

Ch 3 : Diamagnétisme et paramagnétisme

Aspects thermodynamiques

Bibliographie du chapitre :

- BFR, électromagnétisme IV, milieux matériels
- Kittel, physique de l'état solide
- Diu, physique statistique
- Cohen Tannoudji, mécanique quantique
- Perez, électromagnétisme

I – Aimantation induite

I.1 – Susceptibilité magnétique

Un corps plongé dans un champ électrique acquiert une aimantation.

Dans le cas de champs suffisamment faibles, la réponse du milieu est linéaire et la relation entre M et H est tensorielle. On écrit :

$$\vec{M} = [\chi_m]\vec{H} \quad \text{susceptibilité magnétique : } \chi_m$$

Pour un milieu linéaire homogène et isotrope (LHI), on aura $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

Contrairement au cas de la polarisation, le signe de la susceptibilité magnétique peut-être positif ou négatif

$\chi_m < 0$ Milieu diamagnétique

Dépend peu de T	$\chi_m \sim -10^{-5}$	Liquide/solide
	$\chi_m \sim -10^{-9}$	Gaz

$\chi_m > 0$ Milieu paramagnétique $\chi_m \sim 10^{-3}$ $\chi_m = \frac{C}{T}$

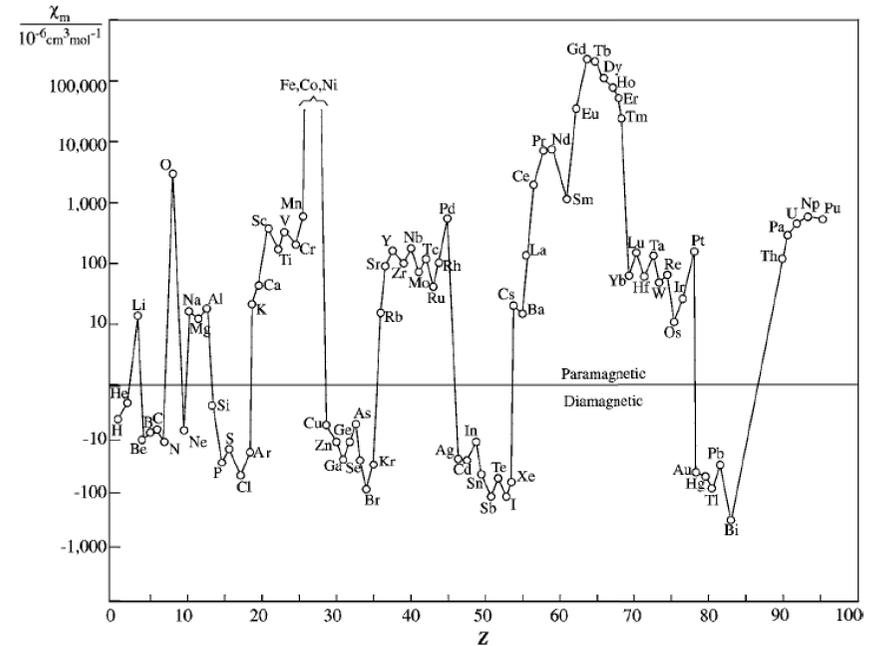
Pour ces matériaux à réponse faible, la définition de H permet d'obtenir

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad \vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$$

On définit la perméabilité magnétique $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$

Et la perméabilité magnétique relative $\mu_r = 1 + \chi_m$

Susceptibilité magnétique des éléments (Handbook, attention échelle log signée)



Tous les corps présentent un diamagnétisme, mais un grand nombre présente du paramagnétisme, qui masque le diamagnétisme dès qu'il est présent (métaux tels Li, Na, K, Ca, Mg, ou non métaux comme O2)

Quelques éléments natifs présentent une susceptibilité infinie puisqu'ils présentent une aimantation non nulle en champ nul, ce sont les ferromagnétiques (Fe, Ni, Co) à la base de la fabrication des aimants

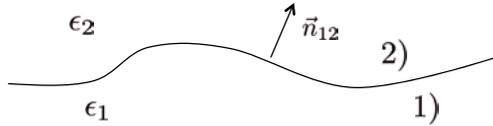
Dans le cas des matériaux ferromagnétiques, la réponse est très forte, non linéaire et dépend de l'histoire du matériau (hystérésis).

On écrit encore $B = \mu(B)H \quad \mu_r \gg 1$

Nous verrons que la susceptibilité dépend très fortement de la température et que celui-ci devient paramagnétique au delà de la température de Curie. Ces matériaux et leurs applications font l'objet du chapitre 4.

I.2 – Relations de passage entre deux milieux diélectriques

Avec les définitions pour la permittivité et pour la perméabilité, on obtient les relations de passage entre deux milieux LHI



En toute généralité $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \sigma_{\text{libre}}$ $(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$

$\vec{E}_{\parallel,2} - \vec{E}_{\parallel,1} = \vec{0}$ $\vec{H}_{\parallel,2} - \vec{H}_{\parallel,1} = \vec{J}_s \times \vec{n}_{12}$

Appliqué au cas du milieu magnétique LHI :

$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$ $\frac{\vec{B}_{\parallel,2}}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_{\parallel,1}}{\mu_1} = \vec{J}_s \times \vec{n}_{12}$

La composante normale de B reste continue alors que la composante tangentielle de B subit une discontinuité même en absence de courants surfaciques

I.3 – Force et moment subis dans un gradient de champ

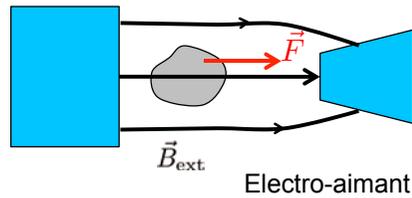
De nombreuses méthodes de mesures de perméabilité magnétique sont basés sur l'application d'une force dans un champ inhomogène

Une distribution d'aimantation va subir une force correspondant à :

$\vec{F} = \iiint_{V_0} \vec{M} \cdot \nabla \vec{B}_{\text{ext}} d\tau$

Et un couple au point O

$\vec{\Gamma}_0 = \iiint_{P \in V_0} \vec{OP} \times (\vec{M} \cdot \nabla \vec{B}_{\text{ext}}) d\tau$



Dans le cas d'un **paramagnétique** ou **diamagnétique** $|\chi_m| < 10^{-3}$

On pourra écrire $\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m}{1 + \chi_m} \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ $\vec{F} \simeq \iiint_{V_0} \chi_m \nabla \frac{B_{\text{ext}}^2}{2\mu_0} d\tau$

Les paramagnétiques sont attirés vers les zones de champ fort.

Diamagnétique (bismuth), effet inverse, manip difficile car l'effet est faible.

II.4 – Mesure de susceptibilité

II.4.a – Balance de Gouy

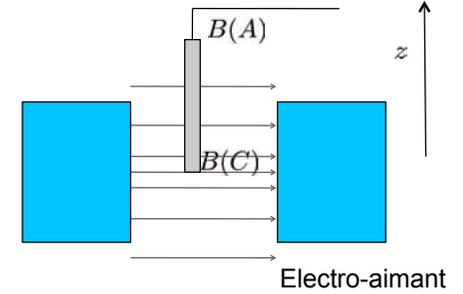
Ce dispositif de mesure de susceptibilité est basé sur l'utilisation d'un barreau de longueur AC et de petite section s, que l'on insère partiellement dans l'entrefer d'un électro-aimant

Le champ n'est inhomogène que selon z

$\vec{F} = \iiint_{V_0} \chi_m \nabla \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$

$\vec{F} = \frac{\chi_m s}{2\mu_0} \int_C^A \frac{dB^2}{dz} dz \vec{e}_z$

$\vec{F} = \chi_m s \frac{B(A)^2 - B(C)^2}{2\mu_0} \vec{e}_z$

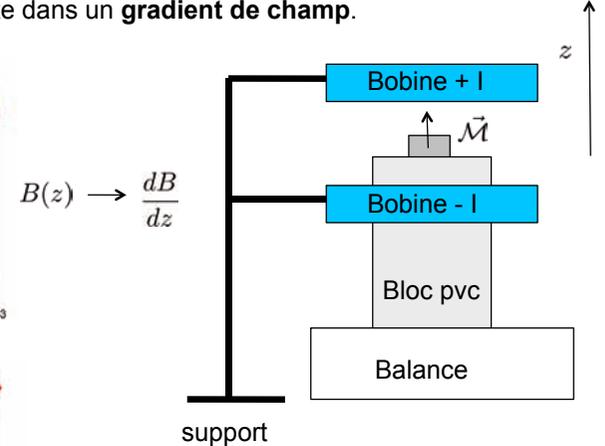
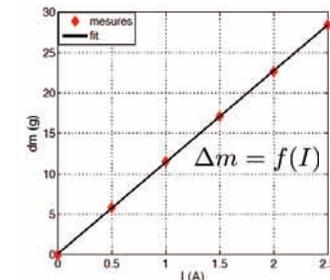
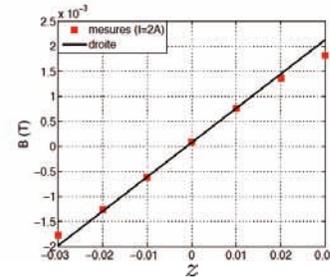


Si le champ extérieur faible devant celui dans l'entrefer $B(C) \gg B(A)$

L'expression de la force est simple $\vec{F} \simeq -\chi_m s \frac{B(C)^2}{2\mu_0} \vec{e}_z$

II.4.b – Extension à la mesure du moment dipolaire d'un aimant

Mesure de masse apparente dans un **gradient de champ**. Configuration anti-Helmoltz



$F_z = \Delta mg = \mathcal{M} \frac{dB}{dz}$

Aimant champ fort $\mathcal{M} = 3.2 \text{ A.m}^2$

L'expérience est très facile à monter

II.4.c – Ascension d'un liquide paramagnétique

Une expérience de mesure de susceptibilité en montage utilise un fluide paramagnétique : une solution de FeCl₃

En présence d'un champ B, une dénivellation apparaît

Equation de la statique des fluides

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \frac{d\vec{F}}{d\tau}$$

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \chi_m \vec{\nabla} \frac{B^2}{2\mu_0}$$

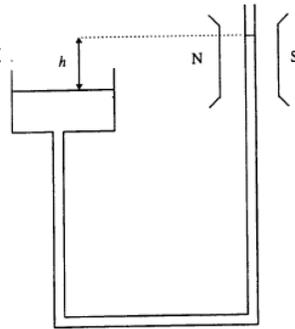
S'intègre en

$$P + \rho gz - \chi_m \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{cte}$$

La dénivellation est proportionnelle à la susceptibilité

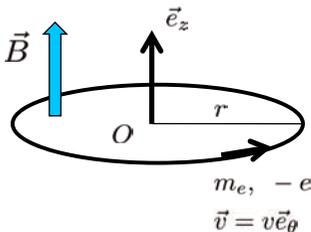
$$\rho gh = \chi_m \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Demande d'avoir calibré le champ avec une sonde à effet Hall. Attention, la surface libre doit être au milieu de l'électro-aimant, sinon l'effet est nul ... Cette expérience marche très bien.



II – Aspects microscopiques du diamagnétisme

Il s'agit du magnétisme des atomes ou molécules qui ne possèdent pas de Moment magnétique de spin. Pour expliquer l'apparition d'un moment magnétique opposé au champ appliqué, il faut s'intéresser à la variation de moment cinétique lors de l'application du champ B.



Considérons le modèle semi-classique d'un atome dont les électrons ne possèdent que du moment cinétique orbital

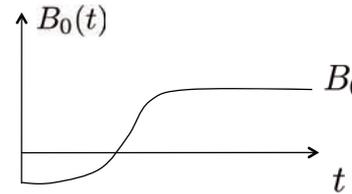
$$\vec{l} = \sum_i \vec{r}_i \times m_e \vec{v}_i$$

On suppose qu'on applique un champ vertical $\vec{B} = B_0(t)\vec{e}_z$ initialement nul

L'électron subit la force de Lorentz

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Ici $E = E_p$ est radial puisqu'il est créé par le proton, son moment est nul et on ne considère plus ce champ statique dans la suite.



Une fois le champ établi, le moment de la partie magnétique est nul

$$\vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0}$$

L'effet est donc dû au régime transitoire durant lequel il apparaît un champ

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On peut calculer ce champ en utilisant le potentiel vecteur du champ uniforme

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$$

On peut aussi retrouver l'expression de E en utilisant les eq de Maxwell. B étant vertical, dB/dt aussi, le champ créé sera orthoradial (problème analogue au fil vertical parcouru par un courant. On a :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{E} = E(r)\vec{e}_\theta$$

La circulation de E le long de l'orbite circulaire donne donc

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} \quad 2\pi r E(r) = -\pi r^2 \frac{dB_0}{dt} \quad \vec{E} = -\frac{1}{2} r \frac{dB_0}{dt} \vec{e}_\theta$$

L'électron accélère le long de son orbite, et le théorème du moment cinétique donne

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times -e\vec{E} = r\vec{e}_r \times \frac{e}{2} r \frac{dB_0}{dt} \vec{e}_\theta \quad \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{e}{2} r^2 \frac{dB_0}{dt} \vec{e}_z$$

L'application du champ provoque une variation de moment cinétique

$$\Delta \vec{l} = \frac{e}{2} r_\perp^2 B_0 \vec{e}_z \quad r_\perp^2 = x^2 + y^2$$

Il apparaît donc un moment magnétique induit

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{l}$$

$$\Delta \vec{m} = -\frac{e^2}{4m_e} r_\perp^2 \vec{B}_0$$

Le moment magnétique moyen est donc : $\Delta\langle\vec{m}\rangle = -\frac{e^2}{4m_e}\langle r_{\perp}^2\rangle\vec{B}_0$

Ce qui permet d'obtenir l'aimantation $\vec{M} = n_a\Delta\langle\vec{m}\rangle \simeq \chi_m\frac{\vec{B}}{\mu_0}$

et la susceptibilité magnétique $\chi_m = -\frac{n_a\mu_0e^2}{4m_e}\langle r_{\perp}^2\rangle$

A ce stade, il nous faut une estimation du rayon moyen de l'orbite électronique, ce que la mécanique classique ne peut pas faire car il n'y a aucune contraintes sur les orbites.

On utilise donc les données provenant de la mécanique quantique, ce qui fait que ce modèle est en fait semi-classique.

Pour l'atome d'hydrogène : $\langle r_{\perp}^2\rangle = \langle x^2 + y^2\rangle = \frac{2}{3}a_0^2$

Qui permet d'obtenir $\chi_m = -\frac{n_a\mu_0e^2}{6m_e}a_0^2$

La susceptibilité est ici bien négative, indépendante de la température (conforme à l'expérience), et proportionnelle au volume. Dans les conditions usuelles de température et de pression, pour les gaz :

Gaz (P=1 bar), Vm=24 L à 25 C $n_a \simeq 40 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} = 2.4 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$

On trouve : $\chi_m \sim -4 \cdot 10^{-10}$ $\chi_m(\text{Ne}) = -0.9 \cdot 10^{-10}$

Ce qui est le bon ordre de grandeur puisque $\chi_m(\text{Ar}) = -2.4 \cdot 10^{-10}$

$\chi_m(\text{K}) = -3.5 \cdot 10^{-10}$

$\chi_m(\text{Xe}) = -5.4 \cdot 10^{-10}$

On pourrait se contenter de ce résultat et imaginer que notre modèle classique est formidable. Ce serait probablement la conclusion au niveau L2. Toutefois un modèle classique se heurte à quelques Difficultés.

- La première est naturellement que nous avons utilisé un résultat de la mécanique quantique pour estimer le rayon des orbites.
- La seconde, plus fondamentale, tient au théorème de Bohr – van Leewen "le diamagnétisme ne peut exister sans la prise en compte des effets quantiques".

Physique statistique d'un système de particules chargé dans un champ B

- Th. de Bohr-van Leeuwen : le diamagnétisme ne peut exister sans prise en compte des effets quantiques.

La démonstration de ce résultat est assez simple et basée sur la physique statistique puisqu'il faut moyenner sur les orbites électronique.

Le hamiltonien du système de charges plongé dans un champ magnétique B dérivant du potentiel vecteur A s'écrit :

$$H = \sum \frac{(\vec{p}_i - q\vec{A})^2}{2m} + V(\{\vec{r}_i\})$$

avec pi l'impulsion de chaque charge, et V l'énergie potentielle d'interaction entre les différentes charges.

La fonction de partition est $Z = \frac{1}{N!h^N} \int \dots \int d^3\vec{p}_i d^3\vec{r}_i e^{-\beta H}$

Elle ne dépend pas du champ magnétique : $Z(T, B) = Z(T, 0)$

L'énergie libre n'en dépend pas non plus puisque $F = -kT \log Z$

L'aimantation est donc nulle ... $M = -\frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial B} = 0$

Démonstration : Z ne dépend pas de A (ou B)

Pour chaque intégrale sur pi, faisons le changement de variable

$$\vec{\Pi}_i = \vec{p}_i - q\vec{A}$$

Le jacobien vaut 1 et l'on a pour chaque intégrale sur pi

$$\int d^3\vec{p}_i \exp\left(-\frac{(\vec{p}_i - q\vec{A})^2}{2mkT}\right) = \int d^3\vec{\Pi}_i \exp\left(-\frac{\Pi_i^2}{2mkT}\right)$$

Puisque l'impulsion n'est pas bornée dans ce système non relativiste, et que V ne dépend pas de A, les deux intégrales sont identiques et Z ne dépend pas de A (ou de B).

Traitement quantique d'une particule chargée dans un champ B

On considère toujours le cas d'une particule chargée orbitant autour d'un noyau, subissant une force dérivant d'une énergie potentielle $V(r)$. L'exemple typique est celui de l'atome d'hydrogène pour lequel 1 électron orbite autour d'un proton de charge $+e$.

L'expression du hamiltonien est toujours valide (principe de correspondance)

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + V(r) \quad \vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}_0$$

Dans le cas du traitement quantique, l'énergie du système lorsque B (donc A) est non nul n'est pas la même que celle en champ nul. Pour montrer ce résultat, on peut décomposer le hamiltonien en une partie H_0 (champ $B=0$), et traiter la partie magnétique comme une perturbation. Après quelques calculs (voir Cohen Tanoudji ou équivalent), on obtient :

$H =$	H_0	+	H_1	+	H_2
	$\frac{p^2}{2m} + V(r)$		$-\frac{q}{2m}\vec{L} \cdot \vec{B}_0$		$\frac{q^2 B^2}{8m}(x^2 + y^2)$
	Hydrogène		Effet Zeeman Paramagnétisme		Diamagnétisme

qui fait apparaître un terme H_1 proportionnel à B, donnant une correction à l'énergie si le moment cinétique est de moyenne non nulle, et un terme H_2 faisant apparaître à nouveau le carré du rayon de l'orbite. On peut calculer les corrections $\langle H_1 \rangle$ et $\langle H_2 \rangle$

Dans le cas de l'orbitale 1s de l'atome d'hydrogène, on a :

$$\langle \psi_0 | L_z | \psi_0 \rangle = 0 \quad \text{Le moment cinétique moyenné (symétrie radiale)}$$

$$\text{Le déplacement d'énergie est} \quad \Delta E = \frac{e^2 B^2}{8m_e} \langle \psi_0 | r_{\perp}^2 | \psi_0 \rangle = \frac{e^2 B^2 a_0^2}{12m_e}$$

$$\text{Dont on tire l'énergie libre} \quad F(T, B) = F_0(T) + N \frac{e^2 B^2 a_0^2}{12m_e}$$

$$\text{Et l'aimantation} \quad M = -\frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial B} = -\frac{N e^2 \mu_0 a_0^2}{6m_e} \frac{B}{\mu_0}$$

On obtient alors le même résultat que pour le modèle semi-classique. Il faut noter que c'est un coup de chance que le 1er modèle donne le bon résultat.

III – Aspects microscopiques du paramagnétisme

Ce mécanisme concerne les atomes dont les électrons possèdent un moment magnétique permanent. Il décrit la compétition entre orientation et agitation thermique et est très similaire au mécanisme de polarisation d'orientation.

Illustrons ce mécanisme en considérant le modèle d'un système de N/V électrons par unité de volume sans interactions entre eux, en contact avec un thermostat.

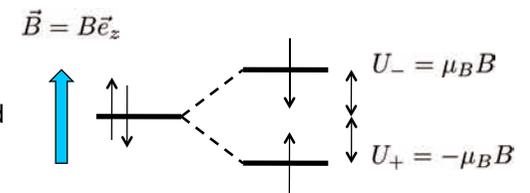
L'énergie d'interaction entre un moment magnétique et le champ extérieur est de la forme :

$$U_{int} = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m_z B$$

Rappel : on ne traite ici que la partie provenant de l'interaction magnétique due aux spins, en supposant les particules indépendantes. Le hamiltonien du système faisant apparaître des termes additifs indépendants, la fonction de partition se factorise et l'énergie libre apparaît comme une somme des différentes contributions.

Le hamiltonien du système est : $H = -\sum \vec{m}_i \cdot \vec{B}$

Pour un système de spin 1/2 $s_z = \pm \frac{\hbar}{2}$ $m_z = \mp \frac{e\hbar}{2m_e} = \mp \mu_B$



Supposant le champ vertical, l'énergie de la configuration dépend de l'orientation du spin s_z

Dans le cadre de la statistique de Maxwell Boltzmann, la probabilité de chaque configuration est :

$$P_- = A \exp\left(-\frac{\mu_B B}{kT}\right) \quad P_+ = A \exp\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right)$$

On obtient A à l'aide de la condition de normalisation $P_+ + P_- = 1$

$$A = \frac{1}{2 \cosh\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right)}$$

Le moment magnétique moyen est alors

$$\langle m_z \rangle = \mu_B P_+ - \mu_B P_- = \mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right)$$

Pour un système de N/V électrons par unité de volume.

$$\vec{M} = \frac{N}{V} \langle m_z \rangle \vec{e}_z \quad \langle m_x \rangle = \langle m_y \rangle = 0 \quad \vec{M} = \frac{N}{V} \mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right) \vec{e}_z$$

Cette relation semble fortement non linéaire, ce qui ne cadre pas avec ce que nous avons pu rapporter des paramagnétiques au début du chapitre.

La question est donc de savoir si le terme dans la fonction tanh est petit ou grand. Calculons un ODG pour un champ assez intense $B=1$ Tesla

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \sim 10^{-23} \text{ A.m}^2 \quad \frac{U_{int}}{kT} = \frac{\mu_B B}{kT} \sim 0.01$$

La réponse est donc linéaire :
$$\vec{M} = \frac{N \mu_0 \mu_B^2}{V kT} \vec{B} \quad \chi_m = \frac{N \mu_0 \mu_B^2}{V kT} > 0$$

Pour un gaz ($P=1$ bar) $n_a \sim 2 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} \quad \chi_m(\text{para}) \sim 10^{-6} \sim 10^4 \chi_m(\text{dia})$

Quelques remarques sur ce modèle :

- Le modèle retrouve la loi de Curie.
- Il n'y a pas de ferromagnétisme car les interactions spin-spin entre électrons sont négligées.
- Il existe un autre type de paramagnétisme, que l'on a pas décrit ici, celui des métaux qui est basé sur la statistique de Fermi-Dirac qui intègre le principe de Pauli.
- Dans le cas présent, on a considéré la statistique de Boltzmann pour décrire le spin des électrons car chaque spin/électron était supposé localisé au voisinage de son atome. Comme les fonctions d'onde ne se recouvrent pas, le principe d'exclusion ne s'applique pas.

Thermodynamique des systèmes magnétiques

(ce qu'il faut retenir)

I - Quel est le travail à fournir pour créer une distribution de courant ou une distribution d'aimantation ?

Nous allons voir que le travail à fournir pour faire une transformation qui modifie les champs de manière infinitésimale

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \delta A \quad \vec{B} \rightarrow \vec{B} + \delta B$$

s'écrit de manière assez simple :

$$\delta W = \iiint_{\mathcal{D}} d\tau \vec{J} \cdot \delta \vec{A} = \iiint_{\infty} d\tau \vec{H} \cdot \delta \vec{B}$$

Attention : à gauche l'intégrale court sur la distribution \mathcal{D} , à droite On intègre sur tout l'espace.

II - Peut-on écrire le premier principe de la thermodynamique pour une substance magnétique (S) plongée dans un champ extérieur B_0 ?

Nous allons voir que c'est possible et que la différentielle de l'énergie interne s'écrit en fonction des variables extensives

$$dU_S = TdS - PdV + \mu dN + \vec{B}_0 \cdot d\vec{M}$$

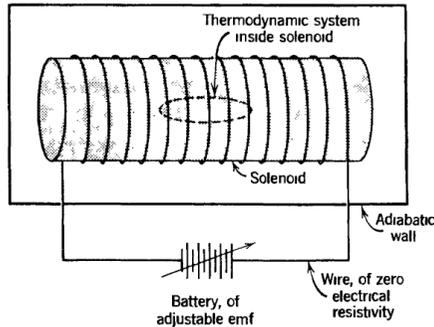
$$U = U(S, V, N, \mathcal{M}) \quad \vec{M} = \iiint_{\mathcal{V}} d\tau \vec{M} \quad \delta W_S = \vec{B}_0 \cdot d\vec{M}$$

Le dernier terme représente le travail magnétique apporté à (S).

I – Travail nécessaire pour créer une distribution de courant

Le problème qu'on considère ici est celui d'un matériau magnétique situé à proximité d'un circuit électrique parcouru par un courant I .
On se pose la question de savoir quelle énergie il faut apporter au système pour faire le champ magnétique.

La réponse n'est pas simple a priori puisque le circuit et le système magnétique sont couplés.



On note le circuit \mathcal{C}

le matériau \mathcal{S}

Augmenter le flux au travers du circuit nécessite un générateur appliquant une différence de potentiel au circuit qui égale la ddp induite.

$$e_{gen} = -e_{ind} = \frac{d\phi}{dt}$$

On a ici bien-sûr supposé que les fils du bobinage avaient une résistance nulle. Dans ce cas, le travail apporté par l'opérateur à (S+C) pour faire varier le flux s'écrit simplement

$$\delta W_{op} = I d\phi$$

On obtient une expression plus commode en introduisant B et A qui vérifient

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Le travail à fournir lors du changement $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \delta\vec{A}$

, qui correspond à la variation de flux s'écrit

$$\delta W_{op} = \oint_{\mathcal{C}} I \delta\vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{J} \cdot \delta\vec{A} d\tau$$

En généralisant à une distribution volumique de courant.

L'expression précédente est utile pour l'étude des circuits couplés. On obtient une expression plus utile en fonction de H, B, M.

$$\delta W_{op} = \iiint_{\mathcal{D}} \vec{J} \cdot \delta\vec{A} d\tau = \iiint_{\infty} \vec{H} \cdot \delta\vec{B} d\tau$$

C'est cette dernière expression que l'on en utilise en TP pour quantifier les pertes dans les matériaux magnétiques.

Démonstration (ne sera pas faite en cours) :

On se place ici dans le cas statique pour lequel on peut écrire

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

Par ailleurs la linéarité des équation de Maxwell impose que

$$\delta\vec{B} = \vec{\nabla} \times \delta\vec{A}$$

Réécrivons l'expression $\delta W_{op} = \iiint_{\mathcal{D}} \vec{J} \cdot \delta\vec{A} d\tau$

En intégrant sur le volume d'une sphère S de centre O (un point de DJ) et de rayon R qui englobe entièrement la distribution de courant. Puisque $J=0$ en dehors de DJ, on a l'égalité :

$$\delta W_{op} = \iiint_{\mathcal{D}_J} \vec{J} \cdot \delta\vec{A} d\tau = \iiint_{S(O,R)} \vec{J} \cdot \delta\vec{A} d\tau = \iiint_{S(O,R)} \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \delta\vec{A} d\tau$$

Que l'on peut écrire en utilisant la divergence d'un produit vectoriel

$$\int_{S(O,R)} d\tau \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \delta\vec{A} = \int_{S(O,R)} d\tau \left(\vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \delta\vec{A}) + \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \delta\vec{A} \right)$$

Mais les champs décroissent rapidement en statique puisque l'on a

$$A \sim 1/R^2 \quad H \sim 1/R^3 \quad \text{donc} \quad \iint_{S(O,R)} dS \vec{n} \cdot (\vec{H} \times \delta\vec{A}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

En passant à la limite d'une sphère rayon tendant vers l'infini, on aura bien

$$\delta W_{op} = \iiint_{\mathcal{D}} \vec{J} \cdot \delta\vec{A} d\tau = \iiint_{\infty} \vec{H} \cdot \delta\vec{B} d\tau$$

II – Travail nécessaire pour faire varier l'aimantation

L'expression précédente est très générale et valable qu'un milieu matériel soit présent ou non.

Cependant lorsqu'un milieu matériel (S) est présent en plus de C, ce travail correspond à l'énergie apportée à la fois au circuit et à la matière. Pour connaître la part spécifiquement apportée à (S), il faut retrancher le travail que l'on apporterait à C pour créer la même distribution de courant en l'absence de (S).

Le travail apporté spécifiquement à (S) s'écrit donc

$$\delta W_S = \delta W_{op} - \delta W_{vide}$$

$$\delta W_{vide} = \iiint_{\infty} \vec{H}_0 \cdot \delta B_0 d\tau \quad \vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

Dans cette opération, on suppose que l'on maintient la distribution de courant identique lorsque l'on introduit la matière dans le système. Le découpage n'est pas aisé car les champs B et H ne sont pas les mêmes même si les sources de courant le sont. La matière contribue en effet à B et H

Le travail apporté à (S) s'écrit :

$$\delta W_S = \iiint_S \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{M} d\tau$$

Avec B_0 le champ créé par la distribution en l'absence de matière.

Si les champs sont homogènes (sphère, "barreau long")

$$\delta W_S = \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{M} \quad \vec{M} = \iiint_S \vec{M} d\tau$$

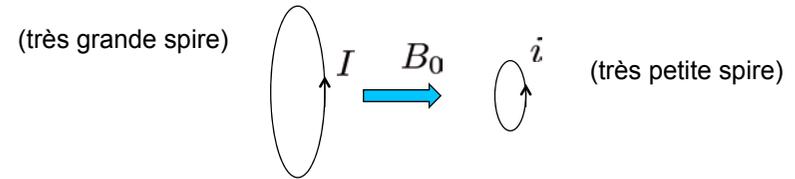
On définit alors l'énergie interne de S : $U_S(S, V, N, \vec{M})$

Fonction des variables extensives, on a :

$$dU_S = TdS - PdV + \mu dN + \vec{B}_0 \cdot d\vec{M}$$

Justification qualitative de l'expression : $\delta W_S = \vec{B}_0 \cdot d\vec{M}$

On considère ici le cas de deux circuits couplés. Une grande spire qui crée le champ B_0 et une petite spire qui modélise le milieu magnétique.



Le moment magnétique de la petite spire est $\mathcal{M} = \pi a^2 i$

Le travail apporté uniquement à S (petite spire) du fait de la présence de B_0 correspond à la variation de flux de B créé par la petite spire au travers de la grande spire lorsque l'intensité i change de di

$$\delta W_S = Id\phi_{i \rightarrow I}$$

Or on sait que pour des circuits couplés, le coefficient de mutuelle induction (noté K pour éviter les collisions de notation vérifie la propriété)

$$\phi_{i \rightarrow I} = Ki \quad \phi_{I \rightarrow i} = KI = \pi a^2 B_0$$

[Cette propriété est montrée dans des livres édités avant 2000 tels que BFR électromagnétisme T.3, Pérez électromagnétisme ou HP prépa.]

Puisque le champ créé par la grande spire est quasi uniforme à l'échelle de la petite

On obtient donc que l'énergie d'interaction s'écrit :

$$\delta W_S = Id\phi_{i \rightarrow I} = IdKi = KI di = B_0 d\mathcal{M}$$

Comment ce problème est-il traité en général à l'agreg ?

On a vu que l'expression du travail total est $\delta W_{op} = \iiint_{\infty} \vec{H} \cdot \delta \vec{B} d\tau$

Il pourrait être tentant d'utiliser la relation $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

Pour couper l'intégrale en 2 contributions, ce qui donne

$$\delta W_{op} = \mu_0 \iiint_{\infty} \vec{H} \cdot \delta \vec{H} d\tau + \mu_0 \iiint_S \vec{H} \cdot \delta \vec{M} d\tau$$

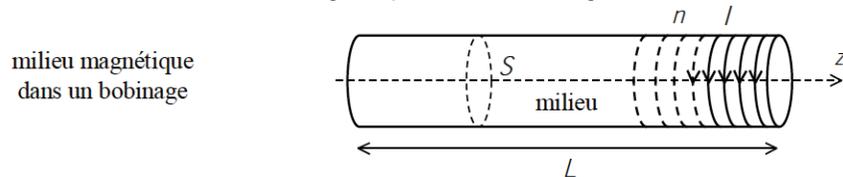
Ce résultat est mathématiquement correct, mais on ne peut pas assimiler le second terme au travail fourni à (S). Il ne découple pas les contributions car en général

$$\vec{H} \neq \vec{B}_0/\mu_0$$

Il y a cependant deux exceptions : les géométries du **solénoïde** et du **tore**

Cas très particulier (agreg A 2006, Diu-thermo) :

On considère un barreau magnétique infiniment long dans un solénoïde infini



Dans cette géométrie $\vec{B}_0/\mu_0 = nI\vec{e}_z$ et $\vec{H} = nI\vec{e}_z$

On a alors : $\frac{\delta W_{vide}}{d\tau} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H} \cdot \delta \vec{H}$

Mais le résultat général est

$$\frac{\delta W_S}{d\tau} = \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{M}$$

Nous verrons en TD ses applications (désaimantation adiabatique, magnétostriction, ...)

Annexe : méthode rigoureuse pour séparer les contributions

Il est clair que l'on atteint ici la limite de ce qu'on peut vous demander de connaître pour l'agreg. Cette démonstration peut être sautée en première(s) lecture(s).

Le travail total est $\delta W_{op} = \iiint_{\infty} \vec{H} \cdot \delta \vec{B} d\tau$

L'énergie apportée est à la fois au champ et au système \mathcal{S}

Le travail apporté uniquement à \mathcal{S} s'écrit :

$$\delta W_S = \delta W_{op} - \delta W_{vide}$$

$$\delta W_{vide} = \iiint_{\infty} \vec{H}_0 \cdot \delta \vec{B}_0 d\tau \quad \vec{H}_0 = \vec{B}_0/\mu_0$$

On découple les contributions sachant que le courant est maintenu constant lorsque l'on insère (S).

Les champ B_0, H_0, B, H, M et J sont liés par les relations :

Dans le vide : $\vec{\nabla} \times \vec{B}_0/\mu_0 = \vec{J} \quad \vec{H}_0 = \vec{B}_0/\mu_0$

En présence de (S) : $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad \vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$

On introduit H_m et B_m , différence entre les champs, qui vérifient :

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{H}_0 + \vec{H}_m & (\vec{\nabla} \times \vec{H}_m &= \vec{0}) \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}_m & \vec{B}_m &= \mu_0(\vec{H}_m - \vec{M}) \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_m = 0) \end{aligned}$$

On décompose :

$$\vec{H} \cdot \delta \vec{B} = \vec{H}_0 \cdot \delta \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{H}_0 \cdot \delta \vec{H}_m + \mu_0 \vec{H}_0 \cdot \delta \vec{M} + \vec{H}_m \cdot \delta \vec{B}$$

Le 2nd et 4^{ème} terme, qui font intervenir H_m , donnent une intégrale nulle sur l'espace entier.

$$\int_{\infty} (\star) d\tau \rightarrow 0 \text{ car } \vec{\nabla} \times \vec{H}_m = \vec{0} \quad \text{et} \quad HB \sim 1/R^6$$

Le fait que la distribution de courant reste identique est fondamental.

Le fait que ces intégrales tendent vers 0 quand on intègre sur tout l'espace se fait exactement de la même manière que dans le cas du résultat

$$\delta W_{op} = \iiint_{\mathcal{D}} \vec{J} \cdot \delta \vec{A} d\tau = \iiint_{\infty} \vec{H} \cdot \delta \vec{B} d\tau$$

On fait apparaître une divergence et on majore l'intégrale par un terme qui tend vers 0. Le fait que le terme additionnel soit aussi nul vient du fait que le rotationnel de Hm est nul. Cette propriété fondamentale vient du fait que la distribution de courant reste identique en l'absence ou en présence de la matière.

Le travail total peut au final se décomposer en

$$\delta W_{op} = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{\infty} \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{B}_0 d\tau + \iiint_S \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{M} d\tau$$

qui fait apparaître l'énergie du champ dans le vide

$$\delta W_{vide} = \iiint_{\infty} \vec{H}_0 \cdot \delta \vec{B}_0 d\tau$$

et le travail à apporter pour augmenter l'aimantation de (S)

$$\delta W_S = \iiint_S \vec{B}_0 \cdot \delta \vec{M} d\tau$$

Ce résultat non trivial n'a rien à voir avec le découpage naïf

$$\delta W_{op} = \mu_0 \iiint_{\infty} \vec{H} \cdot \delta \vec{H} d\tau + \mu_0 \iiint_S \vec{H} \cdot \delta \vec{M} d\tau$$