état d'esprit de cet enseignement doit permettre de réinvestir les capacités pour étudier modestement d'autres montages (redresseur, onduleur). On ne décrira pas le circuit de commande d'un transistor.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>4.4. Conversion électronique statique</b>	
Formes continue et alternative de la puissance électrique.	Citer des exemples illustrant la nécessité d'une conversion de puissance électrique.

Structure d'un convertisseur.	Décrire l'architecture générale d'un convertisseur électronique de puissance : générateur, récepteur, processeur de puissance utilisant des interrupteurs électroniques, commande des fonctions de commutation.
Fonction de commutation spontanée.	Décrire la caractéristique idéale courant-tension de la diode.
Fonction de commutation commandée.	Décrire la caractéristique idéale courant-tension du transistor.
Sources.	Définir les notions de sources de courant et de tension. Expliquer le rôle des condensateurs et des bobines comme éléments de stockage d'énergie assurant le lissage de la tension ou de l'intensité à haute fréquence.
Réversibilité.	Caractériser les sources par leur réversibilité en tension, en intensité, en puissance. Citer des exemples.
Interconnexion.	Citer les règles d'interconnexions entre les sources.
Cellule de commutation élémentaire.	Expliquer le fonctionnement d'une cellule élémentaire à deux interrupteurs assurant le transfert d'énergie entre une source de courant et une source de tension.
Hacheur.	<p>Tracer des chronogrammes, exploiter le fait que la moyenne d'une dérivée est nulle en régime périodique établi, calculer des moyennes de fonctions affines par morceaux, utiliser un bilan de puissance moyenne pour établir des relations entre les tensions et les intensités.</p> <p>Justifier le choix des fonctions de commutation pour un hacheur série assurant l'alimentation d'un moteur à courant continu à partir d'un générateur idéal de tension continue. Exprimer les valeurs moyennes des signaux. Calculer l'ondulation en intensité dans l'approximation d'un hachage haute fréquence réalisant une intensité affine par morceaux.</p>
Redressement double alternance réalisé avec un pont de diodes.	<p>Pour un générateur de tension sinusoïdal et une charge assimilable à une source continue de courant, décrire les différentes séquences de commutation des diodes.</p> <p><b>Mettre en œuvre un redressement double alternance.</b></p>
Onduleur.	Décrire la structure en pont à quatre interrupteurs et les séquences de commutation pour une fréquence de commutation fixe.