Exercice 1 :

1. E est un espace euclidien de dimension 3, $e_1, ..., e_4$ quatres vecteurs de E de norme 1 de sorte que:
   $(\widehat{e_1, e_2}) = (\widehat{e_1, e_3}) = (\widehat{e_1, e_4}) = \alpha \neq 0[\pi]$ et $(\widehat{e_2, e_3}) = (\widehat{e_2, e_4}) = (\widehat{e_3, e_4}) = \beta \neq 0$.

   Faire une figure représentant la configuration.
   Soit $H = e_1^\perp$ et p la projection orthogonale sur H.
   Justifier que, si $i \in \{2, 3, 4\}$, $p(e_i) \neq 0_E$.
   Montrer que $(\widehat{p(e_2), p(e_3)}) = (\widehat{p(e_2), p(e_4)}) = (\widehat{p(e_3), p(e_4)}) \neq 0$, et donner la valeur de cet angle.

   Etablir que $\cos(\beta) - \dfrac{3}{2}\cos^2(\alpha) + \dfrac{1}{2} = 0$. Quel est l'angle entre quatre vecteurs issus du centre d'un tétraèdre régulier et pointant vers ses sommets?

2. (a) E est un espace euclidien, et $e_1, ..., e_k$ sont des vecteurs de norme 1 de E formant deux à deux un même angle non nul ie qu'existe $\alpha \in]0, \pi]$ tel que $\forall i, j \in [\![1, k]\!]$, tels que $i \neq j$, $(\widehat{e_i, e_j}) = \alpha$.
   Soit p la projection orthogonale sur $H = e_1^\perp$.
   Si $k \geq 3$, justifier que $\forall i \in [\![2, k]\!]$, $p(e_i) \neq 0_E$.
   Montrer qu'existe $\beta \in]0, \pi]$ tel que $\forall i, j \in [\![2, k]\!]$, tels que $i \neq j$, $(\widehat{p(e_i), p(e_j)}) = \beta$ et que si α est aigu (ie $\alpha \leq \pi/2$), β l'est aussi. (on donnera une relation entre $\cos(\alpha)$ et $\cos(\beta)$)

   (b) Donner (et démontrer) une majoration optimale dans E euclidien de dimension n, du nombre d'éléments d'une famille de vecteurs formant deux à deux un même angle non nul. Idem en imposant de plus à l'angle d'être aigu.

Exercice 2 : Familles angle-obtuses

Une famille $(e_1, ..., e_k)$ $(k \geq 2)$ d'un espace euclidien sera dite angle-obtuse ssi:

$$\forall i, j \in [\![1, k]\!],\ i \neq j \Longrightarrow < e_i, e_j > < 0$$

1. Soit E un espace euclidien, $(e_1, ..., e_k)$ une famille angle-obtuse de E $(k \geq 3)$, $H = e_1^\perp$ et p la projection orthogonale sur H.

   Si $i \in [\![2, k]\!]$, justifier que $p(e_i) = e_i - \dfrac{< e_i, e_1 >}{\|e_1\|^2} \cdot e_1$.
   Montrer que $(p(e_2), ..., p(e_k))$ est angle-obtuse.
   On notera pour la suite que cette dernière famille est constituée de vecteurs de H.

2. Montrer que, si E est un espace euclidien de dimension n, toute famille angle-obtuse de E est de cardinal $\leq n + 1$.

3. Soit E euclidien de dimension n, H un hyperplan de E $(\dim(H) = n - 1)$, et $(e_1, ...e_k)$ $(k \geq 2)$ une famille angle-obtuse de H.
   Soit $w \in H^\perp \backslash \{0_E\}$.
   Montrer que pour $t > 0$ <u>*assez petit*</u>, la famille $(e_1 - t.w, e_2 - t.w, ..., e_k - t.w, w)$ est angle-obtuse.

4. Montrer que, si E est un espace euclidien de dimension n, il existe une famille angle-obtuse de E de cardinal $n + 1$.

Exercice 3 : Caractérisation des parties finies d'un espace euclidien

1. Si E est euclidien et $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, montrer qu'existe $(y_1, ..., y_n)$ famille de E telle que pour tous i, j, $< e_i, y_j >= 1$ si $i = j$ et 0 si $i \neq j$, et que c'est une base de E.

2. Soit P une partie de E euclidien. Montrer que P est finie ssi $\{< x, y > \mid x, y \in P\}$ est fini. (on pourra supposer, quitte à restreindre l'espace, que $E = vect(P)$, et se donner une base de E formée de vecteurs de P)

Exercice 4 : Suite de polynômes orthogonaux

On définit, si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.

1. Montrer que $<, >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. En appliquant à $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ le procédé de Schmidt, montrer qu'existe une seule famille orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans laquelle $d(P_n) = n$ et $< P_n, X^n >> 0$. Montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}[X]$.

3. On pose $Q_n = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dX^n}((X^2 - 1)^n)$.
   Montrer que $d(Q_n) = n$, que Q_n est orthogonal à tout polynôme P de degré $< n$.
   Calculer $\|Q_n\|$, $Q_n(1)$, $Q_n(-1)$.
   Montrer que Q_n possède n racines distinctes dans $]-1, 1[$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n = \lambda_n Q_n$ et calculer λ_n.

Exercice 5 : Décomposition "OT" et inégalité d'Hadamard

$\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'existent $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure et $O \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $M = OT$. (ind: propriété de Schmidt appliquée aux colonnes).

Montrer alors l'inégalité d'Hadamard: $|det(M)|$ est inférieur ou égal au produit des normes des colonnes de M.

Exercice 6 : Soient u, v deux rotations de E euclidien de dimension 3. Montrer que $u \circ v = v \circ u$ ssi u et v ont même axe ou sont des symétries par rapport à deux droites orthogonales.

Exercice 7 : Etudier les endomorphismes de E euclidien de dimension 3 dont les matrices dans une base orthonormée sont:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} ; \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\sin(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

S'il s'agit de rotations préciser axe et angle.

Exercice 8 : Soient E euclidien de dimension n, et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E. Soient de plus $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x, y \in E, < x, y >= 0 \Rightarrow < f(x), f(y) >= 0$.

1. Si $i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j$ calculer $< e_i + e_j, e_i - e_j >$ et en déduire que $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

2. montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in O(E)$ tels que $f = \lambda.u$.

Exercice 9 : Soient E euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que p est un projecteur orthogonal ssi $p^2 = p$ et $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 10 : Soit u un automorphisme orthogonal de E euclidien.

1. On pose $v = u - id_E$. Montrer que $Ker(v) = (Im(v))^{\perp}$.

2. Si $x \in E$ et y est la projection orthogonale de x sur $Ker(v)$ montrer que $\|y - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u^k(x)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 11 : Déterminants de Gram

E est un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire $< \, , \, >$.

Si $(e_1, ..., e_n) \in E^n$, on définit $\text{Gram}(e_1, ..., e_n)$ comme le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position (i, j) est $< e_i, e_j >$. Autrement dit, $\text{Gram}(e_1, ..., e_n) = \det\left((< e_i, e_j >)_{1\leq i,j\leq n}\right)$.

1. Montrer que :
   (a) $\text{Gram}(e_1, ..., e_{i-1}, \lambda e_i, e_{i+1}, ..., e_n) = \lambda^2 \text{Gram}(e_1, ..., e_i, ..., e_n)$.
   (b) Si $i \neq j$, $\text{Gram}(e_1, ..., e_i, ..., e_{j-1}, e_j + \lambda e_i, e_{j+1}, ..., e_n) = \text{Gram}(e_1, ..., e_i, ..., e_j, ..., e_n)$. (dans le premier déterminant de Gram, on a $e_j + \lambda e_i$ à la place de e_j)
   (c) S'il existe $i \neq j$ tels que $e_i = e_j$, $\text{Gram}(e_1, ..., e_n) = 0$.

2. En déduire que si $(e_1, ..., e_n)$ est liée, $\text{Gram}(e_1, ..., e_n) = 0$. (On pourra par exemple supposer que $e_n \in vect(e_1, ..., e_{n-1})$)

3. Si $e_1, ..., e_n, y_1, ..., y_n$ sont dans E, et que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i = \lambda_{i,1}e_1 + \lambda_{i,2}e_2 + ... + \lambda_{i,i}e_i$, montrer que $\text{Gram}(y_1, ..., y_n) = (\lambda_{1,1}\lambda_{2,2}...\lambda_{n,n})^2 \text{Gram}(e_1, ..., e_n)$.

   Montrer que si $x \in E$, $\text{Gram}(x, y_1, ..., y_n) = (\lambda_{1,1}\lambda_{2,2}...\lambda_{n,n})^2 \text{Gram}(x, e_1, ..., e_n)$.

4. Montrer que $\text{Gram}(e_1, ..., e_n) \neq 0$ ssi $(e_1, ..., e_n)$ est libre.

5. Soient V un sev de E de dimension finie $n \geq 1$ et p la projection orthogonale sur V.
   Si $x \in E$ et $(y_1, ..., y_n)$ est une base de V (pas nécessairement orthonormée), montrer que $d(x, V)^2 = \dfrac{\text{Gram}(x, y_1, ..., y_n)}{\text{Gram}(y_1, ..., y_n)}$.

Exercice 12 : $A = (a_{i,j}) \in O(n)$. J est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
$\chi_J = ?$ En utilisant $< A, J >$, montrer que $|\sum_{i,j} a_{i,j}| \leq n$.

Exercice 13 :

1. $A \in \mathcal{M}_n(R)$ est antisymétrique. Si $X \in \mathbb{R}^n$, que vaut $< AX, X >$?

2. $B \in \mathcal{M}_n(R)$. $B = A + S$, A antisymétrique, S symétrique. Si $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(B)$, montrer que $min(Sp(S)) \leq \lambda \leq max(Sp(S))$.

Exercice 14 : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in S_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$.

2. Montrer que AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15 : Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. Comparer $tr(ABAB)$ et $tr(A^2B^2)$.

Exercice 16 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $A^3 = {}^tAA$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 17 :

Soient $A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $0 \leq tr(AB) \leq tr(A)tr(B)$.
On écrira $A = PD\ {}^tP$ et $B = PC\ {}^tP$ avec $P \in O(n)$ et D diagonale.

Exercice 18 : "coréduction"

Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$

1. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$.
   On se fixe P ainsi.
2. Justifier que B s'écrit $B = {}^tPCP$ avec $C \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tQQ$ et $B = {}^tQdiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)Q$, où $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les valeurs propres de C.
4. Une application : montrer que $\det(A) + \det(B) \leq \det(A + B)$.
5. Autre application: Si $A, B \in S_n(\mathbb{R})$, $A > B$ signifie $A - B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (ordre de Lowner)
   Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $A > B > 0$. Montrer que $B^{-1} > A^{-1}$.

Exercice 19 : Théorème de Courant et Fischer

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ ses valeurs propres et $(X_1, ..., X_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall i$, X_i est vecteur propre de A associée à la valeur propre λ_i.
On pose $F_k = vect(X_1, ..., X_k)$, si $k \in [\![1, n]\!]$.
Si $k \in [\![1, n]\!]$, on note Ψ_k l'ensemble des sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.

On veut montrer que $\lambda_k = \max\limits_{F \in \Psi_k} \min\limits_{X \in F \setminus \{0\}} \dfrac{< AX, X >}{\|X\|^2}$ (théorème de Courant et Fischer).

1. Que vaut $\dfrac{< AX_k, X_k >}{\|X_k\|^2}$, $k \in [\![1, n]\!]$?
2. Montrer que $\forall X \in F_k \setminus \{0\}$, $\dfrac{< AX, X >}{\|X\|^2} \geq \lambda_k$ et déterminer $\min\limits_{X \in F_k \setminus \{0\}} \dfrac{< AX, X >}{\|X\|^2}$.
3. Soit $F \in \Psi_k$.
   (a) Montrer que $\dim(F \cap vect(X_k, X_{k+1}, ..., X_n)) \geq 1$.
   (b) Si $X \in F \cap vect(X_k, X_{k+1}, ..., X_n)$ est non nul, montrer que $\dfrac{< AX, X >}{\|X\|^2} \leq \lambda_k$.
4. Conclure.

Exercice 20 : Comparaison du spectre d'une matrice symétrique à ses coefficients diagonaux

1. E est un espace euclidien de dimension n de produit scalaire noté $< \, , \, >$.
   $f \in S(E)$ a pour valeurs propres $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$, et $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de vecteurs propres associés.
   (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. $(x_1, ..., x_k)$ est une famille orthonormée de E.
   Montrer qu'existe $x_{k+1} \in (x_1, ..., x_k)^\perp \cap vect(e_1, ..., e_{k+1})$ de norme 1.
   Montrer que $< f(x_{k+1}), x_{k+1} > \leq \lambda_{k+1}$.
   (b) Montrer que si $k \in [\![1, n]\!]$, et $(x_1, ..., x_k)$ est une famille orthonormée de E, alors $\sum\limits_{i=1}^{k} < f(x_i), x_i > \geq \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in S_4(\mathbb{R})$, et $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_4$ ses valeurs propres. Majorer λ_1, $\lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ et calculer $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i$ en utilisant les coefficients diagonaux de M.

Exercice 21 : Caractérisation des matrices symétriques définies positives avec les mineurs principaux

Si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera M_i la matrice $i \times i$ extraite de M obtenue en éliminant les lignes $i+1$ à n et les colonnes $i+1$ à n de M (ie que l'on garde le bloc $i \times i$ "en haut à gauche").
Ainsi par exemple, $M_1 = (m_{1,1})$, et $M_n = M$.
Les déterminants des M_i, $i = 1, ..., n$ sont appelés mineurs principaux de M.
On va montrer que $M \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive ssi tous les mineurs principaux sont > 0.
On se donne $M \in S_n(\mathbb{R})$. On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $V_i = vect(e_1, ..., e_i)$.

1. Montrer que $\forall X, Y \in V_i$, $< M_i\tilde{X}, \tilde{Y} > = < MX, Y >$, où $\tilde{X}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^i$ obtenu en tronquant X, ie en enlevant les $n-i$ derniers 0.
2. Si $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $M_i \in S_i^{++}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que si $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors tous ses mineurs principaux sont > 0.
4. Soit $(v_1, ..., v_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de M, associés aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$.
   (a) Supposons qu'au moins deux des λ_i soient < 0. Quitte à renuméroter, disons $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.
   Soit $W = vect(v_1, v_2)$.
   Montrer que $\forall X \in W \backslash \{0\}$, $< MX, X > < 0$.
   Soit V un sev de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall x \in V \backslash \{0\}$, $< MX, X > > 0$. Montrer que $dim(V) \leq n-2$.
   (b) Montrer que si tous les mineurs principaux de $M \in S_n(\mathbb{R})$ sont strictement positifs, alors $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 22 : Matrice symétrique à coefficients positifs

$M \in S_n(\mathbb{R})$ est à coefficients strictement positifs, de valeurs propres $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$. $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique et de la norme associée.

1. Si $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que $< Mx, x > \leq \lambda_n \|x\|^2$ avec égalité si et seulement si $Mx = \lambda_n x$. (l'hypothèse sur les coefficients de M n'a pas d'utilité ici)
2. Soit $x = {}^t(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ_n.
   On note $x' = {}^t(|x_1|, ..., |x_n|)$.
   Comparer $< Mx, x >$ et $< Mx', x' >$, et en déduire que x' est aussi vecteur propre de M associé à la valeur propre λ_n.
   Montrer que les x_i sont tous de même signe.
3. Montrer que $Ker(M - \lambda_n I_n)$ est de dimension 1.
4. Soit $\lambda_i \neq \lambda_n$, et $y = {}^t(y_1, ..., y_n)$ un vecteur propre associé.
   Montrer que $|\lambda_i| < \lambda_n$, et que les y_i ne sont pas tous strictement de même signe. On pourra commencer par regarder $| < My, y > |$.

Exercice 23 : Soit A une matrice réelle symétrique positive.
On note λ_1 , ... , λ_n ses valeurs propres et $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ ses coefficients.

1. Montrer que les éléments diagonaux de A sont positifs ou nuls.
   Soit ϕ une application convexe de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\phi(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \phi(x_i)$.
   oú les μ_i sont des réels positifs ou nuls, de somme égale à 1 tandis que les x_i sont des réels positifs ou nuls .

3. Montrer que: $\sum_{i=1}^{n} \phi(a_{ii}) \leq \sum_{i=1}^{n} \phi(\lambda_i)$.

4. En déduire: $det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exercice 24 : Soit A une matrice carrée réelle de taille n où $n \geq 1$.

1. On pose $B =^t AA$. Montrer que B est symétrique et positive.

2. Soit S une matrice symétrique-positive réelle de taille $(n+1)$.
   On pose $S = \begin{pmatrix} \alpha & {}^tC \\ C & S_1 \end{pmatrix}$ où S_1 est carrée de taille n.

   (a) Calculer le produit ${}^t\begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix}$ en fonction du réel x et de α, C,${}^tC$, S_1 et X.

   (b) Montrer que α est positif ou nul. Que dire de C quand α est nul ?

   (c) Montrer que la matrice $\alpha S_1 - C^tC$ est symétrique et positive.

3. Montrer que, pour toute matrice symétrique réelle positive, il existe une matrice triangulaire supérieure T telle que: $S =^t TT$.

4. Montrer que: $|det(A)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2}$.

Exercice 25 : symétrique+antisymétrique=orthogonal
On note A_n (resp. S_n) l'espace des matrices antisymétriques (resp. symétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si $A \in A_n$, $S \in S_n$, et $A + S \in O_n(\mathbb{R})$, montrer que $AS = SA$ et $S^2 - A^2 = I_n$.

2. Dans les divers cas suivants, dire dans quels cas il existe $A \in A_n$ telle que $A + S \in O_n(\mathbb{R})$ (Si une telle matrice A existe, donner une valeur possible, sinon prouver la non existence)
   1) $S = diag(1, 1/2, 1/2)$ 2) $S = diag(2, 1, -1)$ 3) $S = diag(1/4, -1/2, 1/2)$

3. Si $A \in A_n$, montrer que la seule valeur propre réelle possible de A est 0.

4. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $A \in A_n$ telle que $A^2 = \lambda I_n$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou ($\lambda < 0$ et n est pair). On pourra commencer par "$\Leftarrow$" avec $n = 2$.

5. Si $S \in S_n$, donner et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $A \in A_n$ telle que $S + A \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 26 : On note $S_n(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients ≥ 0 (à ne pas confondre avec les matrices symétriques positives).

1. Une matrice de $S_n(\mathbb{R}^+)$ peut-elle avoir une valeur propre < 0?

2. Une matrice de $S_n(\mathbb{R}^+)$ peut-elle n'avoir que des valeurs propres < 0?

3. Soit $A \in S_n(\mathbb{R}^+)$ de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$.
   On se donne $(X_1, ..., X_n)$ une base orthonormée de vecteur propres associés. $(AX_i = \lambda_i X_i)$.
   Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $B(\alpha) = \begin{pmatrix} A & \alpha X_n \\ \alpha {}^t X_n & 0 \end{pmatrix} \in S_{n+1}(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ sont valeurs propres de $B(\alpha)$.

   (b) Notons β, γ les deux autres valeurs propres de $B(\alpha)$. Déterminer $\beta + \gamma$ et $\beta\gamma$ en fonction de λ_n et α.

   (c) Déterminer une matrice $A \in S_2(\mathbb{R}^+)$ de valeurs propres -1 et 2, et une matrice de $B \in S_3(\mathbb{R}^+)$ de valeurs propres -2, -1, 4.

4. On note V_n l'ensemble des matrices symétriques de $S_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $[0, 1]$.
   Si $M \in V_n$, on note $\lambda_n(M)$ sa plus grande valeur propre.
   Déterminer $\sup\limits_{M \in V_n} \lambda_n(M)$ et $\inf\limits_{M \in V_n} \lambda_n(M)$

Exercice 27 : Barycentres de matrices

Si E est un $\mathbb{R}$-ev (dans la suite on s'intéresse à $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), on appelle barycentre de $x_1, ..., x_p \in E$ tout élément de E de la forme $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ où les λ_i sont des réels **positifs** vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.

Si P est une partie de E on appelle enveloppe convexe de P, et on note $conv(P)$ l'ensemble des barycentres d'un nombre fini (variable et quelconque) d'éléments de P.
On pose $D_n = \{diag(a_1, ..., a_n) \mid \forall i,\ a_i \in \{-1, 1\}\}$.
$\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique et de la norme associée.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|M\| = \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ et\ \|x\| = 1}} \|Mx\|$.

1. Soient $a_1, ..., a_n \in [-1, 1]$.
   Notant que $diag(a_1, ..., a_n) = \dfrac{1 - a_1}{2} diag(-1, a_2, ..., a_n) + \dfrac{1 + a_1}{2} diag(1, a_2, ..., a_n)$.
   Montrer que $conv(D_n) = \{diag(a_1, ..., a_n) \mid \forall i,\ a_i \in [-1, 1]\}$.

2. Si $M \in conv(O_n(\mathbb{R}))$, montrer que $\|M\| \leq 1$.

3. Décomposition polaire.
   Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que ${}^tMM$ est symétrique à valeurs propres positives, puis qu'existe $S \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = {}^t MM$.

   (b) Montrer qu'existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $M = US$.

   On admettra qu'une telle décomposition reste valable pour une matrice non inversible.

4. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall \lambda \in Sp(S)$, $|\lambda| \leq 1$. Montrer que $S \in conv(O_n(\mathbb{R}))$.

5. Montrer que $conv(O_n(\mathbb{R})) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\| \leq 1\}$

Exercice 28 : Matrices de Hilbert

$\mathbb{R}^n$ assimilé à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique $< A, B > = {}^tAB$ et de la norme associée.

Matrices de produit scalaire

Soit E préhilbertien réel de produit scalaire $(\ |\ )$.
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille libre de E et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient $(e_i | e_j)$ en position (i, j).

1. Si $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + ... y_n e_n$ sont dans E et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, montrer que $(x|y) =< X, MY >$. (calculer "naïvement" $< X, MY >$ avec des sommes)

2. En déduire que $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Inégalités
$M = (m_{i,j}) \in S_n(\mathbb{R})$ a pour valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$

3. Question de cours. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1 ||x||^2 \leq < Mx, x > \leq \lambda_n ||x||^2$.

4. Question de cours. Montrer que pour tout i, $\lambda_1 \leq m_{i,i} \leq \lambda_n$.
Matrices de Hilbert
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position (i, j) est $\dfrac{1}{i+j-1}$.

5. Montrer que $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, et calculer $(X^{i-1}|X^{j-1})$ si $i, j \in \mathbb{N}^*$.

   $(\; | \;)$ désigne ce produit scalaire dans la suite.

6. Montrer que $H_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

   On note $m(n)$ la plus petite valeur propre de H_n, et $M(n)$ la plus grande.

7. Donner un équivalent de $tr(H_n)$ quand $n \to +\infty$.

8. Justifier que $0 < m(n) \leq \dfrac{1}{2n-1}$ et $M(n) \geq 1$.

9. Si $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $P = \sum_{i=0}^{n-1} y_i X^i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer que $< H_n Y, Y >= \int_0^1 P(t)^2 dt$.

10. Si $n \in \mathbb{Z}$, vérifier que $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 2\pi \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
Si $P = \sum_{i=0}^{n-1} y_i X^i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer que $\int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 dt = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i^2$
(écrire $|P(e^{it})|^2 = P(e^{it})\overline{P(e^{it})}$ et développer)

11. Soit $Q = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.
Calculer $-i \int_0^{\pi} e^{it} Q(e^{it}) dt$ en fonction des a_k, et en déduire $\int_{-1}^{1} Q(t)dt = -i \int_0^{\pi} e^{it} Q(e^{it}) dt$.
En déduire en utilisant $Q = P^2$ que, si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 P(t)^2 dt \leq \dfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 dt$.

    On pourra vérifier que $\overline{P(e^{it})} = P(e^{-it})$, et donc $|P(e^{it})| = |P(e^{-it})|$

12. Montrer que $\forall Y \in \mathbb{R}^n$, $< H_n Y, Y > \leq \pi ||Y||^2$, et en déduire $M(n) \leq \pi$.