

Capillarité - Corrections TD Agrégation Physique

1 Forme d'une goutte sur une fil

1. L'aire d'une tranche de goutte s'exprime dans une telle géométrie selon $dS = 2\pi r ds$ où s est l'abscisse curviligne le long de la goutte. Le théorème de Pythagore nous donne alors : $ds^2 = dr^2 + dz^2 = dz^2(1 + r'^2)$ où $r' = \frac{dr}{dz}$. Dès lors, l'aire de la goutte s'écrit :

$$S = \int 2\pi r \sqrt{1 + r'^2} dz \quad (1)$$

De plus, le volume V de la goutte est imposé, égal à sa valeur initiale $V_0 = \frac{4\pi R^3}{3}$. Il s'exprime selon :

$$V = \int \pi (r^2(z) - b^2) dz \quad (2)$$

on approxime ds par dz car la variation de volume à cause de la courbure de la surface est d'ordre supérieur à ce que l'on regarde, donc négligeable.

2. La forme de la goutte peut donc être obtenue en minimisant sa surface sous la contrainte d'un volume constant, soit en minimisant la fonctionnelle :

$$F[r(z)] = \gamma S - \lambda V = \int [2\pi\gamma r \sqrt{1 + r'^2} - \lambda\pi(r^2 - b^2)] dz = \int f(r, r') dz \quad (3)$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte en volume¹. Donc :

$$f(r, r') = 2\pi\gamma r \sqrt{1 + r'^2} - \lambda\pi(r^2 - b^2)$$

On doit donc résoudre l'équation d'Euler-Lagrange associée :

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right) = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (4)$$

Soit :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dz} \left(\frac{2\pi\gamma r' r}{\sqrt{1 + r'^2}} \right) - 2\pi\gamma \sqrt{1 + r'^2} + 2\lambda\pi r \\ 0 &= 2\pi\gamma \frac{(r''r + r'^2)\sqrt{1 + r'^2} - r'r' \frac{r'r'''}{\sqrt{1 + r'^2}}}{1 + r'^2} - 2\pi\gamma \sqrt{1 + r'^2} + 2\lambda\pi r \\ 0 &= \gamma(r''r + r'^2) - \gamma \frac{rr'^2 r''}{1 + r'^2} - \gamma(1 + r'^2) + \lambda r \sqrt{1 + r'^2} \\ \lambda &= \frac{\gamma}{r\sqrt{1 + r'^2}} \left(\frac{rr'^2 r''}{1 + r'^2} + (1 + r'^2) - (r''r + r'^2) \right) \\ \lambda &= \frac{\gamma}{r\sqrt{1 + r'^2}} \left(1 + \frac{rr'^2 r''}{1 + r'^2} - r''r \right) \\ \lambda &= \frac{\gamma}{r\sqrt{1 + r'^2}} \frac{1 + r'^2 + rr'^2 r'' - rr''(1 + r'^2)}{1 + r'^2} \\ \lambda &= \frac{\gamma}{r\sqrt{1 + r'^2}} \frac{1 + r'^2 - rr''}{1 + r'^2} \end{aligned}$$

1. En toute rigueur il faudrait écrire $\lambda(V - V_0)$ mais V_0 ne dépendant pas de z disparaît par la suite.

Soit :

$$\lambda = \gamma \left[-\frac{r''}{(1+r')^{3/2}} + \frac{1}{r\sqrt{1+r'^2}} \right] \quad (5)$$

Cette équation détermine le multiplicateur de Lagrange. On peut également remarquer que cette équation peut s'interpréter comme la somme de deux courbures principales et que selon la loi de Laplace on a $\gamma(C_1 + C_2) = \lambda$. Ainsi le multiplicateur de Lagrange λ s'interprète comme la différence de pression entre la goutte et l'extérieur. Ceci n'est pas surprenant car en thermodynamique on définit la pression comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte volume.

3. Le Hamiltonien du système vaut alors :

$$H = r' \frac{\partial f}{\partial r'} - f$$

et doit être conservé par rapport à la variable z :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dH}{dz} &= \frac{dr'}{dz} \frac{\partial f}{\partial r'} + r' \frac{d}{dz} \frac{\partial f}{\partial r'} - \frac{df}{dz} \\ &= \frac{dr'}{dz} \frac{\partial f}{\partial r'} + r' \frac{d}{dz} \frac{\partial f}{\partial r'} - \left(r' \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{dr'}{dz} \frac{\partial f}{\partial r'} \right) \\ &= r' \left(\frac{d}{dz} \frac{\partial f}{\partial r'} - \frac{\partial f}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

Donc l'équation d'Euler-Lagrange admet une intégrale première :

$$r' \frac{\partial f}{\partial r'} - f = cste \quad (6)$$

soit :

$$2\pi\gamma \frac{rr'^2}{\sqrt{1+r'^2}} - 2\pi\gamma r \sqrt{1+r'^2} + \lambda\pi(r^2 - b^2) = cste \quad (7)$$

La constante peut être imposée en choisissant un "raccordement lisse" sur la surface du fil² : $r'(r = b) = 0$. Donc $cste = -2\pi\gamma b$, alors :

$$2\pi\gamma \frac{rr'^2}{\sqrt{1+r'^2}} - 2\pi\gamma r \sqrt{1+r'^2} + \lambda\pi(r^2 - b^2) = -2\pi\gamma b \quad (8)$$

soit en développant et refactorisant :

$$-\lambda \frac{r^2 - b^2}{2} + \gamma \left(\frac{r}{\sqrt{1+r'^2}} - b \right) = 0 \quad (9)$$

Cette équation décrit une forme de goutte dite ondoïdale : pousser plus loin la résolution nécessite une intégration numérique.

4. Le rayon maximal de la goutte est obtenu pour $r' = 0$ soit :

$$r_{\max} = \frac{2\gamma}{R} - b \quad (10)$$

2. Cela revient à imposer un angle de contact nul.

2 Relation de Kelvin

À l'équilibre thermodynamique, $T = T_0$ et P est donné par la relation de Laplace. Il y a en outre égalité des potentiels chimiques des deux phases : $\mu_\ell(T_0, P) = \mu_g(T_0, P_0)$. Si le gaz est supposé parfait, on a :

$$\mu_g(T_0, P_0) = \mu_g(T_0, P_{\text{sat}}(T_0)) + k_B T_0 \ln \frac{P_0}{P_{\text{sat}}(T_0)} \quad (11)$$

où $P_{\text{sat}}(T_0)$ est la pression de vapeur saturante. On peut alors développer le potentiel chimique autour du $P_{\text{sat}}(T_0)$:

$$\mu_\ell(T_0, P) \simeq \mu_\ell(T_0, P_{\text{sat}}(T_0)) + (P - P_{\text{sat}}(T_0)) \left. \frac{\partial \mu_\ell}{\partial P} \right|_T = \mu_\ell(T_0, P_{\text{sat}}(T_0)) + \frac{P - P_{\text{sat}}(T_0)}{\rho} \quad (12)$$

avec ρ la densité particulaire du liquide.

Or, par définition de la pression de vapeur saturante, $\mu_\ell(T_0, P_{\text{sat}}(T_0)) = \mu_g(T_0, P_{\text{sat}}(T_0))$ donc, à l'équilibre, en utilisant la loi de Laplace, l'égalité des potentiels chimiques fournit la **relation de Kelvin**. En pratique, le terme $P - P_{\text{sat}}(T_0)$ est négligeable devant le premier membre de l'équation et n'est pas pris en compte.

$$k_B T_0 \rho \ln \frac{P_0}{P_{\text{sat}}(T_0)} = P - P_{\text{sat}}(T_0) + \frac{2\gamma}{r} \quad (13)$$

La relation de Kelvin montre que la pression de vapeur saturante pour une interface courbée est modifiée. Le cas limite d'une interface plane $r \rightarrow \infty$ redonne $P = P_{\text{sat}}(T_0)$.

3 Nucléation homogène

- Qualitativement, la variation d'énergie provoquée par la formation du germe contient deux termes :
 - un terme volumique, qui traduit la différence d'énergie de cohésion entre le liquide et le gaz, et qui sera favorable à la nucléation si l'on se place dans le domaine de stabilité du liquide,
 - un terme surfacique, qui traduit le coût de création d'une interface, toujours défavorable.

On voit dès lors que l'énergie ne sera abaissée que si l'on se trouve dans le domaine de stabilité du liquide, et si le germe est suffisamment gros, de façon à ce que le terme de volumique domine le terme surfacique.

- On a :

$$\Delta\Omega^* = \Delta U + P_0 \Delta V - T_0 \Delta S - \mu_0 \Delta N \quad (14)$$

$$= (T - T_0) \Delta S + (\mu_\ell - \mu_0) \Delta N + (P_0 - P) \Delta V + \gamma \Delta A \quad (15)$$

$$= (T - T_0) \Delta S + [\rho(\mu_\ell - \mu_0) + P_0 - P] \frac{4}{3} \pi r^3 + 4\pi r^2 \quad (16)$$

où ρ désigne la densité particulaire du liquide. Nous ne pouvons pas encore conclure, car il reste des dépendances en r dans la pression P du liquide et dans son potentiel chimique μ_ℓ . : pour le gaz, $\mu_0 = \mu_0(T_0, P_0)$ et pour le liquide, $\mu_\ell = \mu_\ell(T, P) = \mu_\ell\left(T_0, P_0 + \frac{2\gamma}{r}\right)$.

- On considère le cas de germes de taille assez grande pour pouvoir effectuer un développement limité de μ_ℓ au premier ordre autour de P_0 :

$$\mu_\ell\left(T_0, P_0, \frac{2\gamma}{r}\right) \simeq \mu_\ell(T_0, P_0) + \frac{2\gamma}{r} \left. \frac{\partial \mu_\ell}{\partial P} \right|_T = \mu_\ell(T_0, P_0) + \frac{2\gamma}{\rho r} \quad (17)$$

Vérifions à quelle condition ce développement peut être tronqué au premier ordre. Si on le pousse à l'ordre suivant :

$$\mu_\ell\left(T_0, P_0, \frac{2\gamma}{r}\right) \simeq \mu_\ell(T_0, P_0) + \frac{2\gamma}{r} \left. \frac{\partial \mu_\ell}{\partial P} \right|_T + \left(\frac{2\gamma}{r}\right)^2 \left. \frac{\partial^2 \mu_\ell}{\partial P^2} \right|_T = \mu_\ell(T_0, P_0) + \frac{2\gamma}{\rho r} - \left(\frac{2\gamma}{r}\right)^2 \frac{\chi_T}{\rho} \quad (18)$$

où $\chi_T \sim 4 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ est la compressibilité isotherme du liquide. Il est légitime de négliger le terme du second ordre tant que $r \gg 2\gamma\chi_T \sim 3 \times 10^{-11} \text{ m}$ dans le cas de l'eau, ce qui paraît assez légitime, la thermodynamique n'étant plus valable depuis longtemps à de si petites échelles ! Sous ces hypothèses, l'équation (16) devient alors

$$\Delta\Omega^* = \rho [(\mu_\ell(T_0, P_0) - \mu_0(T_0, P_0))] \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 \quad (19)$$

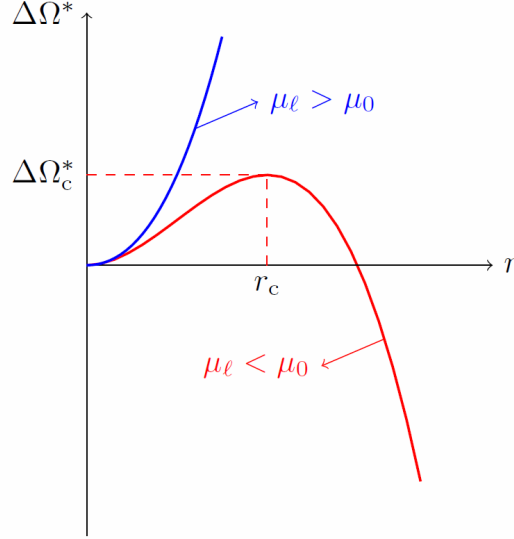


FIGURE 1: Variation du potentiel thermodynamique lors de la formation d'une goutte de rayon r . Lorsque la phase liquide est plus stable, une goutte ne se développe que si sa taille dépasse un rayon critique r_c , ce qui nécessite de franchir une barrière énergétique $\Delta\Omega_c^*$.

4. L'évolution de $\Delta\Omega^*$ avec r est tracée FIGURE 1. On peut distinguer deux cas. Si $\mu_0(T_0, P_0) < \mu_\ell(T_0, P_0)$, alors $\Delta\Omega^*$ est une fonction strictement croissante de r : quelle que soit la taille de la goutte, elle s'évapore. Au contraire, si $\mu_0(T_0, P_0) > \mu_\ell(T_0, P_0)$, alors $\Delta\Omega^*$ passe par un maximum en :

$$r_c = \frac{2\gamma}{\rho[\mu_0(T_0, P_0) - \mu_\ell(T_0, P_0)]} > 0 \quad (20)$$

et vaut alors :

$$\Delta\Omega^* = \frac{16\pi\gamma^3}{3\rho^2[\mu_0(T_0, P_0) - \mu_\ell(T_0, P_0)]^2} \quad (21)$$

Dans ce cas, puisque le potentiel Ω^* décroît au cours de l'évolution du système, si $r < r_c$, la goutte s'évapore, mais si $r > r_c$, elle croît au contraire.

5. Il nous reste à évaluer l'écart entre les potentiels chimiques pour obtenir des ordres de grandeur du rayon critique et de la barrière énergétique. Pour cela, on suppose que la pression P_0 du gaz est proche de la pression de vapeur saturante $P_s(T_0)$ de façon à développer le potentiel chimique autour de celle-ci :

$$\mu_\ell(T_0, P_0) \simeq \mu_\ell(T_0, P_s(T_0)) + \frac{P_0 - P_s(T_0)}{\rho} \quad (22)$$

$$\mu_0(T_0, P_0) \simeq \mu_0(T_0, P_s(T_0)) + \frac{P_0 - P_s(T_0)}{\rho_{\text{gaz}}(T_0)} \quad (23)$$

puisque $\left. \frac{\partial \mu_\ell}{\partial P} \right|_T$. Or, par définition de la pression de vapeur saturante, $\mu_\ell(T_0, P_s(T_0)) = \mu_0(T_0, P_s(T_0))$ et la densité $\rho_{\text{gaz}}(T_0)$ est négligeable devant celle du liquide ρ si l'on se place suffisamment loin du

point critique, ce que l'on va supposer. Dès lors, en considérant en outre le gaz comme parfait, on peut réécrire la différence de potentiel chimique selon

$$\mu_0(T_0, P_0) - \mu_\ell(T_0, P_0) \simeq \frac{P_0 - P_s(P_0)}{P_s(T_0)} k_B T_0 \quad (24)$$

Ainsi on obtient une estimation du rayon critique et de la barrière énergétique en fonction de la pression de vapeur saturante :

$$r_c = \frac{2\gamma}{\rho k_B T_0} \frac{P_s(T_0)}{P_0 - P_s(T_0)} \quad \text{et} \quad \Delta\Omega^* = \frac{16\pi\gamma^3}{3} \left[\frac{1}{\rho k_B T_0} \frac{P_s(T_0)}{P_0 - P_s(T_0)} \right]^2 \quad (25)$$

6. Cette énergie est à comparer aux fluctuations d'énergie dans un sous-système de volume r_c^3 soit $\delta E \sim \sqrt{k_B C_{v,g}} T_0 \sim 10^{-20}$ J.

On peut donc proposer un scénario pour la nucléation homogène. La transition ne peut se faire que si une fluctuation de densité mène à un germe de taille supérieure à r_c , mais une telle fluctuation correspond à une barrière énergétique $\Delta\Omega_c^*$. Dès lors, plus on s'éloigne de la ligne de coexistence, plus la taille critique est faible, et plus la barrière énergétique est ténue. En considérant la nucléation comme un processus de franchissement de barrière thermiquement activé, le taux de nucléation (nombre de nucléations par unité de volume et par unité de temps) est donné par une relation d'Arrhénius :

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{-\frac{\Delta\Omega_c^*(T_0)}{k_B T_0}} \quad (26)$$

où Γ_0 correspond à une fréquence d'essai, qui doit être déterminée à partir de théorie cinétique.

Notons $\mathbb{P}(t)$ la probabilité que le système soit encore en phase gazeuse au temps t , si l'on applique une rampe de température $T(t) = T_{\text{coex}} - \alpha t$ où T_{coex} est la température de coexistence entre liquide et gaz, à la pression considérée. On a $\mathbb{P}(t + dt) = \mathbb{P}(t)(1 - \Gamma_0 V dt)$. On peut alors intégrer cette équation, sachant que $\mathbb{P}(t = 0) = 1$ puisque l'on part de la coexistence. En remplaçant la variable temporelle par la température, on obtient :

$$\ln(\mathbb{P}(t)) = - \int_{T_{\text{coex}}}^T \frac{\Gamma_0 V}{\alpha} e^{-\frac{\Delta\Omega_c^*(\theta)}{k_B T}} d\theta \quad (27)$$

Il s'agit là de la théorie classique de nucléation, donnant des résultats qualitatifs corrects, mais dont le principal problème réside en l'estimation du préfacteur Γ .

4 Nucléation hétérogène

1. Dans l'état de référence, le solide est entouré par la phase gazeuse, alors qu'en présence du germe, il est en partie couvert, donc

$$\Delta\Omega_{\text{surf}}^* = (\gamma A_{LG} + \gamma_{SL} A_P) - \gamma_{SG} = \gamma A_{LG} + (\gamma_{SL} - \gamma_{SG}) A_P \quad (28)$$

2. Considérons une situation de mouillage partiel : la loi de Young-Dupré nous permet de réécrire

$$\Delta\Omega_{\text{surf}}^* = \gamma(A_{LG} - \cos\theta A_P) \quad (29)$$

Il nous reste à calculer les différents volumes et surfaces intervenant dans ces expressions. La surface de solide recouverte par le germe est un disque de rayon $r \sin\theta$ donc $A_P = r^2 \sin^2\theta$. La surface d'une

calotte sphérique de rayon r et de hauteur h vaut $A_{LG} = 2\pi rh = 2\pi r^2(1 - \cos \theta)$. Enfin, son volume vaut

$$V_{\text{germe}} = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3} = \frac{\pi r^3(1 - \cos \theta)^2(2 + \cos \theta)}{3} \quad (30)$$

Dès lors, l'équation (28) se réécrit :

$$\Delta\Omega^* = \rho [\mu_\ell(T_0, P_0) - \mu_0(T_0, P_0)] \frac{\pi r^3}{3} (1 - \cos \theta)^2 (2 + \cos \theta) + \gamma [2\pi r^2(1 - \cos \theta) - \pi r^2 \cos \theta \sin^2 \theta] \quad (31)$$

Or on a $2(1 - \cos \theta) - \cos \theta \sin^2 \theta = (1 - \cos \theta)^2(2 + \cos \theta)$ donc :

$$\Delta\Omega^* = \frac{(1 - \cos \theta)^2(2 + \cos \theta)}{4} \left[\rho [\mu_\ell(T_0, P_0) - \mu_0(T_0, P_0)] \frac{4\pi r^3}{3} + 4\pi r^2 \gamma \right] \quad (32)$$

$$= \frac{(1 - \cos \theta)^2(2 + \cos \theta)}{4} \Delta\Omega^*|_{\text{hom}} \quad (33)$$

où $\Delta\Omega^*|_{\text{hom}}$ est la variation dans le cas homogène traité précédemment.

3. Le préfacteur $f(\theta) = \frac{(1 - \cos \theta)^2(2 + \cos \theta)}{4}$ est tracé sur la FIGURE 2, est une fonction croissante de θ sur $[0, \pi]$ et reste toujours inférieur à 1. Dès lors, les variations de $\Delta\Omega^*$ restent les mêmes que dans le cas homogène, et le scénario de transition reste similaire : la transition ne peut se faire que si un germe suffisamment gros apparaît lors d'une fluctuation, mais du fait du mouillage, la barrière énergétique associée à une telle fluctuation est notablement abaissée, d'autant plus que le liquide mouille la paroi. La transition se fera donc préférentiellement à partir d'une impureté.

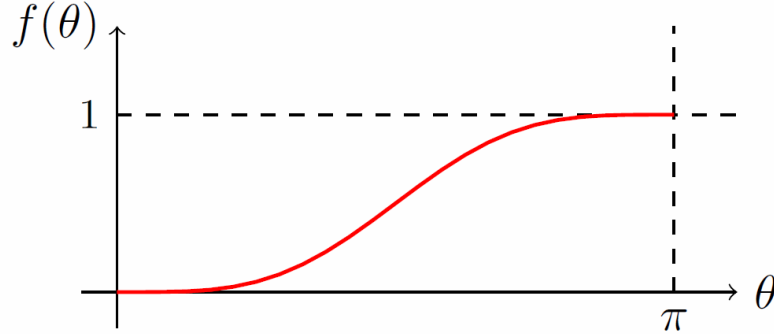


FIGURE 2: Dans le cas de la nucléation hétérogène, la variation d'énergie associée à la formation d'une goutte est corrigée par un facteur $f(\theta)$, dépendant de l'angle de contact.

4. De façon alternative, on peut considérer que le mouillage induit un abaissement effectif de la tension de surface liquide/gaz. Pour cela réécrivons $\Delta\Omega^*$ et $\Delta\Omega^*|_{\text{hom}}$ en fonction du volume du germe :

$$\Delta\Omega^* = \rho V_{\text{germe}} [\mu_\ell(T_0, P_0) - \mu_0(T_0, P_0)] + (36\pi)^{1/3} \gamma V_{\text{germe}}^{2/3} \quad (34)$$

$$\Delta\Omega^*|_{\text{hom}} = \rho V_{\text{germe}} [\mu_\ell(T_0, P_0) - \mu_0(T_0, P_0)] + (36\pi)^{1/3} \gamma \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^{2/3} (2 + \cos \theta)^{1/3} V_{\text{germe}}^{2/3} \quad (35)$$

Le cas hétérogène est donc similaire au cas homogène, mais avec une tension de surface effective abaissée $\gamma_{\text{eff}} = \gamma[f(\theta)]^{1/3} \neq \gamma$. Commentons enfin le cas du mouillage total, où l'on ne peut pas garder de contact à trois phases à l'équilibre. Si $\gamma_{SL} > \gamma_{SG}$, la valeur limite de l'angle de contact vaut π et la goutte forme une sphère parfaite sur la paroi. Dans ce cas, $f(\theta) = 1$ et il n'y a aucun changement par rapport à la nucléation homogène. Dans le cas contraire, l'angle de contact tend vers 0 et le liquide recouvre entièrement le solide. Dans ce cas, $f(0) = 0$ et la barrière énergétique s'annule : il n'y a plus d'état métastable. C'est ce qu'il se produit souvent dans le cas de la fusion, le liquide mouillant généralement bien sa propre phase solide, il n'y a pas de retard à la transition.

5 Ondes gravito-capillaires

1. On suppose l'écoulement parfait : nous pouvons dès lors négliger la dissipation visqueuse dans l'écoulement, ce dont nous discuterons par la suite. L'écoulement du fluide est alors décrit par l'équation d'Euler :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla P \quad (36)$$

2. L'écoulement étant parfait, la vorticité est conservée, et puisque le fluide est initialement au repos, elle est nulle.

Le champ de vitesses découle alors d'un potentiel $\phi(x, z, t)$ tel que $\mathbf{v} = \nabla \phi$.

On suppose en outre l'écoulement incompressible ce qui implique la conservation locale du débit $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Le potentiel des vitesses satisfait donc l'équation de Laplace sans source :

$$\Delta \phi = 0 \quad (37)$$

On utilise l'identité $(\nabla \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right)$ on peut écrire l'équation d'Euler pour un écoulement irrotationnel :

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + P \right) = 0 \quad (38)$$

3. Considérons enfin que l'onde est de faible amplitude, c'est-à-dire que la vitesse de l'écoulement et le déplacement du fluide sont d'ordre 1 : nous préciserons par la suite les grandeurs auxquelles il faut les comparer.

On peut négliger le terme quadratique et obtenir ainsi la relation de Bernoulli pour un écoulement lent, parfait, incompressible, irrotationnel et instationnaire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g z + \frac{P}{\rho} = C \quad (39)$$

avec C une constante. À strictement parler, C peut dépendre du temps. Cependant il s'agira alors d'un terme non propagatif, qui ajoutera une contribution indépendante de l'espace au potentiel : cette contribution disparaîtra donc dans la vitesse, qui est la quantité physique intéressante. On peut donc librement choisir cette constante comme indépendante du temps.

4. Trois conditions aux limites sont à prendre en compte :

- La discontinuité de pression à la traversée de la surface libre est donnée par la loi de Laplace. En se souvenant que la courbure est donnée par $\partial_{x,x}^2 z_0$, on obtient :

$$P(x, z = z_0(x, t), t) = P_0 - \gamma \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} \quad (40)$$

- La composante verticale de la vitesse est nulle au fond du récipient :

$$v_z(z = 0) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) (x, z = 0, t) = 0 \quad (41)$$

- La composante normale de la vitesse de l'interface est égale à la composante normale de la vitesse du fluide au niveau de la surface libre. Pour des déformations de faible amplitude, la normale à l'interface s'identifie à la verticale et on obtient :

$$v_z(x, z = z_0(x, t), t) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) (x, z = z_0(x, t), t) = \frac{\partial z_0}{\partial t} \quad (42)$$

5. Dans l'hypothèse d'ondes de faible amplitude, la première et la troisième conditions aux limites peuvent être prises en $z = h$ plutôt qu'en $z = z_0(x, t)$, les corrections induites étant d'ordre supérieur. Les équations (39) et (41) couplent l'écoulement, caractérisé par son potentiel ϕ , et la déformation de l'interface, décrite par z_0 . Leur combinaison permet d'obtenir l'équation satisfaite par le potentiel des vitesses à la surface $z = z_0 \simeq h$:

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial z} \right] (x, z = h, t) = 0 \quad (43)$$

6. En réinjectant cette forme de solution dans l'équation de Laplace, on obtient :

$$\chi''(u)\psi(z) + \chi(u)\psi''(z) = 0 \quad (44)$$

Soit en séparant les fonctions :

$$\frac{\chi''}{\chi} = -\frac{\psi''}{\psi} \quad (45)$$

Les deux membres de cette dernière égalité étant fonction de variables indépendantes, ils sont tous deux simultanément constants, égaux à une constante notée $-k^2$ ³. Et donc :

$$\chi(u) = \alpha_1 e^{iku} + \beta_1 e^{-iku} \quad (46)$$

$$\psi(z) = \alpha_2 \cosh(kz) + \beta_2 \sinh(kz) \quad (47)$$

La deuxième condition aux limites impose que $D = 0$ et on choisit par commodité de se restreindre aux solutions se propageant dans le sens des x croissants : le potentiel des vitesses s'écrit alors :

$$\phi(x, z, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \cosh(kz) \quad (48)$$

avec A une constante caractérisant l'amplitude de l'onde et $\omega = ck$.

7. Pour caractériser les ondes, il faut à présent obtenir la relation de dispersion. Pour cela, on injecte la solution précédente trouvée dans l'équation de propagation (43). On trouve :

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) \tanh(kh) \quad (49)$$

et on trouve alors la vitesse de phase, égale à c :

$$v_\varphi = c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho} \right) \tanh(kh)} \quad (50)$$

On peut alors réécrire la relation de dispersion des ondes gravito-capillaire ainsi que leur vitesse de phase :

$$\omega^2 = gk(1 + k^2 \ell_c^2) \tanh(kh) \quad \text{et} \quad c = \sqrt{\frac{g}{k} (1 + k^2 \ell_c^2) \tanh(kh)} \quad (51)$$

8. Nous avons effectué diverses hypothèses au cours de la démonstration qu'il convient maintenant de discuter. L'hypothèse de petite perturbation recouvre en fait trois conditions :

- L'amplitude v_0 de la vitesse doit être suffisamment faible pour que l'on puisse négliger le terme d'accélération convective dans l'équation d'Euler (ou de façon équivalente, le terme d'énergie cinétique dans l'équation de Bernoulli) devant le terme d'inertie. Il faut donc avoir $v_0 \ll c = \frac{\omega}{k}$.

3. On choisit une constante négative de façon à avoir propagation selon x . Prendre une constante positive donnerait une solution amortie qui ne nous intéresse pas ici.

- L'amplitude de la déformation de l'interface doit être suffisamment lisse pour que l'on puisse assimiler la normale à la surface libre à la verticale : il faut pour cela $\partial_x z_0 \ll 1$.
 - L'amplitude de la déformation de l'interface doit être suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que les conditions aux limites sont prises en $z = h$: il faut donc $|z_0 - h| \ll h$.
9. Nous avons en outre considéré l'écoulement comme parfait, c'est-à-dire que nous avons négligé la dissipation visqueuse. Cette hypothèse peut être prise en défaut quand l'épaisseur de fluide devient faible, nous en discuterons plus en détails dans le paragraphe sur l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Dans la limite d'eaux profondes, la dissipation visqueuse intervient dans l'écoulement en volume du fluide. On peut obtenir un temps caractéristique d'atténuation τ en équilibrant l'inertie (qui est le moteur du mouvement) et la dissipation visqueuse : $\frac{\rho v_0}{\tau} \sim \frac{\eta v_0}{\lambda^2}$ soit :

$$\tau \sim \frac{\rho \lambda^2}{\eta} = \frac{\lambda^2}{\nu} \quad (52)$$

et la distance caractéristique d'atténuation est $L \sim c\tau$. On retrouve des lois d'échelles courantes de phénomènes de diffusion.

10. Nous disposons donc de sept paramètres pour trois dimensions indépendantes. Le théorème de Buckingham implique alors que le problème est déterminé par quatre nombres sans dimension que nous choisissons comme :

$$\tilde{K} = K\ell_c \quad \tilde{H} = kh \quad \tilde{Z} = kA_0 \quad \tilde{\Omega} = \frac{\omega}{\sqrt{kg}} \quad (53)$$

Nous pouvons donc seulement affirmer que la relation de dispersion se met sous la forme :

$$\tilde{\Omega} = f(\tilde{K}, \tilde{H}, \tilde{Z}) \quad (54)$$

11. Considérons alors le cas d'eaux profondes, soit $\tilde{H} \gg 1$, et d'une onde de faible amplitude, soit $\tilde{Z} \ll 1$. Supposons ainsi que dans ce régime, la fonction f ne dépend plus que de $\tilde{K}$ ⁴.

Tout d'abord, notons qu'il ne reste pour décrire le mouvement du fluide qu'une échelle de temps $\frac{1}{\omega}$ et une échelle de longueur $\frac{1}{k}$ pertinentes, la longueur capillaire étant une caractéristique statique du fluide. Dès lors, la vitesse d'une particule de fluide a pour ordre de grandeur $v_0 = \frac{\omega}{k}$, la vitesse de phase de l'onde de surface. Nous pouvons alors obtenir les comportements asymptotiques de f avec $\tilde{K}$ ⁵.

- **Cas purement gravitationnel** : Si l'on considère la situation $\tilde{K} \ll 1$, c'est la gravité qui domine la capillarité. On doit donc équilibrer l'inertie du fluide avec la pesanteur : $\partial_t \mathbf{v} \sim \mathbf{g}$. En ordre de grandeur on obtient $\omega^2 \sim kg$.
- **Cas purement capillaire** : Si l'on considère la situation $\tilde{K} \gg 1$, c'est la capillarité qui domine la gravité. On doit donc équilibrer l'inertie du fluide avec le gradient de pression capillaire à l'interface : $\partial - t\mathbf{v} \sim \frac{\nabla P}{\rho}$. En ordre de grandeur on a $\|\nabla P\| \sim k\Delta P \sim k \times (\gamma k)$ donc $\omega^2 \sim \frac{\gamma k^3}{\rho}$.

On obtient ainsi les deux comportements limites de la fonction f :

- pour $\tilde{K} \ll 1$:

$$\tilde{\Omega} = f(\tilde{K}) \sim 1 \quad (55)$$

- pour $\tilde{K} \gg 1$:

$$\tilde{\Omega} = f(\tilde{K}) \sim \tilde{K} \quad (56)$$

4. Cela correspond au cas d'une auto-similarité de première espèce, que nous supposons adaptée. Si cette hypothèse impliquait des résultats en désaccord avec l'expérience, il faudrait rechercher $f(\tilde{K}, \tilde{H}, \tilde{Z})$ sous la forme $\tilde{H}^\alpha \tilde{Z}^\beta g(\tilde{K} \tilde{H}^{-\gamma} \tilde{Z}^{-\delta})$. Notons néanmoins que f doit être indépendante de $\tilde{Z}$ puisque l'on effectue une analyse linéaire, où l'amplitude de l'onde est infinitésimale.

5. C'est là que tout peut sembler un peu fumeux, dans la mesure où les forces que l'on tente d'équilibrer agissent dans des directions orthogonales. Mais ce que l'on prend pour de la magie n'est que la puissance de l'analyse dimensionnelle : essayer de distinguer deux directions reviendrait à ajouter une longueur dans le problème.

L'analyse dimensionnelle ne permet pas de prédire le comportement général de f , il se trouve que c'est la somme des deux cas limites, ce qui n'est pas aberrant puisque les effets liés à la gravité et ceux liés à la capillarité apparaissent comme une somme dans l'équation de propagation.

12. Discussion.

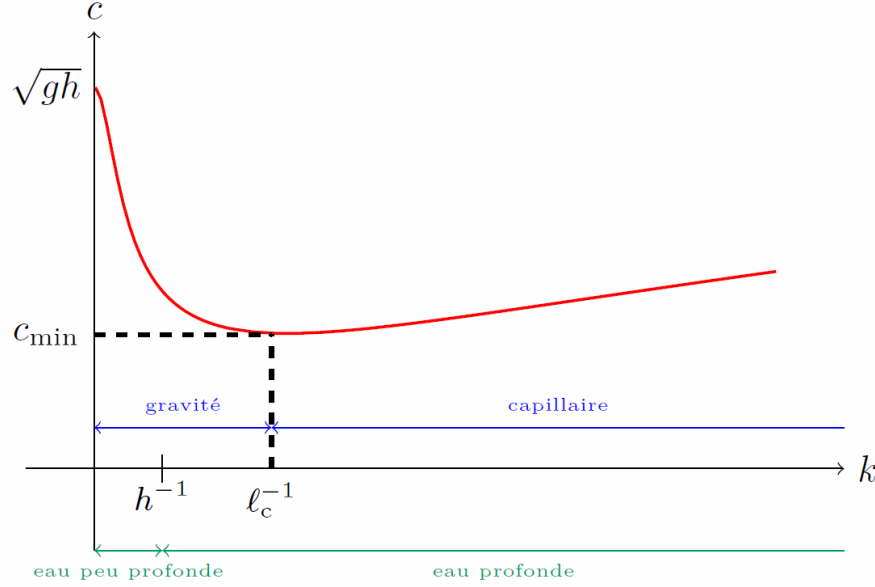


FIGURE 3: Relation de dispersion des ondes gravito-capillaires à la surface d'un fluide.

(a) On peut discuter la relation de dispersion qui est tracé sur la FIGURE 3. On peut distinguer différents régimes :

- selon la valeur de kh :

- ▷ si $\lambda \gg h$ alors on se situe dans le régime d'eaux peu profondes et $\tanh(kh) \sim kh$
- ▷ si $\lambda \ll h$ alors on se situe dans le régime d'eaux profondes et $\tanh(kh) \sim 1$

La tangente hyperbolique variant cependant assez lentement loin de 0, l'hypothèse d'eaux profondes est assez peu restrictive et reste valable dans de nombreux cas. Nous nous y plaçons pour la suite.

- selon la valeur de $k\ell_c$:

- ▷ si $\lambda \ll \ell_c$ la capillarité domine et on a $\omega^2 \simeq gk^3\ell_c^2$ et $c \simeq \sqrt{gk\ell_c}$.
- ▷ si $\lambda \gg \ell_c$ la gravité domine et on a $\omega^2 \simeq gk$ et $c \simeq \sqrt{\frac{g}{k}}$

Dans l'expérience du caillou tombant dans un lac, la série d'ondes rapides de courte longueur d'onde correspond aux ondes capillaires, alors que la série d'onde lentes et de grande longueur d'onde correspond aux ondes gravitaires.

On remarque en outre que la vitesse des ondes passe par un minimum non nul $c_{\min}$ pour $k\ell_c = 1$ ($c_{\min} \simeq 23$ cm/s pour de l'eau à température ambiante). Il s'agit de la vitesse relative minimale à laquelle un obstacle doit se déplacer par rapport au fluide environnant pour laisser un sillage stationnaire, en forme de V comme celui que l'on peut observer derrière un canard ou un bateau. Si l'obstacle se déplace à une vitesse inférieure à $c_{\min}$ la perturbation restera localisée autour de lui. L'émission d'un sillage dissipe de l'énergie, intervenant dans les problèmes de résistance à la progression en surface d'un fluide (on parle de résistance de vague)⁶.

6. Ce type de critère se retrouve dans de multiples domaines, dès qu'une relation de dispersion présente une vitesse minimale non-nulle : critère de Landau pour la superfluidité, amortissement Landau dans les plasmas, rayonnement Cherenkov, etc.

- (b) Munis des vitesses de phase approximatives, on peut évaluer les distances typiques d'atténuation dans les deux régimes. Dans le régime capillaire, on trouve $L \sim (\rho\gamma\lambda^3)^{1/2}$. Pour $\lambda = 1$ mm par exemple, on obtient $L \simeq 30$ cm. Dans le régime gravitaire, $L \sim \rho g^{1/2} \lambda^{5/2}$ et les longueurs d'atténuation deviennent rapidement très élevées (quelques kilomètres pour $\lambda \sim 1$ m). Les vagues en mer correspondent à ce second régime.
- (c) Grâce au potentiel des vitesses trouvé, on peut facilement obtenir le profil d'écoulement :

$$\mathbf{v}(x, z, t) = -Ak \sin(kx, \omega t) \cosh(kz) \mathbf{e}_x + Ak \cos(kx - \omega t) \sinh(kz) \mathbf{e}_z \quad (57)$$

L'intégration du profil de vitesse fournit alors une équation paramétrique des trajectoires :

$$\Delta x(t) = A \frac{k}{\omega} \cos(kx - \omega t) \cosh(kz) \quad \text{et} \quad \Delta z(t) = A \frac{k}{\omega} \sin(kx - \omega t) \sinh(kz) \quad (58)$$

En éliminant le temps dans ces équations on trouve :

$$\left(\frac{\Delta x}{\cosh(kz)} \right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\sinh(kz)} \right)^2 = \frac{A^2 k^2}{\omega^2} \quad (59)$$

Les trajectoires sont donc des ellipses.

Dans le cas des eaux profondes, et loin du fond, $kz \gg 1$ donc $\cosh(kz) \simeq \sinh(kz)$ et les trajectoires deviennent circulaires. On aurait pu le prédire (non sans difficultés) par analyse dimensionnelle, puisque nous avons vu que dans le régime d'eaux profondes, les directions verticale et horizontale doivent être traitées de façon équivalente.

6 Cohésion capillaire

1. Pour déterminer la force agissant entre les deux plaques, on calcule le travail δW nécessaire pour les éloigner de dh .

En négligeant le volume des ménisques⁷, le pont capillaire a un volume $V = \pi A^2 h$. La surface de contact entre le pont et les plaques est $S = 2(\pi A^2)$. Éloigner les plans de dh diminue la surface mouillée de $dS = 4\pi A dh$. Donc le travail à fournir au système est :

$$\delta W = (\gamma_{SG} - \gamma_{SL}) 4\pi A dh \quad (60)$$

2. Si l'on suppose en outre que la transformation se fait à volume constant, c'est-à-dire qu'on a la relation

$$2 \frac{dA}{A} + \frac{dh}{h} = 0 \quad (61)$$

alors :

$$\delta W = -(\gamma_{SG} - \gamma_{SL}) \frac{2\pi A^2}{h} dh = -\frac{2\pi A^2 \gamma \cos \theta_E}{h} dh \quad (62)$$

En utilisant la relation de Young-Dupré. On peut alors en déduire la force de traction exercée par le pont capillaire sur les plaques :

$$F = \frac{\delta W}{dh} = \frac{2\pi A^2 \gamma \cos \theta_E}{h} \quad (63)$$

3. Si $\theta_E \leq \pi/2$ (liquide mouillant), la force est attractive et donc cette force s'oppose à l'écartement des plaques. Il est facile de se convaincre de son existence en essayant d'éloigner deux plaques de plexiglas séparées par un fin film d'eau. Une fois de plus, le point de vue thermodynamique a été utilisé ici, mais la démonstration peut se faire aisément en utilisant directement la loi de Laplace. Cette force permet aussi d'expliquer la cohésion des matériaux granulaires humides. La force exercée par le pont capillaire entre deux grains est de plusieurs ordres de grandeurs supérieure au poids des grains.

7. Ce qui revient à supposer $h \ll R$, la courbure du ménisque étant imposée par la relation de Young-Dupré.

7 Imprégnation et loi de Washburn

1. Plus précisément, nous négligeons le terme d'inertie $\partial_{\mathbf{v}}$ par rapport au terme visqueux $\nu \partial_{x,x}^2 \mathbf{v}$ dans l'équation de Navier-Stokes. Cela nécessite que l'échelle de temps de l'écoulement soit grande devant le temps $\frac{e^2}{\nu}$ de diffusion de la quantité de mouvement sur l'épaisseur e : il s'agit de l'hypothèse que nous reverrons avec l'approximation de lubrification. L'écoulement est alors décrit par l'équation de Stokes stationnaire

$$\eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (64)$$

2. La vitesse ne dépendant pas de z , le gradient de pression dans la direction de l'écoulement est constant et vaut, d'après la loi de Laplace :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P(h(t)) - P(0)}{h(t)} = -\frac{2\gamma \cos \theta}{eh(t)} < 0 \quad (65)$$

avec θ l'angle de contact à la ligne triple et $h(t)$ la position du ménisque.

Dès lors, en imposant le non-glissement du fluide à la paroi $v(\pm \frac{e}{2}) = 0$, l'intégration de l'équation de Stokes donne :

$$v(x) = -\frac{1}{2\eta} \left[\left(\frac{e}{2} \right)^2 - x^2 \right] \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\gamma \cos \theta}{\eta e h(t)} \left[\left(\frac{e}{2} \right)^2 - x^2 \right] \quad (66)$$

Comme on pouvait s'y attendre, on obtient un profil d'écoulement de Poiseuille.

3. Le débit volumique s'écrit alors :

$$Q = w \int_{-e/2}^{e/2} v(x) dx = \frac{we^2 \gamma \cos \theta}{6\eta h} \quad (67)$$

4. La conservation du débit donne $Q = \dot{h}ew$ et donc :

$$\dot{h} = \frac{e\gamma \cos \theta}{6\eta h} \quad (68)$$

Cette équation s'intègre en prenant $h(0) = 0$ et nous donne l'évolution de l'avancée du front :

$$h(t) = \sqrt{\frac{e\gamma \cos \theta}{3\eta h} t} \quad (69)$$

Il s'agit de la loi de Washburn ($h(t) \sim \sqrt{t}$) qui décrit la dynamique d'imprégnation d'un capillaire.

5. En présence de pesanteur, cette relation reste valable tant que le poids de la colonne d'eau entraînée est négligeable devant la force capillaire, c'est-à-dire tant que $\rho g \ll \partial_z P$ soit encore, en utilisant la solution obtenue, tant que :

$$t \ll \tau = \frac{\eta \gamma \cos \theta}{e^3 (\rho g)^2} \quad (70)$$

Notons enfin que nous avons négligé les contraintes pouvant s'exercer sur la ligne triple du fait de son élasticité.

8 Écoulements quasi-parallèles

8.1 Approximation de lubrification

1. L'écoulement est supposé incompressible, donc $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. En ordre de grandeur, nous avons donc

$$\frac{U}{V} \sim \frac{\partial e}{\partial x} = \theta \ll 1 \quad (71)$$

Ainsi, la vitesse transverse est du premier ordre par rapport à la vitesse moyenne car pour un écoulement quasiparallèle, les lignes de vitesse suivent la paroi.

2. L'écoulement est solution de l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (72)$$

avec p la pression avec éventuellement la contribution hydrostatique à l'intérieur.

La taille typique de variation des propriétés de l'écoulement selon la direction transverse est donnée par l'épaisseur de la paroi, soit en ordre de grandeur $\frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{e_0}$. Estimons alors les ordres de grandeur des dérivées premières des composantes de la vitesse :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{U}{e_0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{V}{e_0} \sim \frac{U}{e_0} \theta \quad (73)$$

De l'incompressibilité on déduit que :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{U}{e_0} \theta \quad (74)$$

Ainsi les dérivées secondes s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{U}{e_0^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} \sim \frac{U}{e_0^2} \theta \quad (75)$$

Pour poursuivre, nous devons nous doter d'une grandeur typique L_0 de variation dans la direction de l'écoulement moyen, par exemple la longueur sur laquelle s'effectue l'écoulement. Dans ce cas, on peut estimer les dérivées par rapport à x par $\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{L_0}$. Dès lors,

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \frac{U}{L_0} \theta, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} \sim \frac{U}{e_0 L_0} \theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_y}{\partial x^2} \sim \frac{U}{L_0^2} \theta \quad (76)$$

La seconde hypothèse de l'approximation de lubrification consiste à négliger les termes non linéaires d'accélération convective devant les termes visqueux. En projection dans la direction de l'écoulement moyen, nous avons :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \sim v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{U^2}{e_0} \theta \quad \text{et} \quad \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{U \nu}{e_0 L_0} \theta \ll \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{U \nu}{e_0^2} \quad (77)$$

donc le terme visqueux domine si $\text{Re} = \frac{U e_0}{\nu} \ll \frac{1}{\theta}$. L'approximation de lubrification comporte donc une hypothèse de faible nombre de Reynolds, mais moins restrictive que la formulation en géométrie quelconque $\text{Re} \ll 1$. La projection de l'équation de Navier-Stokes sur la direction de l'écoulement moyen se résume donc à l'équation de Stokes stationnaire :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (78)$$

Préoccupons nous maintenant de la projection dans la direction transverse. Nous avons :

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L_0} \theta, \quad v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{U^2}{e_0} \theta^2 \quad \text{et} \quad \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \sim \frac{U \nu}{L_0^2} \theta \ll \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \sim \frac{U \nu}{e_0^2} \quad (79)$$

ainsi à l'ordre 0 en θ le gradient de pression selon y est nul et donc :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (80)$$

3. Revenons enfin sur l'hypothèse de stationnarité : elle est valable dans la limite où le terme $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ de l'équation de Navier-Stokes est négligeable devant le terme visqueux $\nu \Delta \mathbf{v}$. En notant T le temps caractéristique de l'écoulement, cette hypothèse est valable si

$$\frac{U}{T} \ll \frac{\nu U}{e_0^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{e_0^2}{\nu} \ll T \quad (81)$$

L'hypothèse de stationnarité revient donc à supposer que la diffusion de la quantité de mouvement sur l'épaisseur e_0 est rapide par rapport à l'écoulement.

L'approximation de lubrification est constituée de trois hypothèses :

- écoulement quasi-parallèle : les variations de direction de la vitesse sont lentes à l'échelle de l'écoulement, c'est-à-dire $\theta = \frac{\partial e}{\partial x} \ll 1$
- écoulement visqueux : le nombre de Reynolds est faible, soit $\text{Re} \ll \frac{1}{\theta}$.
- écoulement stationnaire : la diffusion est rapide sur l'épaisseur de fluide, soit $T \gg \frac{e_0^2}{\nu}$.

L'écoulement est alors régi par les équations

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (82)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (83)$$

8.2 Équation de Reynolds pour un film mince

1. La continuité des contraintes tangentielles pour un fluide visqueux, ainsi que l'impénétrabilité de la paroi nous donnent les conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{v}(x, y = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_x}{\partial y}(x, y = e(x, t)) = 0 \quad (84)$$

2. Nous pouvons alors obtenir le profil de l'écoulement. L'équation (83) nous informe que la pression est constante sur l'épaisseur du fluide, donc l'équation de Stokes stationnaire (82) s'intègre en :

$$v_x(x, y) = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + \alpha y + \beta \quad (85)$$

Les conditions aux limites nous donnent les coefficients α et β d'intégration et la vitesse se met sous la forme :

$$v_x(x, y) = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) [y^2 - 2e(x, t)y] \quad (86)$$

3. Le débit volumique de l'écoulement s'écrit alors :

$$Q(x, t) = \int_0^{e(x, t)} v_x(x, y) dy = -\frac{1}{3\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) e^3(x, t) \quad (87)$$

4. L'écoulement est incompressible, donc le débit se conserve : un bilan de matière sur une tranche fine du film de fluide nous donne $\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ soit :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial p}{\partial x} e^3(x, t) \right] \quad (88)$$

Il s'agit d'un cas particulier de l'équation de Reynolds. L'équation de Reynolds correspondant généralement au cas de l'écoulement de lubrification entre deux parois mobiles. Elle permet alors de calculer les forces exercées par le film de lubrification sur les parois.

9 Instabilité de Rayleigh-Taylor

9.2 Recherche des modes instables

Cette énergie contient un terme volumique dû à la pesanteur et un terme surfacique, et s'écrit :

$$\Delta E = E(\delta e) - E(\delta e = 0) = - \int_0^\lambda \frac{\rho g}{2} (e^2(x, t) - e_0^2) dx + \int_0^\lambda \gamma (ds - dx) \quad (89)$$

avec $ds = \sqrt{(de)^2 + (dx)^2}$ donc pour des petites déformations $ds \simeq dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{de}{dx}\right)^2\right)$ et donc :

$$\Delta E = \frac{\lambda \gamma (\delta e)^2}{4\ell_c^2} ((q\ell_c)^2 - 1) + \mathcal{O}(\delta e)^3 \quad (90)$$

Ainsi, $\Delta E < 0$ pour $q < \frac{1}{\ell_c}$: tous les modes de longueur d'onde supérieure à $2\pi\ell_c$ sont donc instables, c'est-à-dire correspondent à une perturbation d'amplitude exponentiellement croissante avec le temps.

9.3 Taux de croissance

1. Le gradient de pression le long de l'interface est ici égal au gradient de la pression de Laplace⁸ :

$$\nabla P = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\gamma \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) \quad (91)$$

On n'oublie pas que dans (88), $p = P - \rho g y$ avec nos conventions d'orientation. Dans l'approximation de lubrification, le gradient de pression dans la direction transverse à l'écoulement est supposé nul, donc on peut écrire $p = P - \rho g e$.

2. On obtient donc :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(-\rho g \frac{\partial e}{\partial x} - \gamma \frac{\partial^3 e}{\partial x^3} \right) e^3 \right] \quad (92)$$

et donc en réinjectant l'expression de e dans cette équation, on trouve :

$$\frac{d\delta e}{dt} \cos(qx) = \frac{1}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} ((\rho g q \delta e - \gamma q^3 \delta e) \sin(qx) (e_0 + \delta e \cos(qx))^3) \quad (93)$$

En restant au premier ordre pour la perturbation on trouve que :

$$\frac{d\delta e}{dt} = \frac{\rho g e_0^3}{3\eta} q^2 (1 - (q\ell_c)^2) \delta e \quad (94)$$

3. La perturbation δe évolue donc exponentiellement selon

$$\delta e(t) = \delta e(0) e^{\frac{t}{\tau(q)}} \quad (95)$$

avec un temps caractéristique :

$$\tau(q) = \frac{3\eta}{\rho g e_0^3 q^2} \frac{1}{1 - (q\ell_c)^2} \quad (96)$$

4. L'évolution de $\tau(q)$ est tracé sur la FIGURE 4. Nous retrouvons bien que les modes pour lesquels $q\ell_c < 1$ sont instables.

Le temps de croissance $\tau(q)$ passe par un minimum pour τ^* et q^* donnés par :

$$\tau^* = \frac{12\ell_c^2 \eta}{\rho g e_0^3} \quad \text{et} \quad q^* = \frac{2\pi}{\lambda^*} = \frac{1}{\ell_c \sqrt{2}} \quad (97)$$

Cela définit le mode le plus instable, cinétiquement sélectionné. La croissance exponentielle est, comme souvent dans les études d'instabilités, saturée lorsque la surface devient trop déformée (non linéarité géométrique) ou lorsque le film reliant les gouttelettes devient trop fin (il convient alors de prendre en compte plus finement les interactions microscopiques entre le fluide et la paroi solide).

8. Attention au signe ! Avec nos notations, la courbure est $C = -\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}$.

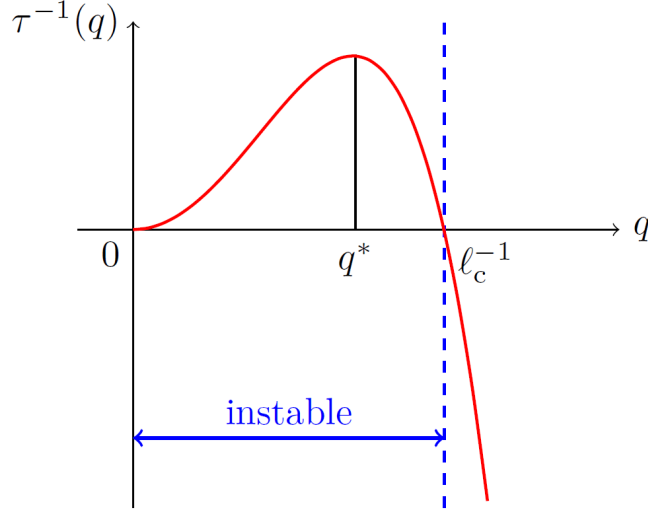


FIGURE 4: Taux de croissance $\tau^{-1}(q)$ de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Les modes de vecteurs d'onde inférieurs à ℓ_c sont instables, et le mode de vecteur d'onde q^* est cinétiquement sélectionné.

10 Instabilité de Rayleigh-Plateau

10.2 Analyse en modes normaux

1. Nous avons sur une longueur d'onde :

$$\int_0^\lambda \pi R^2(x) dx - \pi b^2 \lambda = \pi(R_0^2 - b^2) \lambda \quad (98)$$

dont on peut tirer :

$$R^* \simeq R_0 - \frac{(\delta R)^2}{4R_0} + \mathcal{O}(\delta R)^3 \quad (99)$$

2. La variation énergétique associée à cette perturbation s'écrit, pour une longueur d'onde :

$$\Delta E = \gamma \left[\int_0^\lambda 2\pi R(x) ds - 2\pi R_0 \lambda \right] \quad (100)$$

Une fois de plus, pour de petites déformations, on a $ds \simeq dx \left[1 + \frac{R'^2(x)}{2} \right]$ donc :

$$\Delta E \simeq 2\pi\gamma \left[\int_0^\lambda \lambda(R^* + \delta R \cos(qx)) \left(1 + \frac{q^2(\delta R)^2}{2} \sin^2(qx) \right) - R_0 \lambda \right] \quad (101)$$

$$= 2\pi\gamma \left[(R^* - R_0) \lambda + \frac{R^* (\delta R)^2 q^2 \lambda}{4} \right] + \mathcal{O}(\delta R)^3 \quad (102)$$

$$= \frac{\pi \lambda \gamma}{4R_0} (\delta R)^2 [(qR_0)^2 - 1] + \mathcal{O}(\delta R)^3 \quad (103)$$

Ainsi, les modes satisfaisant $qR_0 < 1$, donc de longueurs d'onde supérieures à $2\pi R_0$ sont instables.

3. La courbure du fluide perturbé est donnée par :

$$C(x) = \frac{1}{R(x)} - \frac{d^2 R}{dx^2} = \frac{1}{b + e(x)} - \frac{d^2 e}{dx^2} \quad (104)$$

où le second terme la même courbure que le paragraphe précédent et le premier terme correspond à la courbure orthogonale au plan qui est simplement un cercle de rayon $R(x)$.

4. Ainsi, l'équation de Reynolds (88) s'écrit en écrivant $e(x, t) = (R^* - b) + \delta e(t) \cos(qx)$:

$$\frac{d\delta e}{dt} = \frac{1}{3\eta} \frac{d}{dx} \left[\gamma \left(\frac{-1}{(b+e)^2} \frac{de}{dx} - \frac{d^3 e}{dx^3} \right) e^3 \right] \quad (105)$$

En restant à l'ordre 1 en δe on obtient en travaillant un peu :

$$\frac{d\delta e}{dt} = \frac{\gamma e_0^3}{3\eta b^2} q^2 [1 - (qb)^2] \delta e \quad (106)$$

À nouveau, la perturbation évolue exponentiellement avec un temps caractéristique :

$$\tau(q) = \frac{3\eta b^2}{\gamma e_0^3} \frac{1}{q^2 [1 - (qb)^2]} \quad (107)$$

5. On retrouve le critère d'instabilité : il y a croissance de la perturbation si $qb < 1$. En outre le mode le plus rapide correspond à

$$\lambda^* = \frac{2\pi}{q^*} = 2\pi\sqrt{2}b \quad \text{et} \quad \tau^* = \frac{12\eta b^4}{\gamma e_0^3} \quad (108)$$