1 Exponentielle de matrice

Exercice 1 :

1. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tel que $\exp(A) = B$, et montrer qu'il n'existe pas $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\exp(A) = B$.
2. Mêmes questions avec $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Si A est diagonalisable, à quelle CNS a-t-on $\exp(tA) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, à quelle CNS a-t-on $\{\exp(tA) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ borné?
2. $M = \lambda I_p + N$, avec N nilpotent.
   Justifier que, si $t \in R$, $\exp(tM) = e^{t\lambda}\exp(tN)$.
   Montrer qu'il existe un entier k tel que $||\exp(tN)|| \underset{t\to+\infty}{=} O(t^k)$.
   En déduire que, si $Re(\lambda) < 0$, $\exp(tM) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
3. On suppose que $\forall \lambda \in Sp(A)$, $Re(\lambda) < 0$. Montrer que $\exp(tA) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   On utilisera une trigonalisation par bloc de A.
4. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\forall \lambda \in Sp(A)$, $Re(\lambda) < 0$.
   (b) Toutes les solutions de $x' = Ax$ ($x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$) tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 3 : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t)g'(t) = g'(t)g(t)$.
   Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $(g^n)'(t) = ng'(t)(g(t))^{n-1}$.
   Montrer que $h : t \mapsto \exp(g(t))$ est $\mathcal{C}^1$ et que $\forall t \in \mathbb{R}$, $h'(t) = g'(t)\exp(g(t))$.
2. $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente. Si $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}t^k}{k} U^k$.
   (a) Calculer $(I_n + tU)f'(t)$.
   (b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \exp(f(t))$.
   Montrer que $(I_n + tU)g'(t) = Ug(t)$, puis que $g'' = 0$.
   En déduire $g(t) = I_n + tU$.

   Ainsi $I_n + U = g(1) = \exp(f(1))$ **est une exponentielle de matrice**

   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe $W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $e^W = \lambda I_n + U$.
3. En déduire que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Exercice 4 : $\| \|_2$ est la norme sur $\mathbb{R}^n$ issue du produit scalaire canonique, qui est noté $< \, , \, >$.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que toutes les solutions de $X'(t) = AX(t)$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. ($X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$).

   On se fixe désormais une matrice antisymétrique quelconque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (${}^tA = -A$).

2. Soit $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$. Montrer que $\|X\|_2$ est constante.
3. $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ vérifie $\|B(t)\|_2 \underset{t\to\pm\infty}{=} O(1/t^2)$. Montrer que toutes les solutions de $X'(t) = AX(t) + B(t)$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $g' \leq hg$.
   Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ y \geq x \Rightarrow g(y) \leq g(x) \exp\left(\int_x^y h(t)dt\right)$.
5. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que toutes les solutions de $X'(t) = \left(A + \dfrac{1}{1+t^2}C\right) X(t)$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

2 EDL scalaires d'ordres 1 et 2

Exercice 5 : Résolutions
Résoudre, sur des intervalles à préciser, les équations différentielles suivantes :

1. $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$ (séries entières)
2. $(x^2+3)y'' + xy' - y = 1$
3. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ (changement $u = e^x$)
4. $y'' + y = \operatorname{cotan}(x)$

Exercice 6 : f est continue intégrable sur $\mathbb{R}$. $(E) : y' - y + f = 0$

1. Montrer que (E) admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$, que l'on note g.
2. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} f$

Exercice 7 : Soit $(E) \ : \ y'' + \dfrac{1}{x^2+4x^3+3}y = 0$, équation différentielle que l'on considère sur $\mathbb{R}^+$.

1. Soit f une solution bornée de (E).
   Montrer que f' admet une limite finie en $+\infty$, et que cette limite est 0.
2. Montrer que (E) admet une solution non bornée. (Considérer un système fondamental de solutions et le wronskien associé)

Exercice 8 :
Soient $(E) \ : \ y'' + \cos(x)y' - x^2y = e^x$ et $(E_0) \ : \ y'' + \cos(x)y' - x^2y = 0$, équations différentielles que l'on considère sur $[0, 1]$.

1. Soit f une solution de (E_0) telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $f = 0$. (considérer les extrema de f)
2. On note S_0 l'ensemble des solutions de (E_0).
   Utilisant $\Phi : f \in S_0 \mapsto (f(0), f(1))$, montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution f de (E_0) vérifiant $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

3. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

4. Donner un exemple d'équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur $[0,1]$ n'admettant pas de solution f vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Exercice 9 :

Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + xy' + (x+1)y = 0$.
Soit $f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une solution sur un intervalle non trivial centré en 0.

1. Donner les relations entre les a_n.

2. Montrer que (a_n) est bornée. Qu'en conclure?

3. Soit $b > 0$. Montrer que pour n assez grand $|a_{n+2}| \leq b \max(|a_{n-1}|, |a_n|)$.

4. Montrer que toute solution de (E) est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 : propriété de Sturm

1. Soient q_1 et q_2 dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ telles que $q_1 \leq q_2$.
   Soient f_1 une solution de $y'' + q_1 y = 0$, et f_2 une solution de $y'' + q_2 y = 0$.
   Soient $a < b$ dans I tels que $f_1(a) = f_1(b) = 0$ et f_1 ne s'annule pas dans $]a,b[$.
   On veut montrer que f_2 s'annule dans $[a,b]$. Par l'absurde on suppose $\forall x \in [a,b]$, $f_2(x) \neq 0$.
   (a) Justifier que l'on peut se ramener au cas $f_2 > 0$ sur $[a,b]$, et $f_1 > 0$ sur $]a,b[$.
   (b) Montrer que $w = f_1 f_2' - f_1' f_2$ est décroissante sur $[a,b]$.
   (c) En regardant $w(a)$ et $w(b)$, trouver une contradiction.

2. Soit $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle $q \geq 1$, et f une solution de $y'' + qy = 0$. Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b - a \geq \pi$, montrer que f s'annule dans $[a,b]$.

Exercice 11 :

On considère sur $\mathbb{R}^+$ l'équation différentielle (E) : $f''(x) - (x^4+1)f(x) = 0$.
Soit f_0 la solution de (E) telle que $f_0(0) = 1$ et $f_0'(0) = 1$. On note $g = (f_0)^2$.

1. Montrer que g est convexe. Donner les valeurs de $g(0)$ et $g'(0)$.

2. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f_0(t) \geq 1$.

3. Montrer que $\frac{1}{f_0^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   On pose $f_1 : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto f_0(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{f_0^2}$.

4. Montrer que f_1 est solution de (E). (Note : f_1 s'obtient avec la méthode du wronskien)

5. Montrer que $f_1' \leq 0$ et que f_1 est bornée.

6. Quelles sont les solutions bornées de (E)?

Exercice 12 :

Soient (E) : $(1-x)y'' - y = 0$ et f la solution de (E) sur $]-1,1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) \geq 1$.
   On pourra considérer $\sup\{d \in [0,1[\ |\ \forall x \in [0,d],\ f'(x) \geq 1\}$.

   On pose, si $x \in [0,1[$, $h(x) = \displaystyle\int_0^x \left(1 + \int_0^t \frac{2u}{1-u} du\right) dt$.
   On admet qu'une étude montre que $\forall x \in [0,1[,\ h(x) \leq 2x$.

2. En déduire que f est bornée, et étudier le comportement de f en 1.

3. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Exercice 13 :
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f + f'' \geq 0$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geq 0$.

Exercice 14 :

1. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)^2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n}{(n+1)^2} + 2\frac{a_{n+1}}{n+1}$$

   Calculer a_n, et montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |b_n| \leq \dfrac{C}{n^4}$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f''(x) = e^{-x}f(x)$ et $f(x) - (ax+b) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   On cherchera f formellement sous la forme $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_nx+b_n)e^{-nx}$, et on s'intéressera à la convergence et au caractère $\mathcal{C}^2$ ensuite.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^{-x}f(x)$ et $f(x) - (ax+b) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 15 :
Si $\lambda \in \mathbb{C}$, on note (E_λ) : $y'' + 2xy' + (1 - \lambda + x^2)y = 0$.
On s'intéresse aux solutions complexes de (E_λ)
Soit $V = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\Phi : f \in V \mapsto (x \mapsto f'(x) + xf(x)) \in V$.
Φ est trivialement linéaire, et donc $\Phi \in \mathcal{L}(V)$.
$\Phi^2 = \Phi \circ \Phi$.

1. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, résoudre l'ED $\Phi(f) = \lambda f$, et donner f_λ telle $Ker(\Phi - \lambda id) = vect(f_\lambda)$.

2. Si $f \in V$, calculer $\Phi^2(f)(x)$.
   Si $\lambda \in \mathbb{C}$, Que sait-on de $\dim(Ker(\Phi^2 - \lambda id))$?

3. Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, donner une base de $Ker(\Phi^2 - \lambda id)$. On introduira $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu^2 = \lambda$.

4. Résoudre (E_0).

Exercice 16 : Soit $f(x) = \displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie $\forall x > 0,\ f(x) + f''(x) = 1/x$.

3. Résoudre l'équation précédente par la méthode de variation des constantes.
   On utilisera : $C(x) = \int_{t=x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ et $S(x) = \int_{t=x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ (rappeler pourquoi ces intégrales existent)
4. En déduire : $\forall x > 0,\ f(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt.$
5. En déduire : $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ (rappeler pourquoi l'intégrale existe).

Exercice 17 :

$\mathcal{C}_1$ est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 1-périodiques, $\mathcal{C}_1^2$ est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 1-périodiques, $\mathcal{C}$ est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$a, b, c \in \mathcal{C}_1$ vérifient $a > 0$, $c \leq 0$ et $c \neq 0$.

Si $f \in \mathcal{C}^2$, on pose $T(f) = af'' + bf' + cf$.

On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^2 \mid T(f) = 0\}$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2$. On suppose que f admet en un $x_0 \in \mathbb{R}$ un maximum local tel que $f(x_0) \geq 0$.
   Quel est le signe de $T(f)(x_0)$?
2. Justifier que l'image de $\mathcal{C}^2$ par T est $\mathcal{C}$.
3. Soit $g \in \mathcal{C}^2$ telle que $T(g) \geq 0$.
   Montrer que $\forall [x, y] \subset \mathbb{R},\ \max\limits_{[x,y]} g \leq \max(0, g(x), g(y))$.
   On pourra commencer par le cas $T(g) > 0$ et utiliser la question 2 pour le cas général.
4. Montrer que la restriction de T à $\mathcal{C}_1^2$ est injective.
5. Montrer que l'application $f \mapsto (f(0) - f(1), f'(0) - f'(1))$, de E dans $\mathbb{R}^2$, est un isomorphisme.
6. Montrer que l'application $f \mapsto T(f)$, de $\mathcal{C}_1^2$ dans $\mathcal{C}_1$ est un isomorphisme.

Exercice 18 :

On note (E) l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + q(x)f(x) = 0$ où $q(x) = 1 + \frac{1}{1 + x^2 + x^4}$ et S l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de (E).

1. Si $f \in S$, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. **Inégalité de Gronwall**
   Soient $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) \leq a(x)h(x)$.

   Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \Longrightarrow h(y) \leq h(x) \exp\left(\int_x^y a(t)dt\right)$.
   On pourra étudier he^{-A}, où A est une primitive de a

   Dans la suite, f est une solution de (E)

3. **Les solutions sont bornées.**
   Soit $h = f^2 + (f')^2$. (ce sont des carrés, pas des composées)
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) \leq (q(x) - 1)h(x)$.

(b) Montrer que h, puis f et f', sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

(c) En utilisant $w : x \mapsto f(-x)$, montrer que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}^-$, et donc finalement sur $\mathbb{R}$.

4. **Comparaison avec les solution de l'équation limite $y'' + y = 0$ a l'infini**

(a) Donner les solutions réelles de $(F) : y'' + y = 0$.

On va montrer que f s'approche en $+\infty$ par une solution de (F).

(b) Montrer qu'il existe d'uniques fonctions a, b de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornées telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(x) = a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x) \\ \\ f'(x) = -a(x)\sin(x) + b(x)\cos(x) \end{cases}$$

(c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} a'(x) = (q(x) - 1)\sin(x) f(x) \\ \\ b'(x) = (1 - q(x))\cos(x) f(x) \end{cases}$

(d) Montrer que a et b admettent des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$

(e) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) - \alpha\cos(x) - \beta\sin(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 19 : q est une fonction continue π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
On considère l'équation différentielle (1) : $x''(t) - q(t)x(t) = 0$.
Soit S l'ensemble des solutions de (1) sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes.

Partie I : généralités

1. Que savez-vous de S?

2. Si x_1 et x_2 sont dans S, et $w = x_1 x_2' - x_1' x_2$ est le wronskien associé, montrer que w est contant.

3. Justifier qu'existent d'uniques x_1 et x_2 dans S vérifiant $(x_1(0), x_1'(0)) = (1, 0)$ et $(x_2(0), x_2'(0)) = (0, 1)$. Montrer que (x_1, x_2) est une base de S.

Pour toute la suite x_1 et x_2 désignent ces solutions de S

Partie II : opérateur de translation

On définit l'opérateur T de translation par π comme l'application de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans lui-même définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ T(f)(t) = f(t + \pi)$$

1. Montrer que T est un automorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction propre (ie vecteur propre) de T : $f \neq 0$ et $T(f) = \lambda f$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

   (a) Si $|\lambda| = 1$, montrer que f est bornée, et $f(t) \underset{t \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

   (b) Si $|\lambda| < 1$, montrer que $f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (c) Si $|\lambda| > 1$, montrer que f est non bornée.

3. Montrer que, si $f \in S$, $T(f) \in S$.
   On note pour la suite $W : S \to S$ l'endomorphisme induit par T sur S.

4. Montrer que W est un automorphisme de S.

Partie III : solutions stables et fortement stables de (1)

Une solution x de (1) est dite stable si elle est bornée, fortement stable si $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, instable si elle est non bornée.
On va étudier ces trois notions à l'aide de l'opérateur de translation W introduit dans la partie **II**.
On note M la matrice de W dans la base (x_1, x_2) de S

1. Montrer que $M = \begin{pmatrix} x_1(\pi) & x_2(\pi) \\ x_1'(\pi) & x_2'(\pi) \end{pmatrix}$. On note pour la suite $\Delta = \dfrac{1}{2}Tr(M)$.

2. Montrer que le polynôme caractéristique de M est $X^2 - 2\Delta X + 1$.

   On suppose pour la suite Δ réel.

3. On suppose ici $|\Delta| \neq 1$.

   (a) Montrer que W est diagonalisable.

   (b) Si $|\Delta| < 1$, montrer que toute solution de (1) est stable.

   (c) $|\Delta| > 1$, montrer qu'existe une solution de (1) fortement stable. Est-elle unique? Existe-t-il des solutions stables non fortement stables?
   Existe-t-il des solutions instables?

4. On suppose ici $|\Delta| = 1$.

   (a) Montrer qu'existe une base (y_1, y_2) de S dans laquelle la matrice de W est de la forme $\begin{pmatrix} \Delta & a \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{C}$.

   (b) On suppose $a \neq 0$. Montrer qu'existe une solution de (1) stable mais non fortement stable. Déterminer les solutions fortement stables de (1).

   (c) On suppose $a = 0$. Que dire des solutions de (1) en terme de stabilité?