

# Electromagnétisme des milieux matériels

Ch1 : équations de Maxwell dans la matière

Ch2 : mécanismes de polarisation, indice de réfraction

Ch3 : milieux aimantés, aspects thermodynamiques

Ch4 : ferromagnétisme

Bibliographie subjective :

- Bertin Faroux Renault électromagnétisme IV, milieux matériels à lire pour un cours. Présentation au niveau CPGE avant 2004
- Hprépa, PSI-PSI\* électronique II à lire pour sa partie TP cours sur les ferromagnétiques. Les expériences marchent telles que décrites.
- Kittel et/ou Aschcroft, physique de l'état solide
- Diu physique statistique
- Callen : Thermodynamique (pour ces aspects et pour le reste)
- Ollivier & Gié : Thermodynamique (lien avec les potentiels thermo)
- Jackson, électrodynamique classique (pour la rigueur et certains résultats qu'on ne trouve que dans ce livre).
- Perez, électromagnétisme (assez complet mais le découpage rend son accès difficile)

# Ch 1 : Equations de Maxwell dans la matière

Bibliographie du chapitre :

- BFR, électromagnétisme III, magnétisme et induction
- BFR, électromagnétisme IV, milieux matériels
- Jackson, électrodynamique classique
- Perez, électromagnétisme

## I - Introduction

On s'intéresse ici à l'action d'un champ électrique ou magnétique sur la matière qui permet de distinguer différents types de matériaux.

Milieu conducteur : possède des charges libres.  
Le champ électrique y est nul en régime permanent.

Milieu isolant ou diélectrique : localement neutre, peut être traversé par un champ électrique. Un champ électrique extérieur le polarise en déplaçant légèrement les charges liées.

Milieu magnétique : conducteur ou non, se magnétise en présence d'un champ magnétique, ou au voisinage d'un aimant

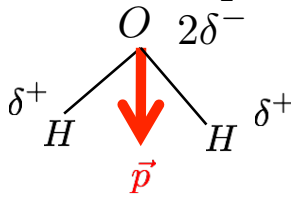
En général : la réponse n'est non nulle que si le champ imposé est non nul (moment dipolaire électrique/magnétique induit).

Les milieux ferromagnétiques sont courant (Fe, Ni, Co), et présentent une aimantation spontanée. Nombreuses applications industrielles.

Les milieux ferro-électriques sont plus rares (ex  $\text{BaTiO}_3$ ) et ne seront pas traités dans ce cours.

## I. 1 Origine de la polarisation

Molécules polaires (H<sub>2</sub>O), localement neutre  $\sum q_i = 0$



Moment dipolaire  $\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i$

Quantité intrinsèque

[Debye] 1 D = 0.33 10<sup>-29</sup> C.m

Rappel, actions subies par un dipôle :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}_{ext} \quad \vec{\Gamma}(O) = \vec{p} \times \vec{E}_{ext} \quad U_{int} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$$

Effet d'orientation dans un champ externe :

$\vec{E}_{ext} = \vec{0}$

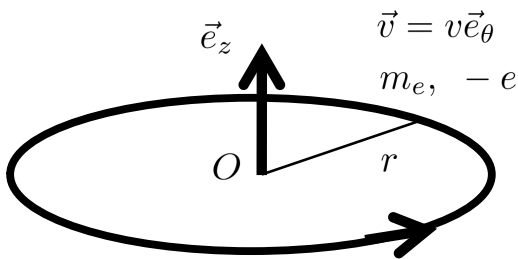
$\vec{E}_{ext} \neq \vec{0}$

Force totale

$$\vec{F}_{tot} = \left( \sum \vec{p}_i \right) \cdot \text{grad} \vec{E}_{ext}$$

## I. 2 Origine de l'aimantation

**Modèle classique** : électron en orbite circulaire uniforme autour d'un noyau



Moment cinétique  $\vec{l} = m_e r v \vec{e}_z$

Courant moyen  $I = \frac{-e}{T} = \frac{-ev}{2\pi r}$

Moment dipolaire magnétique (rappels en annexe 2)

$$\vec{m} = IS \vec{n} \quad \vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{l}$$

**Modèle quantique** :

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} g_J \vec{J} \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

Moment orbital pur  $g = 1 \quad L_z = m_z \hbar$

Spin pur  $g = 2 \quad S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$

**Ordre de grandeur**

$$m = \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \sim 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad \mathcal{M} = \mathcal{N}_A \mu_B \sim 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

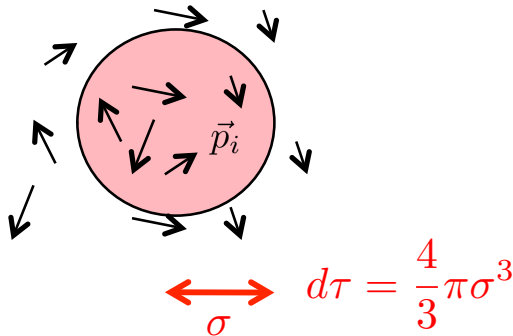
Le magnétisme est dû au moment cinétique des électrons, pas des protons

### I. 3 Du microscopique au macroscopique

Les charges, courants, dipôles microscopiques sont sources de champs variant à l'échelle des distances interatomiques.

Les champs mesurés E et B sont macroscopiques

Ensemble de dipôles moléculaires



**Description de type milieu continu**

**Moyenne sur un volume mésoscopique**

$$a \ll \sigma \ll (L_E, L_B, \dots)$$

**Polarisation**  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{\sum_{i \in d\tau} \vec{p}_i}{d\tau}$

$$[P] = \text{C.m}^{-2} \quad [P] = \text{A.s.m}^{-2} \text{ S.I.}$$

**Aimantation** d'un milieu magnétique

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \frac{\sum_{i \in d\tau} \vec{m}_i}{d\tau}$$

$$M = \text{A} \cdot \text{m}^{-1}$$

### II – Charges et courants équivalents

Les équations de Maxwell sont valables à l'échelle microscopique. Les champs e et b varient à l'échelle de la maille atomique.

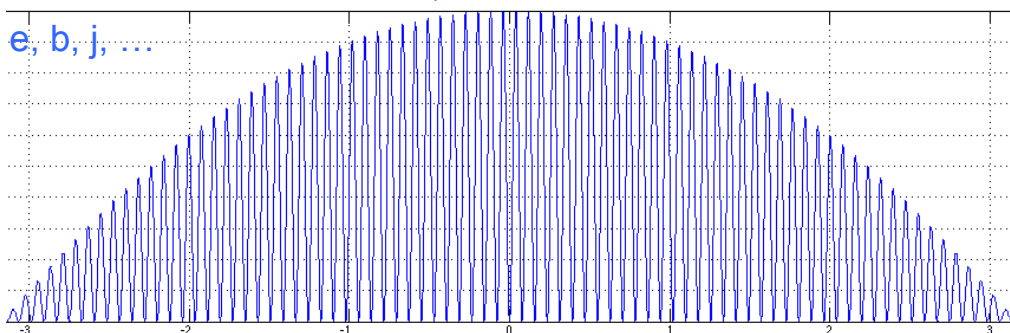
$$\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{b} = \mu_0 \vec{j}_{\text{micro}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \frac{\rho_{\text{micro}}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$$

Grandeur brute, varie à l'échelle de la maille



E, B, P et M sont des grandeurs macroscopiques définies par **lissage** des quantités microscopiques

Les grandeurs macroscopiques, mesurables, sont définies par lissage spatial à l'aide d'une fenêtre de taille mésoscopique

Fenêtre de lissage

$$W_\sigma(\vec{r}) = A \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

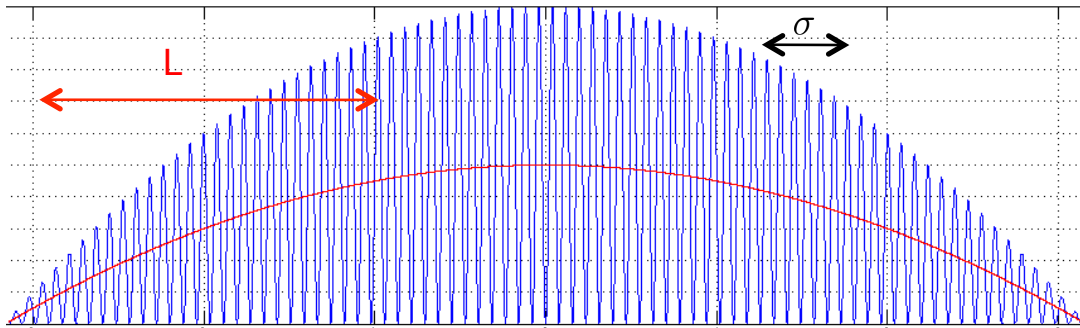
$\sigma$  échelle mésoscopique

Champs macroscopiques (lissés)

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \langle \vec{b} \rangle_\sigma = \iiint_{\infty} \vec{b}(\vec{r}', t) W_\sigma(\vec{r} - \vec{r}') d\tau$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \langle \vec{e} \rangle_\sigma = \iiint_{\infty} \vec{e}(\vec{r}', t) W_\sigma(\vec{r} - \vec{r}') d\tau$$

$e, b, j$ , grandeurs micro, varient à l'échelle de la maille



$E, B, J$ , grandeurs lissées, ne varient qu'à l'échelle macroscopique  $L$

Propriétés de commutations :

$$\left\langle \frac{\partial e_j}{\partial t} \right\rangle_\sigma = \iiint_{\infty} \frac{\partial e_j(\vec{r}')}{\partial t} W_\sigma(\vec{r} - \vec{r}') d\tau = \frac{\partial \langle e_j \rangle_\sigma}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \langle e_j \rangle_\sigma}{\partial x_j} = \left\langle \frac{\partial e_j}{\partial x_j} \right\rangle_\sigma$$

Equations de Maxwell macroscopiques

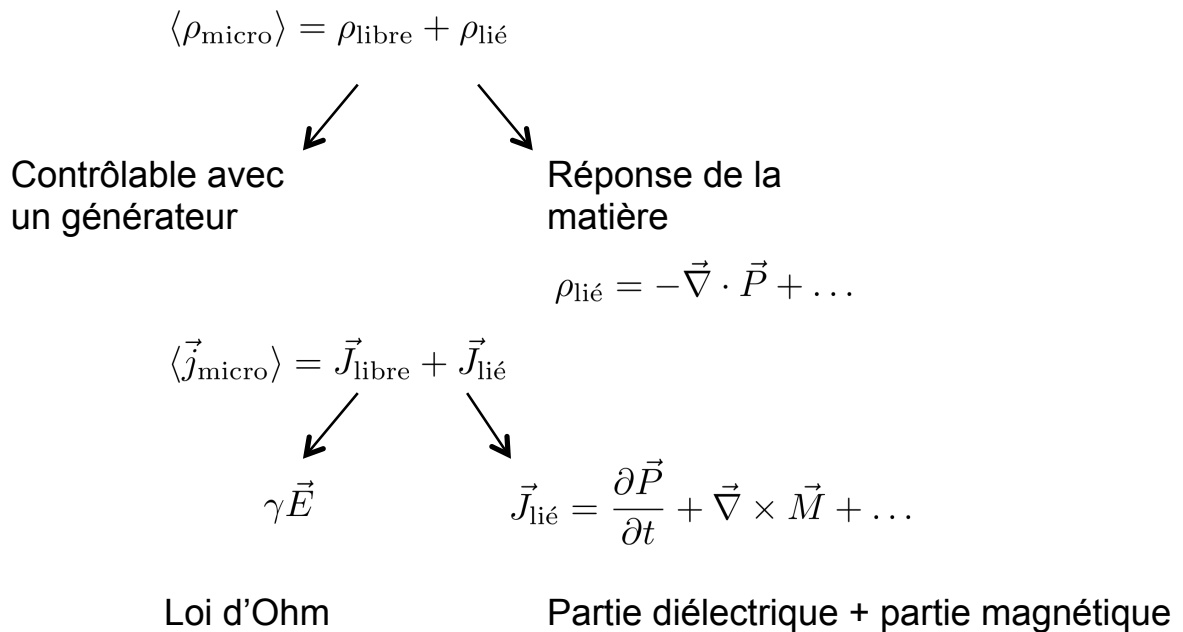
$$\langle \vec{\nabla} \times \vec{e} \rangle = -\left\langle \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \right\rangle \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{e} \rangle = \frac{\langle \rho_{\text{micro}} \rangle}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\langle \rho_{\text{micro}} \rangle}{\epsilon_0}$$

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\langle \vec{\nabla} \times \vec{b} \rangle = \mu_0 \langle \vec{j}_{\text{micro}} \rangle + \mu_0 \epsilon_0 \left\langle \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right\rangle \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \langle \vec{j}_{\text{micro}} \rangle + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Il apparaît la densité de charge lissée et le courant lissé.  
On fait la différence entre charges libres et charges liées.



Les charge et courant liés doivent vérifier la conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho_{\text{lié}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{lié}} = 0$$

Pour trouver le lien entre P, M, qui sont des grandeurs lissées et les distributions de charge et courant liés, il y a deux approches :

**Une première démarche macroscopique (la nôtre dans la suite).**

Elle consiste à partir des résultats connus pour le dipôle électrique ou magnétique (lire les annexes 1 et 2 pour des rappels) pour trouver quelles distributions de charge et de courant créeraient le même potentiel qu'une distribution donnée de polarisation et d'aimantation

**Une seconde démarche directe de lissage des distributions de charges et courants microscopiques (Annexe 3\*\*\*).**

$$\rho_{\text{lié}} = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$$

$$\vec{j}_{\text{lié}} = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \dot{\vec{\xi}}_{i\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$$

Elle est présentée à la fin de ce document, est très intéressante conceptuellement, mais peut être sautée dans le cadre de leçons à présenter à l'agrégation.

**Les deux démarches conduisent aux mêmes résultats**

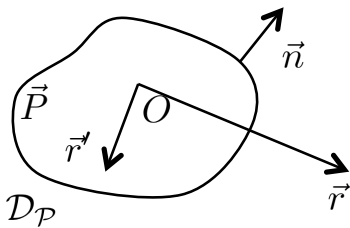
## II-A Distribution de charges de polarisation

But : trouver le lien entre densité de charge lissée et polarisation.

On utilise le résultat connu du potentiel créé par un dipôle ponctuel

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}} \quad (\text{rappel Annexe 1})$$

Extension au cas d'une distribution de polarisation :  $\vec{P} = \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \vec{P}(\vec{r}') d^3\vec{r}'$



Le milieu est localement neutre, th. de superposition

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}'$$

Identique au potentiel créé  
par la distribution de charges fictives

volumique  
 $\rho_{\text{lié}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

surfactive  
 $\sigma_{\text{lié}} = -\vec{P} \cdot \vec{n}$

**Démonstration :** 
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

On écrit :

$$\vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

L'intégrale devient :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

Le second terme est une intégrale de surface

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\vec{r}' \in \partial\mathcal{D}_P} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS$$

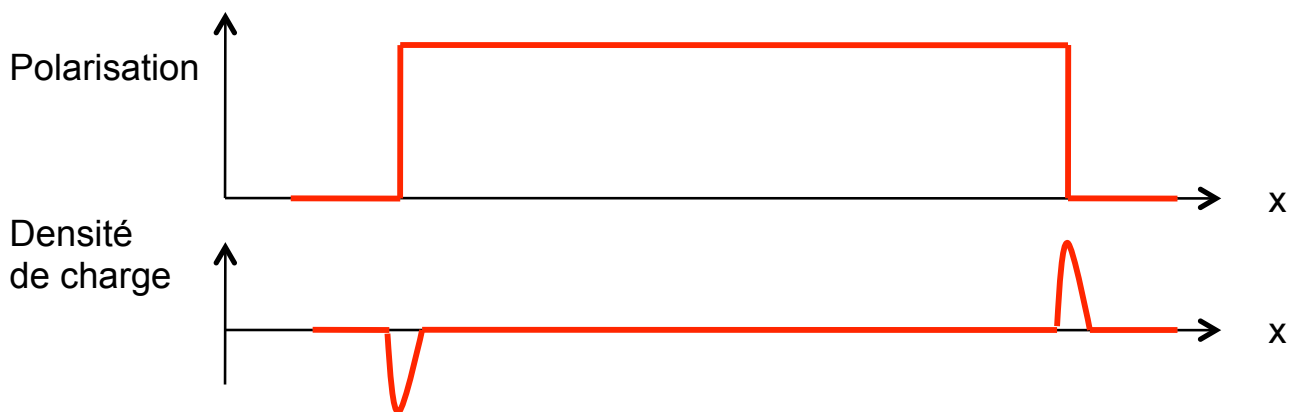
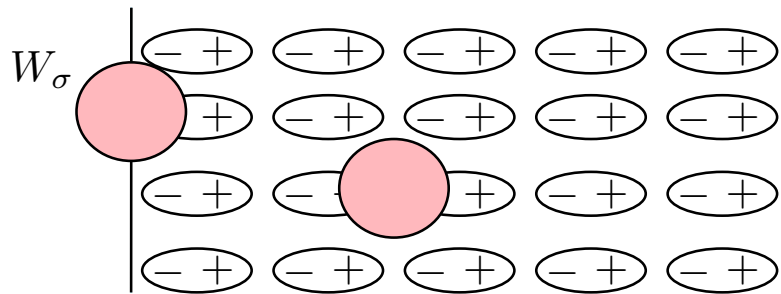
Tout se passe comme si le champ était créé par les distributions de charges de volume et de surface

$$\rho_{\text{lié}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\sigma_{\text{lié}} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Interprétation du résultat  $\rho_{\text{lié}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

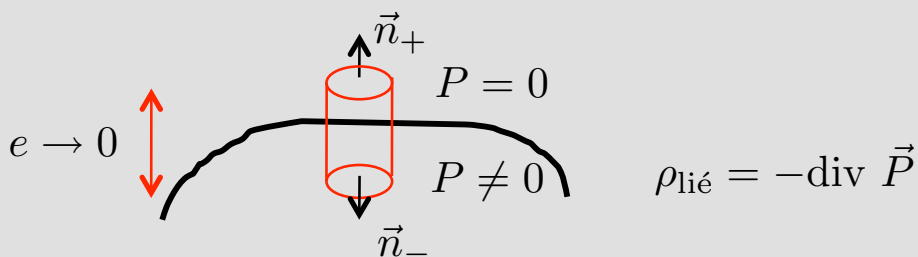
Lissage d'une distribution de dipôles horizontaux. Milieu confiné.



Les conditions aux limites vont jouer un rôle important

**Exercice à faire vous-même :**

**Origine de la densité surfacique de charges : la discontinuité de polarisation**



1) Calculer la charge contenue dans le cylindre dans la limite ( $e \rightarrow 0$ )

2) Montrer que  $Q_{\text{int}} = \vec{P} \cdot \vec{n}_+ ds$  (ds est l'aire du disque supérieur)





## II-B Courant de polarisation

La polarisation est due au déplacement des charges sous l'action d'un champ extérieur

$$\vec{P} = \sum n_i q_i \vec{s}_i$$

$n_i$  densité volumique locale du porteur de charge  $i$   
 $\vec{s}_i$  déplacement moyenné sur un volume mésoscopique

En régime variable, il apparaît un courant de polarisation

$$\vec{j}_{\text{lié}} = \sum n_i q_i \vec{v}_i = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Cette relation vérifie la conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho_{\text{lié}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{lié}} = 0$$

Relation plus générale  $\vec{j}_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$  (contribution magnétique)

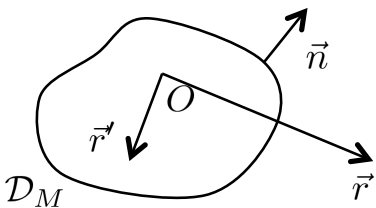
## II-C Distribution de courant d'origine magnétique

But : trouver le lien entre densité de courant lissée et aimantation

Cette fois on utilise le potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique ponctuel

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \times \vec{r}}{r^3} \quad (\text{rappel Annexe 2})$$

Extension au cas d'une distribution d'aimantation :  $\vec{\mathcal{M}} = \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \vec{M}(\vec{r}') d^3 \vec{r}'$



Potentiel vecteur (th. De superposition)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

La distribution d'aimantation est équivalente à la distribution de courants

De volume  $\vec{J}_V = \vec{\nabla} \times \vec{M}$       De surface  $\vec{J}_S = \vec{M} \times \vec{n}$

**Démonstration :** 
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

Que l'on écrit 
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

On utilise l'identité d'analyse vectorielle

$$\vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{M}(\vec{r}')$$

Pour obtenir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

L'analogie du Th de Stokes pour le rotationnel

$$\iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}} \vec{\nabla}' \times \vec{a}(\vec{r}') d\tau = \oiint_{\vec{r}' \in \partial \mathcal{D}} \vec{n} \times \vec{a}(\vec{r}') dS$$

Permet d'arriver au résultat final

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{\vec{r}' \in \partial \mathcal{D}_M} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS$$

On peut donc identifier les distributions de courant à partir de la relation de Biot & Savart

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_J} \frac{\vec{J}_v(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{\vec{r}' \in \partial \mathcal{D}_J} \frac{\vec{J}_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^2 \vec{r}'$$

Distribution  
de courant  
volumique

$$\vec{J}_V = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Distribution  
de courant  
surfique

$$\vec{J}_S = \vec{M} \times \vec{n}$$

De manière analogue au cas de la polarisation, la contribution de surface correspond à la discontinuité du rotationnel de M si la distribution est localisée.

### III – Excitation électrique et excitation magnétique

Une fois obtenues les distributions de charges et de courants liés, on peut enfin écrire les équations de Maxwell (macroscopiques) dans la matière en séparant contributions libres et liées

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{libre}} & \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_{\text{libre}} + \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t} \end{array}$$

On définit l'excitation électrique  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

et l'excitation magnétique  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}} & \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array}$$

D et H contiennent la réponse de la matière.

Ils sont très importants dans la pratique car ils sont contrôlés par les charges/courants libres.

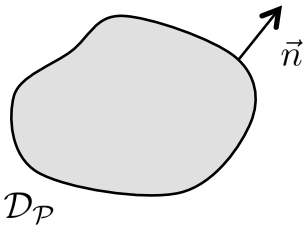
A ce stade, on ne peut pas encore vraiment se servir des équations de Maxwell puisqu'il manque les lois de comportement des matériaux D(E) et H(B) pour connaître E et B dans tout l'espace ...

Ch2 Cas des milieux diélectriques

Ch3 Cas des milieux diamagnétiques et paramagnétiques

Ch4 Cas des milieux ferromagnétiques

## IV - Potentiel et champ créés (en statique) par la matière polarisée



**Première méthode : calcul direct**

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

Utilise le résultat du dipôle électrostatique

Dériver pour obtenir le champ électrique

**Seconde méthode : utilisation des charges de polarisation**

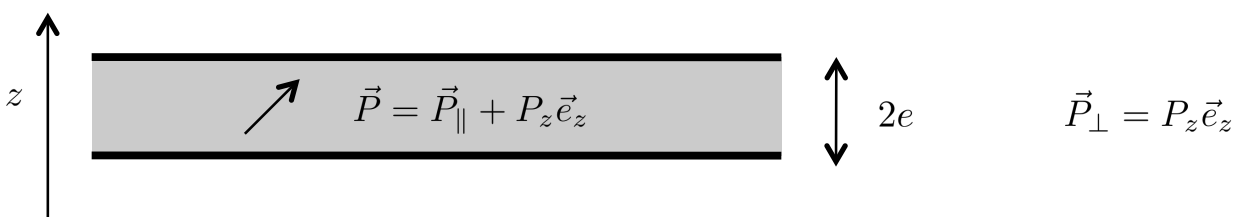
volumique	surfactive
$\rho_{\text{lié}} = -\text{div } \vec{P}$	$\sigma_{\text{lié}} = \vec{P} \cdot \vec{n}$

(voir annexe 1\*)

Calcul direct ? 
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\vec{r}' \in \partial\mathcal{D}_P} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS$$

Mieux vaut trouver le problème d'électrostatique équivalent déjà résolu !

### IV.1 Champ créé par une plaque uniformément polarisée

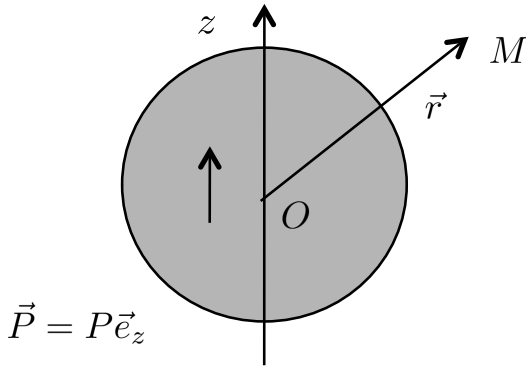


**Montrer que** le champ est nul en dehors de la plaque, et que 
$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}_\perp}{\epsilon_0} \quad |z| < e$$

**Conseil :** trouver la distribution de charges équivalente.  
Utiliser le théorème de superposition pour réutiliser un résultat connu.



## IV.2 Calcul direct : sphère uniformément polarisée



$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

$$V(M) = \vec{P} \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_P} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau}_{\vec{E}_1}$$

$\vec{E}_1 = E_1(r)\vec{e}_r$  , champ créé par une boule de densité de charge 1

**Extérieur : montrer que**  $V(M) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$        $\vec{P} = \iiint_{|\vec{r}'| \leq R} \vec{P} d\tau$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{P} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{P}) \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Champ et potentiel créé par un dipôle placé au centre de la sphère

**Intérieur : montrer que**  $\vec{E}_1 = \frac{\vec{r}}{3\epsilon_0}$        $V(r) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{3\epsilon_0}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

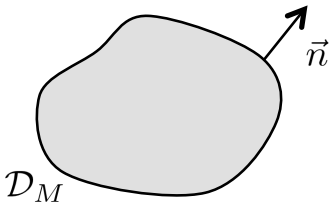
La relation entre champ créé et polarisation est non locale, elle est entièrement pilotée par les conditions aux limites.

**Conseil :** le calcul de  $E_1$  ressemble à celui du champ créé par une sphère uniformément chargée. Vous connaissez déjà le résultat.





## V - Potentiel et champ créés par la matière aimantée



### Première méthode : calcul direct du potentiel vecteur

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

Utilise le résultat du dipôle magnétique (annexe 2)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

### Seconde méthode : utilisation des courants d'aimantation

volumique

surfactive

$$\vec{J}_V = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\vec{J}_S = \vec{M} \times \vec{n}$$

Trouver le problème de magnétostatique équivalent.  
Utiliser les résultats déjà connus ...

Les courants surfaciques proviennent de la discontinuité de  $M$ . A trouver en étudiant la circulation le long d'un contour traversant la surface.

## Application au champ créé par un cylindre uniformément aimanté

On considère un barreau cylindrique de base circulaire, infiniment long, uniformément aimanté selon son axe  $\vec{M} = M\vec{e}_z$

Montrer que l'on a :  $\vec{B} = \mu_0 \vec{M} \quad (r < R)$

$$\vec{B} = \vec{0} \quad (r > R)$$

**Attention :** le résultat  $\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$  n'est pas général car le problème est piloté par les conditions aux limites. Mais c'est un bon ordre de grandeur

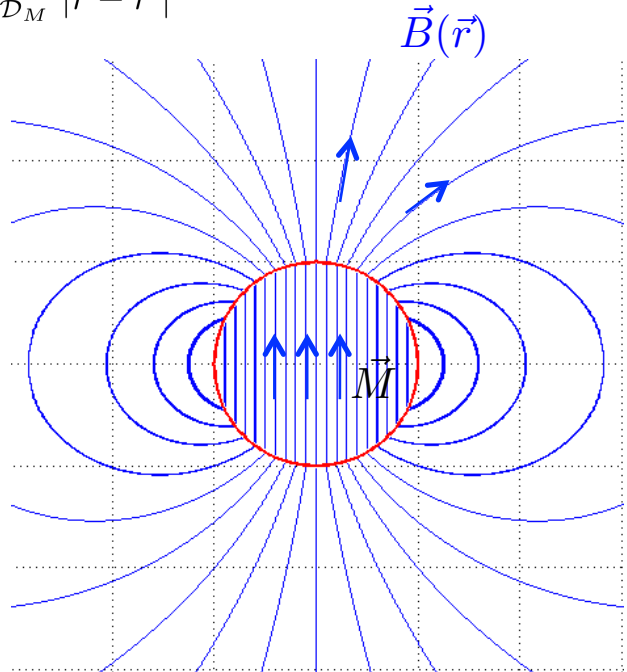
**Cas d'une sphère uniformément aimantée**  $\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$  ( $r < R$ )

A l'extérieur : 
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} V_0 \vec{M} \times \frac{1}{V_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}_M} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3}$$

Le champ a une structure dipolaire à l'extérieur

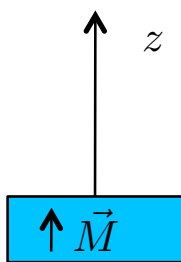
Présence de courants de surface :  
 B perpendiculaire est continu  
 B tangentiel est discontinu



En TP : caractérisation d'un aimant champ fort de taille finie

Ressemble à une petite spire de rayon a, intensité I

$$B(z) = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{2\pi} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

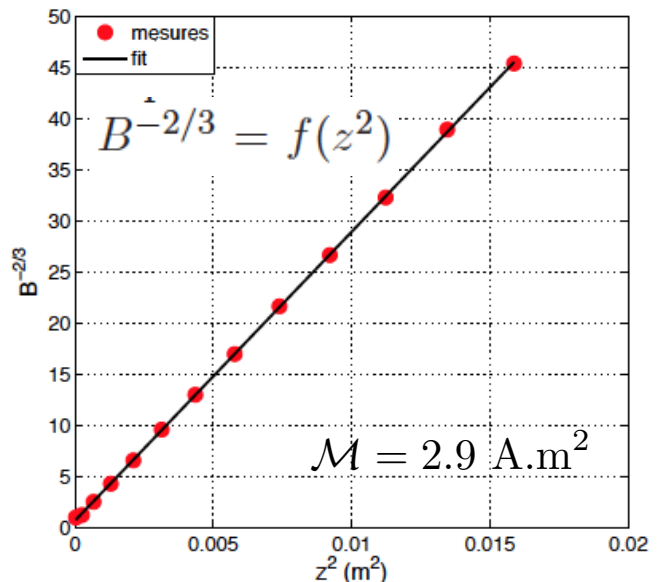


On ne connaît ni a, ni I  $\mathcal{M} = \pi a^2 I$

L'approximation dipolaire marche mal en général

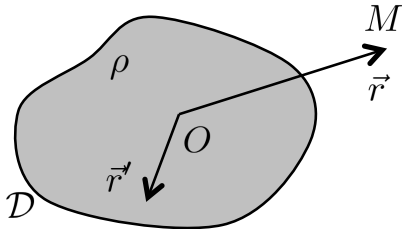
$$B \neq \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2\pi z^3}$$

(sauf pour la sphère)



# Annexe 1 : moment dipolaire électrique

On calcule ici le potentiel électrique créé à grande distance par une distribution localisée de charges électriques



Potentiel électrique :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

Charge globale :  $Q = \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}} \rho(\vec{r}') d\tau$

Moment dipolaire :  $\vec{P} = \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}} \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\tau$  [Debye] 1 D = 0.33 10<sup>-29</sup> c.m

Cette quantité est intrinsèque si Q=0. Sinon P dépend du choix de l'origine

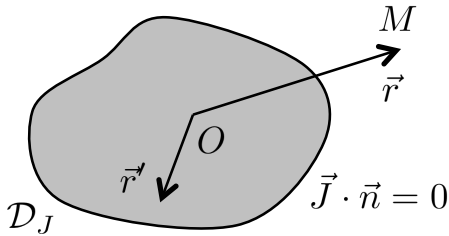
Charges ponctuelles  $\rho(\vec{r}) = \sum q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$   $\vec{P} = \sum q_i \vec{r}_i$

Approximation dipolaire :  $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$   $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} + \dots$

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots$$

# Annexe 2 : moment dipolaire magnétique

## Moment dipolaire d'une distribution de courant localisée



Potentiel vecteur :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

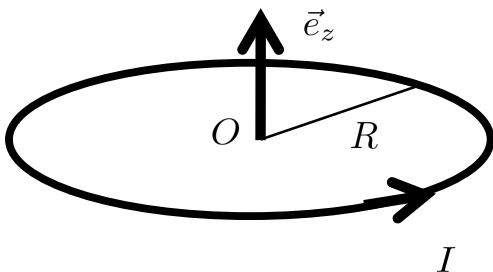
Le terme monopolaire est toujours nul :  $\iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}} \vec{J}(\vec{r}') d\tau = \vec{0}$

$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{D}} \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') d\tau$	$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \times \vec{r}}{r^3}$
---	--

Le moment magnétique est une grandeur intrinsèque

Unité :  $\vec{\mathcal{M}} = A \cdot m^2$

### Cas particulier du circuit filiforme



$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}} &= \frac{1}{2} \oint_C \vec{OP} \times I d\vec{l} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R \vec{e}_r \times I \vec{e}_\theta R d\theta \\ &= I \pi R^2 \vec{e}_z \end{aligned}$$

Bobine enseignement ( $R=5$  cm,  $I=1$  A, 1000 spires) :  $\mathcal{M} \sim 8 A \cdot m^2$

Terre : ( $R = 6400$  km,  $B = 0.5 \cdot 10^{-4}$  T)  $B \sim \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R^3}$   $\mathcal{M} \sim 10^{21} A \cdot m^2$

Actions sur un dipôle magnétique/une distribution de petite taille : ( $l_{\mathcal{D}} \ll L_B$ )

$$\vec{F} = \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{J} \times \vec{B}_{ext} d\tau$$

$$\vec{F} = \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\nabla} \vec{B}_{ext}$$

$$\vec{\Gamma}_O = \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{r}' \times (\vec{J} \times \vec{B}_{ext}) d\tau$$



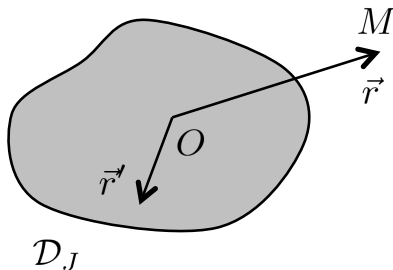
$$\vec{\Gamma}_O = \vec{\mathcal{M}} \times \vec{B}_{ext}$$

$$U_{int} = \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{J} \cdot \vec{A}_{ext} d\tau$$

$$U_{int} = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{ext}$$

## Démonstration que le terme monopolaire est nul

$$\iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{J}(\vec{r}') d\tau = \vec{0}$$



La distribution est localisée et vérifie la conservation de la charge dans l'AQS

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

- Si  $J = 0$  en dehors alors  $\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$   
partout sur l'interface  $\partial\mathcal{D}_J$

Démo pour la composante selon  $\vec{e}_x = \vec{\nabla} x$

$$\vec{e}_x \cdot \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{J} d\tau = \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{\nabla} \cdot (x \vec{J}) d\tau = \oiint_{\mathcal{D}_J} x \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0$$

## Potentiel vecteur créé dans l'approximation dipolaire

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}_J} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau \quad \text{avec} \quad \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{J}(\vec{r}') d\tau = \vec{0}$$

Approximation dipolaire :  $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$        $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} + \dots$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{J}(\vec{r}') d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \iiint_{\mathcal{D}_J} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') d\tau + \dots$$

Formule du double produit vectoriel       $\vec{r} \times (\vec{r}' \times \vec{J}) = (\vec{r} \cdot \vec{J}) \vec{r}' - (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}$

Résultat utile :  $\iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{\nabla}' \cdot (x'_i x'_j \vec{J}(\vec{r}')) d\tau = \iiint_{\mathcal{D}_J} (J_i(\vec{r}') x'_j + J_j(\vec{r}') x'_i) d\tau = 0$

$$\int (\vec{r} \cdot \vec{J}) \vec{r}' d\tau = \int x_i J_i x'_k \vec{e}_k d\tau = - \int x_i J_k x'_i \vec{e}_k d\tau = - \int (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J} d\tau$$

Fait apparaître le moment magnétique de la distribution

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') d\tau \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \times \vec{r}}{r^3}$$

Potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique placé au centre

Le moment magnétique est une grandeur intrinsèque      Unité :  $\vec{\mathcal{M}} = A \cdot m^2$

## Annexe 3\*\*\* : Charges et courants liés

### Lissage direct de la densité microscopique de charges

On obtient ici directement le lien entre P, M et les distributions de charge et de courant par lissage des distributions microscopiques. La fenêtre de lissage est W.

Le milieu est modélisé comme un ensemble d'atomes ou molécules. Chaque atome ou molécule sera neutre, mais l'ensemble est constitués de charges.

Position de chaque atome/molécule  $\vec{r}_i$

Position des charges liées à chaque atome/molécule  $\vec{r}_{i\alpha} = \vec{r}_i + \vec{\xi}_{i\alpha}$

Distribution microscopique  $\rho_{\text{lié}} = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$

Densité macroscopique (lissée)  $\langle \rho_{\text{lié}} \rangle = \iiint_{\infty} \rho_{\text{lié}}(\vec{r}') W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r'$

Exemple du lissage d'une d'une charge ponctuelle

$$\langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_{i\alpha}) \rangle = \iiint_{\infty} \delta(\vec{r}' - \vec{r}_{i\alpha}) W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' = W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_{i\alpha})$$

Densité macroscopique (lissée)  $\langle \rho_{\text{lié}} \rangle = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$

Chaque site est localement neutre  $\sum_{\alpha} q_{i\alpha} = 0$

Moment dipolaire locale de chaque site  $\vec{p}_i = \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \vec{\xi}_{i\alpha}$

Polarisation microscopique  $\vec{P}_{\text{lié}} = \sum_i \vec{p}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$

Polarisation macroscopique  $\vec{P} = \langle \vec{P}_{\text{lié}} \rangle = \sum_i \vec{p}_i W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)$

L'approche est similaire à celle d'un développement multipolaire. On regarde à une échelle grande devant celle des détails microscopiques.

**Hypothèse fondamentale : la séparation d'échelle**  $\sigma \gg |\vec{\xi}_{i\alpha}|$

$$\langle \rho_{\text{lié}} \rangle = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$$

On développe  $W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha}) \simeq W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) - \vec{\xi}_{i\alpha} \cdot \vec{\nabla} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) + \dots$

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\text{lié}} \rangle &\simeq \sum_i \left( \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \right) W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) - \sum_i \left( \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \vec{\xi}_{i\alpha} \right) \cdot \vec{\nabla} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) + \dots \\ &= 0 \qquad \qquad \qquad = \vec{p}_i \end{aligned}$$

Identité vectorielle

$$\vec{p}_i \cdot \vec{\nabla} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{p}_i W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)) + W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) \vec{\nabla} \cdot \vec{p}_i = 0$$

$$\langle \rho_{\text{lié}} \rangle \simeq -\vec{\nabla} \cdot \left( \underbrace{\sum_i \vec{p}_i W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)}_{\langle \vec{P}_{\text{lié}} \rangle} \right) \quad \boxed{\langle \rho_{\text{lié}} \rangle \simeq -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}$$

À l'ordre 1  $W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha}) \simeq W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) - \vec{\xi}_{i\alpha} \cdot \vec{\nabla} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) + \dots$

$$\langle \rho_{\text{lié}} \rangle \simeq -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

À l'ordre 2  $W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha}) \simeq W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) - \vec{\xi}_{i\alpha} \cdot \vec{\nabla} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) + \dots$

$$\dots + (-\xi_{i\alpha})_k (-\xi_{i\alpha})_l \partial_k \partial_l W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$\langle \rho_{\text{lié}} \rangle = -\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{P} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} \right)$$

$Q_{kl} = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} (\xi_{i\alpha})_k (\xi_{i\alpha})_l W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)$  Tenseur quadripolaire électrique

## Lissage direct du courant microscopique de charges

Courant de charge lié  $\vec{j}_{\text{lié}} = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \dot{\xi}_{i\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha}) \quad (|\dot{\xi}_{i\alpha}| \gg |\dot{r}_i|)$

Courant de charge macroscopique

$$\vec{J}_{\text{lié}} = \langle \vec{j}_{\text{lié}} \rangle = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \dot{\xi}_{i\alpha} W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{\xi}_{i\alpha})$$

On développe

$$\vec{J}_{\text{lié}} = \sum_i \left( \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \dot{\xi}_{i\alpha} \right) W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i) - \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \dot{\xi}_{i\alpha} (\vec{\xi}_{i\alpha} \cdot \vec{\nabla}) W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \qquad \text{Terme d'ordre 2}$$

Le courant de polarisation est un effet d'ordre 1 (dipolaire)

La partie magnétique est du même ordre que le quadrupôle électrique

La partie magnétique apparaît à l'ordre 2 :

$$\langle \rho_{\text{lié}} \rangle = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{P} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{Q}})$$

$$\vec{J}_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M} - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{Q}}}{\partial t}$$

Moment dipolaire

Vecteur aimantation  $\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)$

$$\vec{m}_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{i\alpha} \vec{\xi}_{i\alpha} \times \dot{\xi}_{i\alpha}$$

$Q_{kl} = \sum_i \sum_{\alpha} q_{i\alpha} (\xi_{i\alpha})_k (\xi_{i\alpha})_l W_{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}_i)$  Tenseur quadrupolaire électrique

**L'expérience montre que les effets magnétiques et électriques sont découplés**

$$P = P(E)$$

$$Q = Q(E)$$

$$M = M(B)$$

-On a toujours  $|\vec{P}| \gg |\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{Q}}|$

-Dans certaines situations  $|\vec{\nabla} \times \vec{M}| \gg \left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right|$

On écrit donc en toute généralité :

$$\rho_{\text{lié}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\vec{J}_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$$