1 Semaine 1 : Logique, Sommes

Exercice 1

Ecrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles :
$A = 2 \times 4 \times \cdots \times (2p)$ et $B = 1 \times 3 \times \cdots \times (2p+1)$

Exercice 2

Vérifier que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour $n \geq k \geq 1$.
En déduire : $\sum_{i=0}^{n} k\binom{n}{k}$

Exercice 3

Calculer : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j), \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{j}$

2 Semaine 2 : Fonctions usuelles

Exercice 4

Domaine de définition, de dérivabilité, variations, limites et assymptote obliques de $f : x \mapsto x^x$. On prolonge f en 0 en posant $f(0) = 1$, f est-elle dérivable en 0 ?

3 Semaine 3 : Fonctions usuelles, injectivité, bijectivité, surjectivité

Exercice 5

Résoudre :

$$\left|\frac{3x+1}{-2x+4}\right| \leq 2$$

Exercice 6

Montrer que : $\forall x \in [-1;1], \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 7

Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \mapsto F$ et $f : F \mapsto G$ deux applications.
Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est injective.

Exercice 8

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$

4 Semaine 4 : Fonctions usuelles, trigonométrie

Exercice 9

Soient x et y dans $[0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $\tan x = \frac{1}{7}$ et $\tan y = 2$. Montrer que $\frac{\pi}{2} < x + 2y < \frac{5\pi}{4}$.
Calculer $\tan(x + 2y)$. En déduire la valeur de $x + 2y$.

5 Semaine 5 : Complexes, trigonométrie

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$.

Exercice 11

Linéariser $\cos^6 x$.

6 Semaine 6 : Complexes, calcul d'intégrale

Exercice 12

Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\frac{1}{u(1-u^2)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{1-u} + \frac{c}{1+u}$.
En posant $u = \sin$, calculer $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{u(1-u^2)} du$

Exercice 13

Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tel que $A(1)$, $B(z)$ et $C(z^2)$ forment un triangle rectangle.

7 Semaine 7 : Équations différentielles

Exercice 14

Soit l'équation différentielle (E) : $(t^2 + 1)y'' - 2y = 0$ pour $t \in \mathbb{R}$
1. Montrer qu'une solution polynomiale de (E) autre que la fonction nulle est forcément de degrés 2. Donner une telle solution y_0.
2. Soit y fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. MOntrer qu'on peut écrire $y = zy_0$ avec z foncton deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. En posant $y = zy_0$ montrer que y est solution de (E) ssi z' est solution d'une équation (E') que l'on déterminera.
4. Calculer le dérivée de $t \mapsto \frac{t}{1+t^2} + \arctan t$
5. Résoudre (E).

8 Semaine 8 : Ensembles et applications

Exercice 15

Soit n in $\mathbb{N}$. On veut montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Établir que $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor$ est périodique de période $\frac{1}{n}$. Montrer que si $x \in [0, \frac{1}{n}[$, $f(x) = 0$ et conclure.

Exercice 16

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor$

Exercice 17

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.