

## Capillarité - TD Agrégation Physique

### 1 Forme d'une goutte sur une fil

**Biblio :** De Gennes Chapitre 1 - annexe.

Nous cherchons à déterminer la forme adoptée par une goutte, initialement sphérique de rayon  $R$ , déposée sur un fil cylindrique de rayon  $b$ <sup>1</sup>. On supposera la goutte assez petite pour pouvoir négliger les effets de la pesanteur<sup>2</sup>. On suppose enfin le problème à géométrie cylindrique, et la forme de la goutte est alors décrite par la fonction  $r(z)$  où  $\mathbf{e}_z$  est l'axe du fil. La situation est représentée FIGURE 1.

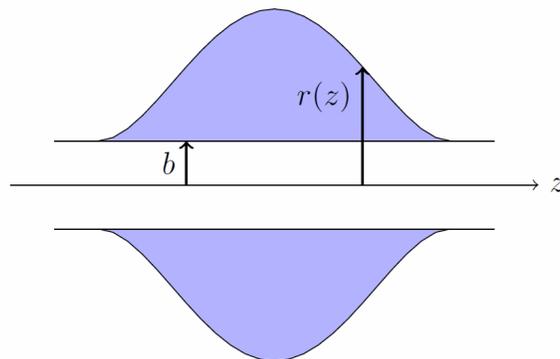


FIGURE 1: Goutte liquide posée sur un cylindre de rayon  $b$ . En négligeant la pesanteur, la goutte adopte une forme ondoïdale.

1. Exprimer en fonction de la fonction  $r(z)$  et sous forme d'une intégrale, l'aire de la goutte ainsi que son volume.
2. On considère la fonctionnelle  $F[z(x)] = \gamma S - \lambda V$  avec  $\lambda$  le multiplicateur de Lagrange pour le volume. Écrire l'équation de Lagrange et l'interpréter comme la somme de deux courbures.
3. À partir d'une intégrale première de l'équation de Lagrange et d'un raccordement lisse  $r'(r = b) = 0$  trouver l'équation de la forme de la goutte. On parle de forme ondoïdale.
4. Quelle est le rayon maximal de la goutte ?

### 2 Relation de Kelvin

La courbure d'une interface liquide-gaz modifie la pression de vapeur saturante. Pour montrer cela, considérons une goutte sphérique de rayon  $r$  de liquide de pression  $P$ , de température  $T$  et de potentiel chimique  $\mu_\ell(T, P)$  plongée dans sa phase gazeuse de pression  $P_0$ , de température  $T_0$  et de potentiel chimique  $\mu_g(T_0, P_0)$ . Montrer qu'à l'équilibre thermodynamique on a la relation de Kelvin :

$$k_B T_0 \rho \ln \frac{P_0}{P_{\text{sat}}(T_0)} = P - P_{\text{sat}}(T_0) + \frac{2\gamma}{r} \quad (1)$$

1. On peut se poser ce genre de problème dans des géométries diverses. Comme nous le verrons plus tard, il s'agit de minimiser la courbure moyenne de l'interface. Par exemple, la forme adoptée par un film de savon tendu entre deux cadres circulaires est une surface appelée caténoïde, dont la courbure moyenne est nulle en tout point.

2. On verra plus tard que cela nécessite que  $R$  soit très petit devant la longueur capillaire.

### 3 Nucléation homogène

**Biblio :** Diu - Supplément G-2.

Étudions en détail le processus de nucléation et considérons un gaz homogène. On étudie le processus de nucléation homogène, c'est-à-dire que la nucléation peut se faire équiprobablement n'importe où dans le volume<sup>3</sup>. On étudie la formation d'un germe sphérique de rayon  $r$  de liquide.

1. Décrire qualitativement quels sont les phénomènes physiques en compétition.
2. On va considérer le gaz comme un thermostat (de température  $T_0$ ), un barostat (de pression  $P_0$ ), et un réservoir de particules (de potentiel chimique  $\mu_g = \mu_0$ ) : c'est la différence avec ce que l'on a fait pour démontrer la loi de Laplace, le système considéré est ouvert. Dès lors, les paramètres d'états pertinents sont la température  $T$  de la goutte, sa pression  $P$ , son potentiel chimique  $\mu_g$  et son rayon  $r$ . Le potentiel thermodynamique adapté est le grand potentiel  $\Omega^*(S, r, N; T_0, P_0, \mu_0) = U + P_0V - T_0S - \mu_0N$  où  $N$  est le nombre de molécules dans la goutte. Plutôt que de seulement chercher le sens d'évolution du système, estimer la barrière énergétique à franchir pour provoquer la transition : au lieu de considérer la différentielle du potentiel (qu'il faudrait ensuite intégrer pour avoir la barrière), on va calculer sa variation  $\Delta\Omega^*$  entre un état de référence sans bulle ( $r = 0$ ) et un état où la bulle a un rayon  $r$  quelconque.
3. Supposons maintenant une séparation des échelles de temps et considérons que les équilibres thermique et mécanique s'établissent rapidement par rapport à l'équilibre osmotique. Dès lors, on peut considérer que  $T = T_0$  et  $P = P_0 + \frac{2\gamma}{r}$ . En outre, on considère le cas de fluides simples pour lesquels le potentiel chimique est imposé par la pression et la température, via l'équation d'état. Effectuer un développement limité de  $\mu_\ell$  et trouver une condition sur  $r$  pour le tronquer au premier ordre. On donne  $\chi_T \sim 4 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  la compressibilité isotherme du liquide.
4. Tracer l'évolution de  $\Delta\Omega^*$  en fonction du signe de  $\mu_\ell - \mu_0$ . Décrire les deux situations et définir et calculer un rayon critique.
5. Cherchons maintenant des ordres de grandeur de la barrière énergétique et du rayon critique. À l'aide d'un développement des potentiels chimiques autour de la pression de vapeur saturante, montrer que le rayon critique et la barrière énergétique s'écrit :

$$r_c = \frac{2\gamma}{\rho k_B T_0} \frac{P_s(T_0)}{P_0 - P_s(T_0)} \quad \text{et} \quad \Delta\Omega^* = \frac{16\pi\gamma^3}{3} \left[ \frac{1}{\rho k_B T_0} \frac{P_s(T_0)}{P_0 - P_s(T_0)} \right]^2 \quad (2)$$

6. Donnons un ordre de grandeur pour une pression supérieure de 1% à la pression de vapeur saturante à  $T_0 = 100^\circ\text{C}$ . Pour de l'eau à cette température,  $\gamma = 59 \text{ mN.m}^{-1}$  et  $\rho = \frac{\rho_m N_A}{M} = 3.2 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  et l'on obtient  $r_c \simeq 7 \times 10^{-8} \text{ m}$  et  $\Delta\Omega_c^* \simeq 1 \times 10^{-15} \text{ J}$ . À quoi fat-il comparer cette énergie ? Proposer un scénario de la nucléation homogène.

### 4 Nucléation hétérogène

**Biblio :** Diu - Complément G.

On va envisager un second scénario de nucléation, qui se produit généralement en l'absence de précaution particulière : on considère à nouveau la liquéfaction d'un gaz, mais cette fois-ci en présence d'impuretés (poussières, défauts sur les parois du récipient...). On étudie maintenant un germe en forme de calotte

---

<sup>3</sup> En pratique, et nous le reverrons ensuite, il est difficile d'observer la nucléation homogène car un autre processus, la nucléation hétérogène, se produit généralement bien avant. Il faut travailler avec des fluides très purs et dans des récipients très lisses, de façon à ce qu'il n'y ait pas de germes autour desquels initier la transition.

sphérique (minimisant la surface) de rayon  $r$  et d'angle de contact, se formant sur la surface solide d'une impureté.

On conserve les notations de la nucléation homogène :  $\mu_\ell$  représente le potentiel chimique du liquide et  $\mu_0$ , celui du gaz qui tient lieu de réservoir. Le calcul de la contribution volumique au grand potentiel  $\Omega^*$  reste valable mais il nous faut changer la contribution surfacique, puisque l'on a maintenant l'intervention d'une phase solide :

$$\Delta\Omega^* = \rho [\mu_\ell(T_0, P_0) - \mu_0(T_0, P_0)] V_{\text{germe}} + \Delta\Omega_{\text{surf}}^* \quad (3)$$

1. Notons  $A_{LG}$  la surface du germe en contact avec la vapeur, et  $A_P$ , celle en contact avec la paroi du substrat. Exprimer, dans l'état de référence, la quantité  $\Delta\Omega_{\text{surf}}^*$  en fonction des surfaces et des tensions superficielles entre les différentes phases.
2. En considérant une situation de mouillage où la loi de Young-Dupré est valable, exprimer la nouvelle barrière énergétique en fonction de la barrière dans le cas homogène et l'angle de mouillage de la loi de Young-Dupré  $\theta$ .
3. Tracer alors le préfacteur en fonction de  $\theta$  et commenter.
4. D'un autre côté montrer que tout se passe comme si on avait une nucléation homogène avec une tension de surface effective baissée.

## 5 Ondes gravito-capillaires

**Biblio :** Guyon, Hulin, Petit - Chapitre 6 & De Gennes - Chapitre 5 & Portelli - Thème 21.

On s'intéresse dans ce exercice aux ondes à la surface d'un fluide au repos, couplant la déformation de la surface au champ de vitesse du fluide. Ces ondes sont aisément observables : vagues, rides engendrées par le vent ou par la chute d'un objet...

Considérons l'exemple d'un caillou tombant dans l'eau : si on est attentif on observe après quelques instants l'existence de deux séries d'ondes, l'une étant plus rapide et à des longueurs d'ondes plus courtes. Nous allons tenter d'expliquer ces observations.

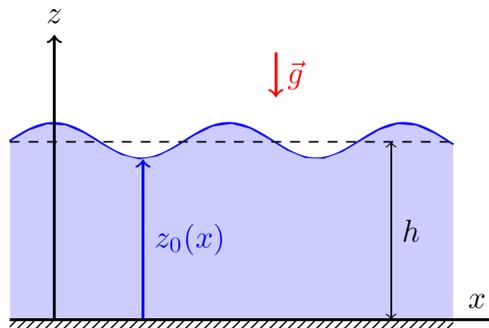


FIGURE 2: La surface d'une couche de fluide d'épaisseur  $h$  est perturbée par des vaguelettes. On note  $z_0(x, t)$  l'altitude de la surface libre.

Considérons un fluide, infini dans les directions horizontales  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$ , reposant sur un fond plat, de normale  $\mathbf{e}_z$  et qui fixe l'origine des altitudes. On note  $h$  l'épaisseur du fluide au repos et  $\rho$  sa masse volumique. On s'intéresse au problème bidimensionnel dans le plan  $(Oxz)$ . On note  $\mathbf{v}(x, z, t)$  le champ de vitesse de l'écoulement,  $P(x, z, t)$  le champ de pression et  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$  le champ de pesanteur. Notons enfin  $z_0(x, t)$  l'altitude de la surface libre. Les notations sont résumées dans la FIGURE 2. On va étudier la propagation d'ondes à la surface du fluide, problème couplant l'écoulement en volume du fluide et la déformation de sa surface. Qualitativement, trois phénomènes sont en compétition : l'inertie du fluide

tend à le faire persévérer dans son mouvement, alors que la pesanteur et la tension superficielle tendent respectivement à abaisser le centre de gravité du fluide et à en lisser la surface.

1. En considérant le fluide comme parfait, écrire les équations de la dynamique des fluides.
2. Montrer que la vitesse, de rotationnel nul, découle d'un potentiel  $\phi$ . Réécrire alors l'équation de la dynamique comme le gradient d'une quantité égal à zéro.
3. En négligeant le terme quadratique (à justifier) écrire alors la relation de Bernoulli obtenue.
4. Quels sont les trois conditions limites à prendre en compte ?
5. Dans le cas des faibles amplitudes, on peut prendre les conditions en  $z = h$  plutôt que en  $z = z_0(x, t)$ . En déduire l'équation satisfaite par le potentiel des vitesses à la surface  $z = z_0 \simeq h$ .
6. Pour résoudre le problème, il faut chercher la solution sous la forme d'une onde de surface plane progressive se propageant selon  $\mathbf{e}_x$  et inhomogène selon  $z$ . Nous procédons donc à une séparation des variables  $z$  et  $u = x - ct$  avec  $c$  la célérité de l'onde à déterminer :

$$\phi(x, z, t) = \chi(u)\psi(z) \quad (4)$$

Trouver les équations satisfaites par  $\chi$  et  $\psi$ , les résoudre avec les conditions aux limites et donner la solution pour  $\phi$ .

7. Trouver alors la relation de dispersion, calculer la vitesse de phase. On exprimera les résultats en fonction d'une longueur caractéristique :

$$\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (5)$$

appelé longueur capillaire.

8. L'hypothèse de petite perturbation implique trois conditions sur l'amplitude de la vitesse, et l'interface. Quelles sont-elles ? Les quantifier.
9. En déduire un temps caractéristique du problème en lien avec la dissipation visqueuse.
10. Il est possible de faire une analyse dimensionnelle du problème afin de retrouver certains résultats. Pour cela il faut lister les différents paramètres qui interviennent dans le problème. On a la masse volumique  $\rho$ , l'accélération de la pesanteur  $g$ , la tension de surface  $\gamma$ , l'épaisseur du fluide  $h$ , la pulsation de l'onde  $\omega$ , son nombre d'onde  $k$ , et l'amplitude de la perturbation de la surface libre  $A_0$ . Construire les nombres sans dimension possible. Quelle est la forme de la relation de dispersion dans ce cas ?
11. En se plaçant dans le cas d'eaux profondes et d'une onde de faible amplitude, retrouver les comportements asymptotiques de la relation de dispersion.
12. Discussion :
  - (a) Tracer la relation de dispersion et discuter de celle-ci en fonction de la valeur de  $kh$  ou de  $k\ell_c$ .
  - (b) Que dire de la dissipation visqueuse ?
  - (c) Écrire la vitesse dans l'écoulement. En déduire les trajectoires des particules de fluide. Que deviennent ces trajectoires dans le cas des eaux profondes ?

## 6 Cohésion capillaire

**Biblio :** DeGennes - Chapitre 1, Israelachvili - Chapitre 17.

La condensation capillaire explique la propension des matériaux granulaires à prendre l'humidité. En effet, de nombreux pores nanométriques existent, et permettent le stockage d'eau liquide. Les ponts capillaires ainsi formés à l'intérieur des pores exercent des forces attractives entre grains, responsables de la cohésion des matériaux granulaires humides. On considère une goutte de rayon  $A$  entre deux plans, séparés de  $h$  comme représenté sur la FIGURE 3.

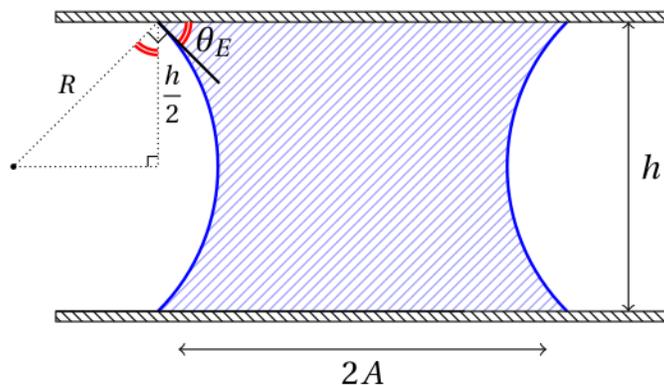


FIGURE 3: Cohésion capillaire entre deux plans.

1. Calculer le travail nécessaire pour éloigner les deux plaques de  $dh$ .
2. En déduire la forme de traction exercée par le pont capillaire.
3. Discuter en fonction de  $\theta_E$ .

## 7 Imprégnation et loi de Washburn

**Biblio :** Guyon - Chapitre 1, DeGennes - Chapitre 5.

Un liquide a tendance à envahir spontanément une matrice poreuse qu'il mouille. C'est ce que l'on observe par exemple en trempant un sucre dans du café.

On va ici considérer le problème de l'imprégnation entre deux plaques de largeur  $w$ , distantes de  $e \ll w$ , placées au contact d'un réservoir de liquide à la pression atmosphérique. Nous supposons les plaques horizontales, de façon à ne pas considérer l'influence de la pesanteur<sup>4</sup>.

Nous allons ici adopter une description hydrodynamique du problème : le mouillage impose un angle de contact, donné par la loi de Young-Dupré, et donc une courbure de l'interface. Le liquide au niveau de l'interface est alors en dépression par rapport au réservoir et un écoulement s'établit. Trois phénomènes entrent en compétition : la dépression due à la capillarité, moteur de l'écoulement d'une part, et l'inertie et les frottements visqueux, qui s'y opposent d'autre part.

Plus précisément, nous allons résoudre l'équation de Navier-Stokes. Soit  $\mathbf{e}_z$  l'axe de l'écoulement et  $\mathbf{e}_x$  l'axe orthogonal aux plaques, on prendra l'origine à l'entrée des plaques, au milieu du canal, comme présenté FIGURE 4. Loin de l'interface, le profil de vitesses prend alors la forme  $\mathbf{v} = v(x)\mathbf{e}_z$

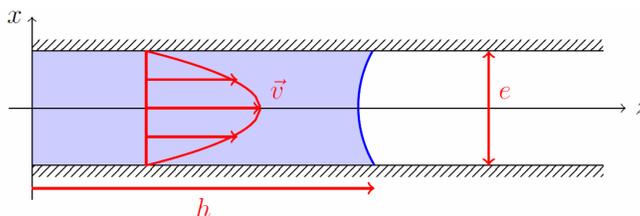


FIGURE 4: Infiltration d'un liquide entre deux plans horizontaux distants d'une épaisseur  $e$ . La zone  $z < 0$  est occupée par un réservoir de liquide à pression atmosphérique.

4. Le résultat obtenu est également valable aux premiers instants de la montée dans un dispositif vertical, tant que le poids du fluide soulevé reste négligeable devant les forces capillaires.

1. On suppose tout d'abord être en régime stationnaire. Cela peut sembler étrange puisque  $h$  dépend du temps, justifier alors cette approximation. Écrire l'équation de Navier-Stokes.
2. En calculant le gradient de pression en déduire le profil de vitesse  $v(x)$ .
3. En déduire le débit.
4. Trouver alors la loi de pénétration  $h(t)$ . Quelle est sa dépendance avec le temps ?
5. En présence de pesanteur, dans quel cas cette relation reste valable ?

## 8 Écoulements quasi-parallèles

**Biblio :** Guyon - Chapitre 8, Oswald - Chapitre 3.

Nous allons ici nous intéresser à des écoulements de fluides dont les lignes de courant sont quasiment parallèles, comme cela se produit dans les écoulements confinés entre deux parois proches, ou dans un film mince.

### 8.1 Approximation de lubrification

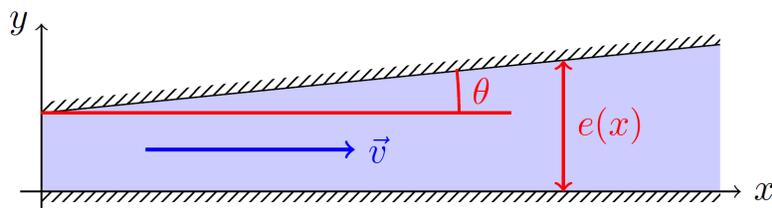


FIGURE 5: Écoulement quasi-parallèle entre deux plaques planes formant un petit angle  $\theta$ .

Considérons le cas particulier, schématisé FIGURE 5, d'un écoulement principalement selon la direction  $\mathbf{e}_x$ , entre deux parois planes. La paroi inférieure définit le plan  $(xz)$ , et la paroi supérieure forme un angle  $\theta$  avec l'autre, de sorte que la distance séparant les plans dans la direction  $\mathbf{e}_y$  s'écrit  $e(x) = e_0 + x \sin \theta$ .

La première hypothèse de l'approximation de lubrification consiste à supposer que les variations des grandeurs dans la direction orthogonale à l'écoulement moyen sont lentes (écoulement quasi-parallèle), soit ici

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \sin \theta \ll 1 \quad \text{et donc} \quad \sin \theta \sim \theta \ll 1 \quad (6)$$

L'angle  $\theta$  nous servira de paramètre suffisamment petit par la suite.

1. Notons  $U$  la vitesse caractéristique dans la direction de l'écoulement moyen (c'est-à-dire selon  $\mathbf{e}_x$ ) et  $V$ , celle selon la direction transverse (c'est-à-dire selon  $\mathbf{e}_y$ ). Donner l'ordre de grandeur de  $\frac{U}{V}$  en fonction de  $\theta$ .
2. Écrire l'équation de Navier-Stokes. Montrer alors par une analyse en ordre de grandeur que l'équation de Navier-Stokes stationnaire se réduit à

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

3. Quantifier l'hypothèse de stationnarité de l'écoulement.

## 8.2 Équation de Reynolds pour un film mince

Tout ceci nous permet de résoudre la situation suivante : considérons maintenant le cas d'un écoulement mince à surface libre au dessus d'une paroi plane immobile, en conservant les notations du paragraphe précédent.

1. Quelles sont les conditions aux limites d'un tel problème ?
2. Résoudre les équations du paragraphe précédent pour trouver le profil de vitesse.
3. Calculer le débit  $Q(x, t)$  en fonction de l'épaisseur  $e(x, t)$ .
4. En déduire l'équation de Reynolds :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} e^3(x, t) \right] \quad (7)$$

## 9 Instabilité de Rayleigh-Taylor

**Biblio :** Guyon - Chapitre 1, DeGennes - Chapitre 5.

### 9.1 Analyse qualitative

Nous allons nous intéresser à l'instabilité d'un film mince infini suspendu : on constate qu'il se déforme en une série de gouttelettes, organisées de façon assez régulière si la surface est lisse. C'est ce que l'on observe pour les gouttelettes de condensation sur la paroi intérieure haute d'un réfrigérateur, sur la plaque recouvrant une casserole, ou encore dans une bouteille d'eau.

Cette instabilité résulte de la compétition entre la tension de surface, qui tend à aplanir le film, et la gravité qui tend à abaisser son centre de gravité, mais à volume imposé.

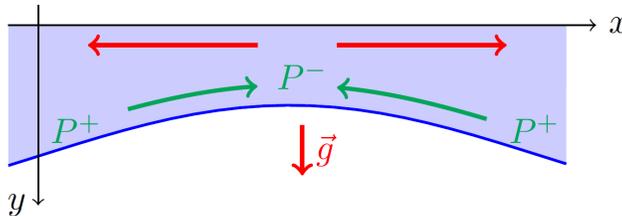


FIGURE 6: Un film de liquide suspendu à une paroi se déstabilise pour former un ensemble de gouttelettes. L'instabilité résulte de la compétition entre la pesanteur, qui tend à abaisser le centre de gravité du film en induisant un écoulement vers les zones les plus basses, et la tension superficielle, qui tend à minimiser la courbure de l'interface en ramenant du fluide vers les régions concaves.

Plus précisément, considérons que le film s'amincisse localement suite à une perturbation, comme représenté FIGURE 6. La courbure occasionnée induit une légère dépression derrière le creux du fait de la tension de surface : on a donc génération d'un gradient de pression, induisant à son tour un écoulement en direction du creux. Au contraire, la pesanteur induit un écoulement vers les zones qui se sont abaissées, c'est-à-dire vers l'extérieur du creux.

### 9.2 Recherche des modes instables

Pour simplifier le formalisme, considérons une situation bidimensionnelle, dans le plan  $(xy)$ . Nous allons maintenant effectuer une analyse en modes normaux, c'est-à-dire que nous allons étudier l'évolution temporelle de perturbations de la forme  $e(x, t) = e_0 + \delta e(t) \cos(qx)$ , avec  $\delta e(t) \ll e_0$ . Cherchons tout d'abord quels modes  $q$  sont instables. Pour ce faire, évaluons la variation d'énergie associée à la perturbation sur une longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{q}$ .

### 9.3 Taux de croissance

Bien qu'il existe une infinité de modes instables, seul l'un d'entre eux est expérimentalement observé : la sélection est faite par la cinétique de croissance. Le mode observé est celui dont le taux de croissance est le plus élevé.

Afin d'étudier la dynamique de l'instabilité, nous utilisons l'équation de Reynolds obtenue précédemment. On n'oubliera pas, pour orienter les axes, que dans notre étude, l'axe  $y$  pointait vers la surface libre : il est donc descendant ici.

1. Calculer le gradient de pression dans ce cas.
2. En injectant le gradient de pression et la forme de  $e$ , en déduire l'équation sur  $\delta e$ .
3. Quelle est l'évolution de  $\delta e$  ? Déterminer un temps caractéristique  $\tau$ .
4. Tracer  $\tau(q)$  et déterminer le mode observé expérimentalement.

## 10 Instabilité de Rayleigh-Plateau

**Biblio :** Guyon - Chapitre 8, DeGennes - Chapitre 5 & Hulin - Partie 3.

### 10.1 Analyse qualitative

Intéressons-nous maintenant à une seconde instabilité, d'origine purement capillaire cette fois-ci : l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Un jet de liquide peut se déstabiliser pour former des gouttelettes : on peut l'observer sur le jet d'un robinet, s'il est assez long et à débit suffisamment faible, ou encore avec les perles de rosée sur les toiles d'araignées.

Schématiquement, il s'agit de comparer la surface d'un cylindre  $A_c = 2\pi R h$ , de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ , et d'une assemblée de  $N$  gouttes sphériques de rayon  $r$ ,  $A_g = 4\pi r^2 N$ . La conservation du volume impose  $\pi R^2 h = \frac{4}{3} N \pi r^3$  donc  $A_c > A_g$  si  $r > \frac{3}{2}$ .

Avant de quantifier plus précisément cette instabilité, assurons-nous que la pesanteur n'intervient pas dans le problème en estimant le nombre de Bond. La contribution de l'énergie de pesanteur est négligeable tant que  $\text{Bo} = \left(\frac{R}{\ell_c}\right)^2 \ll 1$  c'est très correct pour la formation de perles de rosées ou pour de fins filets d'eau.

### 10.2 Analyse en modes normaux

Considérons un film d'eau de rayon  $R_0$  autour d'un fil cylindrique de rayon  $b$  et d'axe  $\mathbf{e}_x$ . On étudie l'évolution temporelle d'une perturbation axisymétrique de la forme  $R(x) = R^* + \delta R(t) \cos(qx)$ , avec  $\delta R \ll R^*$ , représentée FIGURE 7.

1. En raison de la contrainte de conservation du volume<sup>5</sup>  $R^* \neq R_0$ . Trouver une expression de  $R^*$  en fonction de  $\delta R$  au second ordre.
2. Quelle est la variation d'énergie associée à cette perturbation ? Trouver une condition sur  $qR_0$  pour que le mode soit instable.
3. À nouveau, malgré l'existence d'une infinité de modes instables, seul se développe le plus rapide. Pour le déterminer, nous nous plaçons dans l'approximation de lubrification en supposant en particulier l'épaisseur  $e = R - b$  du film faible devant le rayon  $b$  du cylindre. Le gradient de pression responsable de l'écoulement est le gradient de pression de Laplace. Exprimer la courbure du fluide.
4. Écrire l'équation de Reynolds et trouver l'évolution de l'épaisseur de liquide au cours du temps.
5. Quelle est le mode observé expérimentalement ?

---

5. Nous pourrions, plutôt que de l'imposer ici, la rajouter dans l'expression de l'énergie avec un multiplicateur de Lagrange.

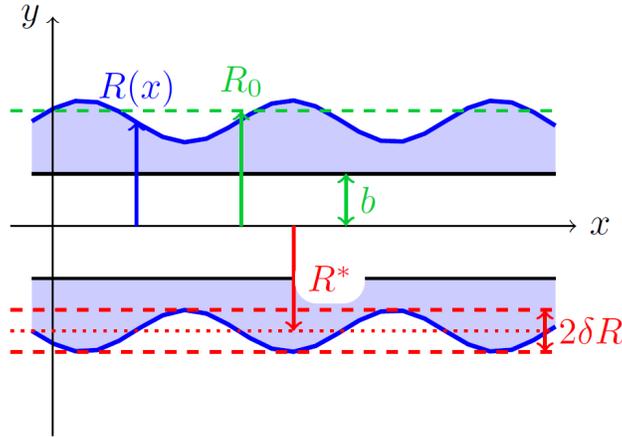


FIGURE 7: Un film de liquide de rayon  $R_0$  est déposé sur un cylindre de rayon  $b$ . Une perturbation axisymétrique de l'interface de longueur d'onde suffisante peut croître : le cylindre de fluide se déstabilise alors pour former un chapelet de gouttelettes.

## 11 Instabilité de Saffman-Taylor

**Biblio** : Oswald - Chapitre 3.

Jusque là, nous nous sommes intéressés à des instabilités dont la capillarité est l'un des moteurs. Elle intervient de façon plus générale dans les instabilités impliquant des déformations d'une interface : la tension de surface doit être prise en compte dans les conditions aux limites sur la pression, et elle introduit des termes non-linéaires qui saturent l'instabilité quand elle se développe. On peut citer par exemple l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, apparition de vagues à l'interface entre deux fluides de viscosités différentes et poussés à des vitesses différentes, ou l'instabilité de Faraday, apparition de vagues à la surface d'un fluide que l'on fait vibrer verticalement.

Intéressons-nous plus précisément à l'instabilité de digitation visqueuse de Saffman-Taylor. Lorsqu'un fluide est poussé dans un autre fluide plus visqueux, le front tend à se déstabiliser en doigts de différentes tailles. Nous nous contenterons d'une analyse qualitative de cette instabilité et d'une estimation dimensionnelle de la longueur d'onde critique.

Considérons une cellule de Hele-Shaw, c'est-à-dire un canal de section rectangulaire, de largeur  $b$  et d'épaisseur  $e \ll b$ , initialement rempli d'un fluide (2) de viscosité  $\eta$  et dans lequel on injecte un fluide (1) de viscosité négligeable.

L'injection est réalisée en maintenant une différence de pression entre l'entrée (à la pression  $P_1$ ) et la sortie (à la pression atmosphérique  $P_0 < P_1$ ) de la cellule. L'écoulement obtenu est alors de type Poiseuille, bidimensionnel dans le plan  $(xy)$  où  $\mathbf{e}_x$  désigne la direction d'injection du fluide, et satisfait à la loi de Darcy :

$$\mathbf{v} = -\frac{b^2}{12\eta} \nabla P \quad (8)$$

L'interface est initialement plane et nous considérons une perturbation, de sorte qu'un point  $A$  de l'interface se retrouve en avance par rapport à un point  $B$  proche. La viscosité du fluide (1) étant négligeable devant celle du fluide (2), la chute de pression due à la dissipation visqueuse se produit principalement dans le fluide (2). La pression en amont de l'interface peut donc être considérée comme homogène et égale à  $P_1$ . Dans un premier temps, si l'on ne considère pas la tension de surface, la pression est également constante et égale à  $P_1$  juste en aval de l'interface. Considérons alors deux lignes de courant  $\mathcal{C}_A$  et  $\mathcal{C}_B$ , reliant l'entrée de la cellule et la sortie de la cellule, l'une passant par  $A$  et l'autre par  $B$ , et représentées FIGURE 8. Le point  $B$  étant en arrière,  $\mathcal{C}_B$  parcourt une plus grande distance dans le fluide (2) que  $\mathcal{C}_A$  :

la pression en sortie étant égale à  $P_0$  pour les deux lignes, le gradient de pression le long de  $C_A$  est donc nécessairement supérieur à celui le long de  $C_B$ . Dès lors, la loi de Darcy impose que la vitesse soit plus élevée le long de  $C_A$ , entraînant une croissance de la perturbation. Ce mécanisme est déstabilisant.

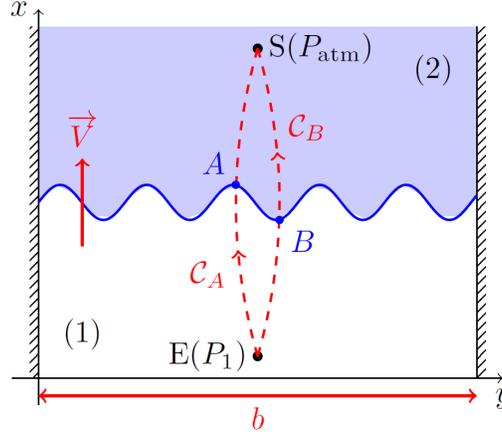


FIGURE 8: Dans une cellule de Hele-Shaw de largeur  $b$ , un fluide (1) injecté au point  $E$  pousse un fluide (2) plus visqueux, ressortant par le point  $S$ . La pression est imposée en  $E$  et en  $S$ . La loi de Darcy implique que la vitesse le long du chemin  $C_A$  est plus élevée que celle le long du chemin  $C_B$ , ce qui mène à une croissance de la perturbation en l'absence de tension de surface.

Si l'on prend en compte la tension de surface, il y a une discontinuité de pression due à la courbure de l'interface : la pression n'est plus constante juste en aval de l'interface, ce qui tend à atténuer l'instabilité. La tension de surface a un effet stabilisant sur l'interface plane.

L'instabilité va donc se développer si le gradient de pression associé à la loi de Darcy domine le gradient de pression de Laplace. Notons  $V$  la vitesse de l'interface, qui donne l'ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement.

Pour une déformation sinusoïdale de l'interface, de longueur d'onde  $\lambda$ , le gradient de pression lié à la loi de Darcy peut être estimé par  $(\nabla P)_{\text{Darcy}} \sim \frac{\eta V}{b^2}$  alors que le gradient de pression de Laplace est donné par  $(\nabla P)_{\text{Laplace}} \sim \frac{\gamma}{\lambda^2}$ ,  $\lambda$  donnant à la fois un ordre de grandeur de la courbure et de la distance typique de variation de pression. Dès lors, l'interface se déstabilise quand

$$(\nabla P)_{\text{Darcy}} > (\nabla P)_{\text{Laplace}} \quad \text{soit} \quad \lambda > b \sqrt{\frac{\gamma}{\eta V}} = \frac{b}{\sqrt{\text{Ca}}} \quad (9)$$

On définit le nombre capillaire par

$$\text{Ca} = \frac{\eta V}{\gamma} \quad (10)$$

qui compare l'influence de la dissipation visqueuse à la tension de surface. Ce nombre sans dimension est pertinent dès que l'on s'intéresse aux propriétés interfaciales d'un système où une vitesse d'écoulement est imposée. C'est par exemple le cas pour l'étude de l'entraînement d'un film fluide par tirage d'une plaque (films de Landau Levich) ou pour l'étude des angles de mouillage dynamiques. Le nombre capillaire intervient aussi en rhéologie de fluides contenant des bulles ou des gouttes (comme les émulsions) afin de déterminer si les inclusions se déforment lors de l'écoulement. Un calcul plus précis et plus général permet d'obtenir la relation de dispersion reliant le taux de croissance au vecteur d'onde de la perturbation, comme nous l'avons fait pour l'étude des instabilités de Rayleigh-Taylor et Rayleigh-Plateau. Il est en outre possible de déterminer la forme du doigt principal, une fois l'instabilité développée. On trouve que sa largeur diminue quand la vitesse d'injection du fluide augmente : c'est un problème dans le cadre de l'extraction secondaire de pétrole. Non seulement, la formation d'un doigt empêche la récupération de l'intégralité du pétrole, mais en plus, augmenter la vitesse d'injection, et donc le débit, diminue la fraction récupérée.

## 12 Effet Marangoni

**Biblio :** Guyon - Chapitre 8 & DeGennes - Chapitre 10 & Hulin - Partie 3.

Nous avons vu que l'existence de gradients de pression de Laplace pouvaient induire un écoulement : c'est également le cas si des gradients de tension de surface existent à la surface d'un fluide. Un écoulement se produit alors en direction des zones de forte tension de surface. Il s'agit de l'effet Marangoni. Le traitement rigoureux des écoulements engendrés par cet effet peut par exemple se faire dans le cadre de l'approximation de lubrification. Nous nous contenterons ici de quelques remarques qualitatives.

De tels gradients de pression de Laplace peuvent être causés par un gradient thermique, la tension de surface dépendant de la température. On parle alors d'effets thermocapillaires. Un cas classique d'effet thermocapillaire est l'instabilité d'une couche de fluide à surface libre chauffée par le bas. On observe l'apparition de cellules de convection s'organisant en un réseau hexagonal : il s'agit de l'instabilité de Bénard-Marangoni.

Ils peuvent également être créés en présence de tensioactifs répartis de façon inhomogène à la surface du fluide. C'est ce qui explique la montée d'un film liquide d'une solution contenant un alcool le long des parois d'un récipient. Dans le ménisque, l'évaporation de l'alcool est plus rapide que dans le volume. Or, l'alcool abaisse la tension de surface de l'eau : le haut du ménisque a donc une tension superficielle plus importante, et le ménisque monte le long de paroi, laissant un film mince derrière lui. Le film se finit, dans sa partie supérieure, par un bourrelet qui finit par se déstabiliser sous l'influence de la pesanteur, et par former des gouttes qui redescendent (les larmes).

Deux expériences simples permettent de mettre cet effet en évidence. Dans un cristalliseur d'eau (propre) à la surface de laquelle on a répandu du poivre, on plonge un couteau dont la pointe a été légèrement enduite de savon. On observe que le poivre s'éloigne du couteau. En effet, les molécules de savon, tensioactives, se répandent à partir de la pointe en abaissant la tension de surface localement : elles induisent ainsi un écoulement vers les zones de forte tension de surface, qui éloigne le poivre du couteau. Cependant, l'effet ne peut se répéter un grand nombre de fois : quand la surface est recouverte de molécules de tensioactifs, il n'y a plus de modification de la tension de surface. De la même façon, on peut faire un "bateau" autopulsé avec une aiguille dont on a plongé une extrémité dans du savon : l'écoulement généré par la dissolution des tensioactifs induit un mouvement de l'aiguille tant que la surface de l'eau n'est pas saturée.