Calcul différentiel MP*

Partout, $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $<\ ,\ >$ et de la norme associée notée $\|\ \|$.

Exercice 1 : Extrema

1. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + 2xy + y^2$.
   (a) Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $f(x, y) \underset{\|(x,y)\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   (c) Montrer que f est minorée et atteint son inf.
   (d) Calculer la valeur de $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ et étudier l'existence d'extrema locaux autres que cet inf.
2. Soit $f : (x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\} \mapsto \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2}$. Calculer $\inf_{\Omega} f$ et $\sup_{\Omega} f$.
3. Déterminer $\sup_{(x,y)\in[0,1]^2} x^2 - xy^2 + xy$.
4. Soit $T = (abc)$ un triangle de $\mathbb{R}^2$ (bord et intérieur). Soit $f : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto d(x, (ab))d(x, (bc))d(x, (ac))$.
   Exprimer $d(x, (ac))$ en fonction de $u = d(x, (ab))$, $w = d(x, (bc))$ et de constantes.
   Quel est le domaine décrit par (u, w) quand x décrit T?
   Déterminer $\inf_T(f)$ et $\sup_T(f)$.
5. Extrema relatifs.
   (a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + 2y^2 + x = 1\}$ et $f(x, y) = x + 2y$.
   Déterminer $\sup_E(f)$ et $\inf_E(f)$.
   (b) idem avec $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + z^2 = 1\}$ et $f(x, y) = x + 2y + 3z$

Exercice 2 :

Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $n \geq 1$, telle que $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \displaystyle\int_0^1 x\frac{\partial f}{\partial x}(xt, yt) + y\frac{\partial f}{\partial y}(xt, yt)dt$.
2. Montrer qu'il existe $g, h \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que $\forall x, y,\ f(x, y) = xg(x, y) + yh(x, y)$

Exercice 3 :

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\Delta f = 0$.
si $r \in \mathbb{R}^+$, on pose $I(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))dt$.

1. Montrer que $I(r)$ ne dépend pas de r. (mq I est $\mathcal{C}^2$, et trouver une ED sur I)
2. Soit $R \in \mathbb{R}^+$. Justifier l'existence de $\max_{\overline{B(0,R)}} f$.
   Que dire si ce max est atteint en $(0, 0)$?

Exercice 4 : Valeurs propres d'un endomorphismes symétriques

Soit $u \in S(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.

1. On pose $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto < u(x), x >$.
   Montrer que f est différentiable et calculer $\mathrm{grad} f(x)$. (pas de dérivées partielles. DLs)

2. On pose $g : x \mapsto \|x\|^2$. Différentiabilité et gradient de g?

3. Soit $\Phi : x \in E\backslash\{0\} \mapsto \dfrac{< u(x), x >}{\|x\|^2}$. Différentiabilité et gradient de Φ?

4. Montrer que Φ est bornée et atteint ses bornes.
   Montrer sans utiliser le théorème spectral que u admet une valeur propre réelle.

5. En utilisant le théorème spectral, dire ce que valent les extrema de Φ.

Exercice 5 : Caractérisation de $u^{-1}(b)$ si $u \in S^{++}(\mathbb{R}^n)$

Soient u un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ défini positif, $b \in \mathbb{R}^n$, et
$f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto < u(x), x > -2 < b, x >$.

1. Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \geq \beta||x||^2 - 2||b||||x||$.
   En déduire que f est minorée et atteint son inf.

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ et exprimer $\text{grad}f(x)$ en fonction de $u(x)$ et b. (DL)

3. Montrer que f atteint son inf. en un unique point à préciser.

Exercice 6 : Points fixes attractifs et répulsifs

1. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{1}{12}(6x + xy - \sin(x + y), 3e^{xy} + 5y - x - 3)$.

   (a) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$.
   Calculer la matrice jacobienne M de f en $(0, 0)$ et la diagonaliser.

   (b) En utilisant la diagonalisation, montrer qu'il existe une norme $\|\ \|$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall a \in \mathbb{R}^2,\ \|Ma\| \leq \dfrac{1}{2}\|a\|$.

   (c) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\|a\| \leq r \implies f^n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0, 0)$, où f^n désigne l'itérée n-ième de f.

2. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (6x + xy - \sin(x + y), 3e^{xy} + 5y - x - 3)$.

   (a) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$.
   Calculer la matrice jacobienne M de f en $(0, 0)$ et la diagonaliser.

   (b) En utilisant une base de diagonalisation, montrer qu'il existe une norme $\|\ \|$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall a \in \mathbb{R}^2,\ \|Ma\| \geq 2\|a\|$.

   (c) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que si $\|a\| \leq r$ et $a \neq (0, 0)$, alors $\|f(a)\| > \|a\|$.

   (d) Soit $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0, 0)$, où f^n désigne l'itérée n-ième de f. Que dire de la suite $(f^n(a))$?

Exercice 7 :

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ < \text{grad}(f)(x), x >= 0$.
   Que dire? (et le montrer)

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ < \text{grad}(f)(x), x >\geq 0$.
   Que dire de $f(0)$? (et le montrer)

3. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(\text{grad}(f)(x), x)$ est liée.
   Que dire? (et le montrer)

Exercice 8 : Fonctions homogènes

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, et $k \in \mathbb{N}$.
Montrer que sont équivalents:
(1) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+,\ f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$.
(2) $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = kf(x)$.

Exercice 9 :

$f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$, est telle que $\Delta(f) = \Delta(f^2) = 0$. Montrer que f est constante.

Exercice 10 : Extremum relatif sur $O(n)$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique.
AS_n désigne l'espace des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in AS_n$. En utilisant $t \mapsto e^{tA}$, montrer que A est un vecteur tangent à $O(n)$ en I_n.

2. Réciproquement, si A est un vecteur tangent à $O(n)$ en I_n, montrer que $A \in AS_n$.

3. Si $O \in O(n)$, quel est l'ensemble des vecteurs tangents à $O(n)$ en O?

4. Si $O \in O(n)$, montrer que $\{AO \mid A \in AS_n\} = \{OA \mid A \in AS_n\}$ de manière élémentaire, et en utilisant ce qui précède.

5. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.
Justifier l'existence de $\max\limits_{O(n)} f$.
Soit $O \in O(n)$ tel que $f(O) = \max\limits_{O(n)} f$. Montrer qu'il existe S symétrique telle que $\mathrm{grad} f(O) = OS$.

Exercice 11 : Fonctions convexes

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est convexe si et seulement si $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + tb)$ est convexe.

2. Si f est $\mathcal{C}^1$, montrer que f est convexe si et seulement si $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$, $< \mathrm{grad}(f)(b) - \mathrm{grad}(f)(a), b - a > \geq 0$.

Exercice 12 : Un critère de difféomorphisme

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.
On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $||f(y) - f(x)|| \geq C||x - y||$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On note $g_a : x \in \mathbb{R}^n \mapsto ||f(x) - a||^2$.
Montrer que $g_a(x) \xrightarrow[||x|| \to +\infty]{} +\infty$, et que g_a est minorée et atteint son inf.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $||df_x(h)|| \geq C||h||$ (utiliser $y = x + th$, $t \to 0$), et que $df_x \in GL(\mathbb{R}^n)$.

3. Soit $a, b, h \in \mathbb{R}^n$. Calculer la dérivée en 0 de $t \in \mathbb{R} \mapsto g_a(b + th)$. (fait intervenir $d_b f$)

4. Montrer que f est surjective, et finalement un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Exercice 13 :

On considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et telle que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$

1. Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$ et en déduire qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{grad} f(u)$ soit nul.

2. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé et $g : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto f(x) - < u_0 | x >$.
   En utilisant g, montrer que l'application $\text{grad} f \ : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ u & \mapsto & \text{grad} f(u) \end{cases}$ est surjective.

3. On suppose à partir de maintenant que f est, de plus, strictement convexe, c'est-à-dire :
   $$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall \lambda \in]0,1[, x \neq y \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
   Montrer que l'application $\text{grad} f$ est bijective. (utiliser $t \mapsto f(a + t(b-a))$, $a, b \in \mathbb{R}^n$.

4. Montrer que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|\text{grad} f(x)\| = +\infty$

5. Montrer que $\text{grad} f$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ (application bijective continue dont la réciproque est continue).

Exercice 14 :

$C \in [0,1[$. $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifient $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \leq C$ et $|g'(t)| \leq C$.
Montrer que $h : (x,y) \mapsto (x + g(y), y + f(x))$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15 : Principe du maximum pour les fonctions harmoniques

U est un ouvert non vide borné de $\mathbb{R}^n$. $\partial U = \overline{U} \backslash U$ est la frontière de U.
$f : \bar{U} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\bar{U}$, $\mathcal{C}^2$ sur U.

1. Justifier l'existence de $\max\limits_{\overline{U}} f$.

2. On suppose $\Delta(f) > 0$.
   Soit $a \in \overline{U}$ tel que $f(a) = \max\limits_{\overline{U}} f$.
   Si $a \in U$, en considérant i tel que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) > 0$, et $g : t \in [-\delta, \delta] \mapsto f(a_1, ..., a_i + t, ..., a_n)$ (δ à préciser), trouver une contradiction.

3. On suppose $\Delta(f) = 0$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Calculer le laplacien de $x \mapsto f(x) + \varepsilon ||x||^2$.
   Montrer qu'il existe $a \in \partial U$ tel que $f(a) = \max\limits_{\overline{U}} f$.

4. On suppose $\Delta(f) = 0$. Que dire si f est constante sur ∂U?

Exercice 16 : Noyau de Poisson

Si $f : P \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on note $\tilde{f} : (x,y) \in ... \subset \mathbb{R}^2 \mapsto f(x+iy)$.
$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $D = D(0,1)$ (disque ouvert dans $\mathbb{C}$), assimilés aux cercle et disque unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme euclidienne usuelle.
Si $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $P_r(\theta) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$.
Si $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $g(re^{i\theta}) = P_r(\theta)$.

1. Vérifier que $P_r(\theta)$ est bien défini, et que $P_r(\theta) = Re\left(\dfrac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right) = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2} \geq 0$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(\theta) d\theta$.

3. Justifier la définition de g. Justifier que $(r, \theta) \mapsto g(re^{i\theta})$ et $\tilde{g}$ sont $\mathcal{C}^2$ sur D.
   En utilisant la formule du laplacien en polaire, et justifiant des dérivations terme à terme, montrer que $\Delta \tilde{g} = 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}(C, \mathbb{C})$. On souhaite montrer qu'il existe $w \in \mathcal{C}(\overline{D})$, coïncidant avec $\tilde{f}$ sur C, de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, et telle que $\Delta w = 0$ sur D (problème de Dirichlet).

Si $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $h(re^{i\theta}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt$.

4. Justifier la définition de h, et montrer que, sur D, $\tilde{h}$ est $\mathcal{C}^2$ et $\Delta\tilde{h} = 0$.

5. Montrer que h se prolonge continûment sur $\overline{D}$ en posant $h_{|C} = f$.
   Ainsi $w = \tilde{h}$ convient.

Exercice 17 : Théorème de Liapounov

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ vérifie l'équation différentielle $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = f(g(t))$.
On suppose que $f(0) = 0$, et que toutes les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de df_0 sont de parties réelles < 0.
On veut montrer que, si $g(0)$ est assez proche de 0, alors $g(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On note A la matrice de df_0 dans la base canonique, et $\alpha = \max\{Re(\lambda) \mid \lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(\phi)\}$. On a donc $\alpha < 0$.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||M||| = \sup\limits_{||x||=1} ||Mx||$ est la norme subordonnée à $||\ ||$ la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$.
On rappelle que M est $|||M|||$-lipschitzienne.

1. A l'aide d'une trigonalisation par bloc, montrer que $e^{tA} \underset{t\to+\infty}{=} O(t^n e^{\alpha t})$ (utilisation d'une norme quelconque, étant donné l'équivalence des normes).

2. Justifier l'existence de $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} |||e^{tA}|||^2 dt$.

3. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, on pose $\Psi(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} < e^{tA}x, e^{tA}y > dt$.
   Montrer que Ψ est bien défini, et est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
   On note $q(x) = \Psi(x,x)$ le carré de la norme associée.

4. Si $x \in \mathbb{R}^n$, vérifier que $\Psi(Ax, x) = \dfrac{1}{2}\left[||e^{tA}x||^2\right]_{t=0}^{+\infty} = -\dfrac{1}{2}||x||^2$.

5. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, montrer que $|\Psi(x,y)| \leq C||x||\ ||y||$.

6. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $q(g(t)) \leq \delta \Longrightarrow (q \circ g)'(t) \leq -\dfrac{1}{2}q(g(t))$.
   On se fixe un tel δ.
   On suppose $||q(g(0))|| \leq \delta$.

7. Montrer que $\forall t \geq 0$, $q(g(t)) \leq \delta$, puis que $\forall t \geq 0$, $q(g(t)) \leq q(0)e^{-t/2}$.
   Conclure.

Exercice 18 : Soient D_1, D_2, D_3 trois droites affines de $\mathbb{R}^3$ deux à deux non parallèles, et $g : (m_1, m_2, m_3) \in D_1 \times D_2 \times D_3 \mapsto ||m_1 - m_2||^2 + ||m_1 - m_3||^2 + ||m_2 - m_3||^2$.
On se donne pour tout i, $a_i \in D_i$ et u_i un vecteur directeur de D_i.

1. Soit $f : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto ||m_1 - m_2||^2 + ||m_1 - m_3||^2 + ||m_2 - m_3||^2$ avec $m_i = a_i + x_i u_i$.
   Calculer $grad(f)$, et montrer que f admet un unique point critique.

2. Montrer que g est minorée et atteint son inf en un unique point.

3. Si D_1, D_2, D_3 sont coplanaires et délimitent un triangle équilatéral, déterminer ce point.

Exercice 19 : Changements de variables dans des EDP

1. Trouver les applications $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant : $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On utilisera le changement de variables : $u = xy$, $v = x/y$.
2. Trouver les applications $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2$. On utilisera le changement de variable : $u = xy$, $v = y/x$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R}^- \times \{0\})$: $x\dfrac{\partial f}{\partial x} = -y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, en posant $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases}$