Exercice 1 : Isométries

E est un $\mathbb{R}$-ev muni d'une norme $\| \|$.
On se donne $f : E \to E$ bijective, conservant les distances (ie $\forall x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$) et vérifiant $f(0) = 0$.
On se propose de montrer que f est linéaire.
Une partie P de E sera dite symétrique par rapport à $a \in E$ si et seulement si $\forall x \in P$, $2a - x \in P$. (vérifier que $2a - x$ est le symétrique de x par rapport à a)
On note $\delta(P)$ le diamètre d'une partie non vide et bornée P de E.

1. Soient $a, b \in E$. On définit par récurrence :
   $P_0 = \{x \in E \mid \|x - a\| = \|x - b\| = \|a - b\|/2\}$
   $\forall n \in \mathbb{N}$ $P_{n+1} = \{x \in P_n \mid \forall y \in P_n, \ \|x - y\| \leq \delta(P_n)/2\}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a + b)/2 \in P_n$, et P_n est symétrique par rapport à $(a + b)/2$.
   (b) Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_n = \{(a + b)/2\}$.
2. $a, b \in E$. les P_n sont définis comme précédemment à partir de a et b, et les P'_n sont définis de la même façon avec $f(a)$ et $f(b)$ à la place de a et b.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P'_n = f(P_n)$, et en déduire que $f((a + b)/2) = (f(a) + f(b))/2$.
3. Montrer que $\forall a, b \in E$, $f(a + b) = f(a) + f(b)$.
4. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\forall x \in E$, $f(rx) = rf(x)$. (commencer par $r \in \mathbb{N}$, puis $r \in \mathbb{Z}$).
5. Montrer que f est linéaire.

Exercice 2 : Rang

$n, p \in \mathbb{N}^*$. On utilisera la caractérisation du rang avec les matrices extraites inversibles.

1. $0 \leq r \leq \min(n, p)$. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mid rg(M) \geq r\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2. $0 \leq r \leq \min(n, p)$. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mid rg(M) \leq r\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : Nature topologique de parties de $\mathcal{M}_n(K)$

1. Donner la nature topologique (ouvert, fermé, compact, dense) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de :
   $GL_n(\mathbb{R})$, $S_n(\mathbb{R})$, $AS_n(\mathbb{R})$, $S_n^+(\mathbb{R})$, $S_n^{++}(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$
2. Notons $R_n(K)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(K)$.
   (a) Montrer que $R_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\|M - A\|_\infty \leq r \Longrightarrow M \notin R_2(\mathbb{R})$.
   (c) Si $n \geq 2$, montrer que $R_n(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 : Décompositions OT et polaire

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact et $T_n^+(\mathbb{R})$ fermé.
2. On a vu que toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit OT avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $T \in T_n^+(\mathbb{R})$.
   Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant une suite de matrices inversibles convergeant vers M et une extraction montrer que M s'écrit OT avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $T \in T_n^+(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^+(\mathbb{R})$ sont fermés.
4. On a vu que toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit US avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant une suite de matrices inversibles convergeant vers M et une extraction montrer que M s'écrit US avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 5 :

Montrer que $f \begin{cases} O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) \mapsto OS \end{cases}$ est bijective, continue, et de réciproque continue.

Exercice 6 : Connexité

1. Montrer que $SO(n)$ est connexe par arcs.

2. $O(n)$ est-il connexe par arcs?

3. E est euclidien, et $f \in S(E)$. Déterminer $\{< f(x), x > \mid ||x|| = 1\}$ et $\{||f(x)|| \mid ||x|| = 1\}$.

4. $\mathbb{R}^n$ est canoniquement euclidien. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\{||M(x)|| \mid ||x|| = 1\}$ en utilisant ${}^tMM$.

Exercice 7 : Normes de suites

On note l^1 l'ensemble des suites complexes (u_n) telles que $\sum |u_n|$ converge, et l^2 l'ensemble des suites complexes (u_n) telles que $\sum |u_n|^2$ converge.

Si $u = (u_n) \in l^1$ (resp. l^2), on pose $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ (resp. $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$).

1. Montrer que l^1 et l^2 sont des $\mathbb{C}$-ev.

2. Montrer que $\| \ \|_1$ est une norme sur l^1, et $\| \ \|_2$ une norme sur l^2.

3. Montrer que $l^1 \subsetneq l^2$, et déterminer $C > 0$ telle que $\forall u \in l^1$, $\|u\|_2 \leq C \|u\|_1$.

4. $\| \ \|_2$ est aussi une norme sur l^1 par restriction. Montrer que $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ ne sont pas équivalentes sur l^1.

Exercice 8 :

1. $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$ on pose $||f|| = |f(0)| + \int_0^1 |f'|$.

   (a) Montrer que $|| \ ||$ est une norme sur E.

   (b) Est-elle équivalente à $|| \ ||_\infty$?

2. Mêmes questions avec $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ (vérifier brièvement que c'est un $\mathbb{R}$-ev) et $||f|| = ||f' + f||_\infty$.

Exercice 9 : E est un $\mathbb{R}$-evn, et $f : E \to E$ vérifie $\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Montrer que f est continue si et seulement si f est continue en 0.

2. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\forall x \in E$, $f(rx) = rf(x)$.

3. Si f est continue, montrer que f est linéaire

4. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $||x|| \leq 1 \Longrightarrow ||f(x)|| \leq C$.
   Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to 0$.
   Justifier qu'il existe $(r_n) \in \mathbb{Q}^N$ telle que $\forall n$, $r_n \leq ||x_n|| \leq 2r_n$, puis montrer que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Conclusion?

Exercice 10 : E est un evn, et A, B des parties de E. On note $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que A, B compacts $\Longrightarrow A + B$ compact.

2. Montrer que A compact et B fermé $\Longrightarrow A + B$ fermé.

3. Montrer que A ouvert $\Longrightarrow A + B$ ouvert.

4. Trouver un exemple, avec $E = \mathbb{R}$, de parties A, B fermées telles que $A + B$ ne soit pas fermée.

Exercice 11 : Un polynôme à n variables, et à coefficients dans K est du type $P(X_1, ..., X_n) = \sum_{i_1,...,i_n} a_{i_1,...,i_n} X^{i_1} ... X^{i_n}$,

les $(i_1, ..., i_n)$ étant dans $\mathbb{N}^n$ et distincts deux à deux, les $a_{i_1,...,i_n}$ dans K, et la somme étant finie.
On note $K[X_1, ..., X_n]$ l'ensemble de ces polynômes.

On notera que, si $P \in K[X_1, ..., X_n]$, il peut s'écrire $P = \sum_{k=0}^{d} A_k(X_1, ..., X_{n-1}) X_n^k$, avec $A_k \in K[X_1, ..., X_{n-1}]$.

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $P \in K[X_1, ..., X_n]$.
On suppose qu'il existe un ouvert Ω de K^n tel que $\forall x \in \Omega$, $P(x) = 0$.
Montrer que $P = 0$.

Exercice 12 :

1. Montrer que l'on ne peut partitionner $\mathbb{R}^2$ en cercles de rayons strictement positifs.

2. Peut-on partitionner $\mathbb{R}^2$ en disques ouverts de rayons strictement positifs ?

Exercice 13 : Un parfait de $\mathbb{R}$ est une partie non vide, fermée, sans point isolé.

1. Construire un parfait de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide.

2. Construire un parfait de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide ne contenant pas de rationnel.

Exercice 14 :
E est un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Si $x \in E$ et $r \geq 0$, $B(x,r) = \{y \in E \mid ||x-y|| \leq r\}$.

Soit $x \in E\backslash\{0\}$ et $r \in]0, ||x||[$. On note $K = B(x,r)$.
On suppose que $f(K) \subset K$.
Soit $a \in K$.
Si $n \in N^*$, on pose $y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k(a)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \in K$, et que $f(y_n) - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Montrer qu'il existe $w \in K$ tel que $f(w) = w$.

3. Montrer que $1 \in Sp(f)$, et $Sp(f) \subset [-1,1]$.

4. Montrer avec un exemple en dimension 3 que f n'est pas nécessairement diagonalisable.

Exercice 15 : Soient C une partie convexe d'un espace normé réel E, D une partie de E telle que $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.

Exercice 16 : E est un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, et C une partie de E convexe dense. Montrer que $E = C$.

Exercice 17 : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, $v_1, ..., v_p$ des vecteurs de E et $C = \mathbb{R}^+ v_1 + ... + \mathbb{R}^+ v_p$. Montrer que C est fermé dans E.
On pourra montrer que, si $x \in C$, il existe $i_1, ..., i_k$ tel que $(v_{i_1}, ..., v_{i_k})$ est libre, et $x \in \mathbb{R}^+ v_{i_1} + ... + \mathbb{R}^+ v_{i_k}$.

Exercice 18 :

1. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $d = deg(P) \in \mathbb{N}^*$, $q = deg(Q) \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C}_{d-1}[X] \times \mathbb{C}_{q-1}[X] \to \mathbb{C}_{q+d-1}[X] \\ (S,T) \mapsto QS + PT \end{cases}$.
   Montrer que f est linéaire, et est un isomorphisme si et seulement si $P \wedge Q = 1$.

2. Soient $q, d \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer l'existence d'une fonction $g : \begin{cases} \mathbb{C}_d[X] \times \mathbb{C}_q[X] \to \mathbb{C} \\ (P,Q) \mapsto g(P,Q) \end{cases}$ polynomiale en les coefficients de P et Q, telle que $g(P,Q) \neq 0 \iff P \wedge Q = 1$.

3. Montrer que l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que χ_A est SARS est ouvert.

Exercice 19 : $E = l^1(\mathbb{C}) = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \displaystyle\sum_n |u_n| \text{ converge}\}$.

On munit E de la norme $||u|| = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Soit $P = \{u \in E \mid \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq 1\}$.

1. Montrer que P est non bornée.

2. Montrer que P est fermée.

Exercice 20 : Continuité des formes linéaires

Soient E un K-evn, et f une forme linéaire sur E. Notons $H = Ker(f)$.

1. On suppose $f \neq 0$. Soit $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$.
   Montrer que $\forall x \in E, \exists!(\lambda, h) \in K \times H \; ; \; x = \lambda a + h$.

2. Si f est continue, montrer que H est fermé.

3. Montrer que f est continue si et seulement si f est continue en 0.

4. On suppose f non continue en 0.
   Montrer qu'il existe $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{|f(x_n)|}{||x_n||} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
   On se fixe une telle suite, et $y \in E \backslash H$.
   En considérant $y - \dfrac{f(y)}{f(x_n)} x_n$, montrer que H n'est pas fermé.
   Quelle propriété topologique a H?

Exercice 21 : Démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$.
La fonction associée, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est continue (même définition que dans le cas réel: $\forall a \in \mathbb{C}, \; \forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0; \; \forall b \in \mathbb{C}, \; |b - a| \leq \delta \Longrightarrow |P(a) - P(b)| \leq \varepsilon$). Il en est de même par composition de $z \mapsto |P(z)|$.

Soit $m = \inf\{|P(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$.

1. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $m = \inf\{|P(z)| \mid z \in \mathbb{C} \;\; et |z| \leq r\}$.

2. Montrer que m est un minimum ie $\exists a \in \mathbb{C}$ tel que $|P(a)| = m$.
   On se fixe un tel a. Le but est de voir que $P(a) = 0$.

3. Justifier l'existence d'un DL en a du type $P(a + h) = P(a) + bh^k + h^k \varepsilon(h)$, avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, $b \in \mathbb{C}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$.

4. Si $P(a) \neq 0$, montrer qu'il existe h tel que $|P(a + h)| < |P(a)|$.
   Ind: faire en sorte que bh^k ait un argument décalé de π par rapport à celui de $P(a)$.

   Conclusion?

Exercice 22 : Etudes "pratiques" de limites

Etudier l'existence d'une limite en $(0, 0)$ de f où $f(x, y)$ vaut (pour les (x, y) où l'expression est définie):

a) $\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ b) $\dfrac{\sin^2(x) + \sin^2(y)}{\operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sh}^2(y)}$ c) $\dfrac{(1 + x^2 + y^2)\sin(y)}{y}$

d) $\dfrac{xy}{x + y}$ e) $\dfrac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$ f) $\dfrac{1 - \cos(xy)}{y^2}$

g) $\dfrac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$ h) $\dfrac{|x|^\alpha y}{x^2 + y^4}$ avec $\alpha > 0$

Il peut être utile de faire des changements de coordonnées (polaires, ou moins standard $((x, y^2) = (r\cos(t), r\sin(t))$ p. ex. pour h)

Exercice 23 : Continuité des fonctions convexes

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall a, b \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \in [0, 1]$, $f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$. (comme dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, on dit que f est convexe).
$\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure usuelle d'espace euclidien.

1. Si $a, b, c \in \mathbb{R}^2$, $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}^+$ avec $\lambda + \mu + \nu = 1$, montrer que $f(\lambda a + \mu b + \nu c) \leq \lambda f(a) + \mu f(b) + \nu f(c)$.

2. Si $x \in \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$, Montrer que f est majorée sur le disque fermé de centre x et de rayon r.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^2$, D le disque fermé de centre x et de rayon 1, C le cercle de centre x et de rayon 1.
   On se donne y différent de x dans l'intérieur de D. a est le point d'intersection de la demi-droite $[x, y)$ avec C, et b est l'autre point d'intersection de (xy) avec C. (faire un dessin)
   Ecrire x comme barycentre de y et b, et y comme barycentre de x et a. (on exprimera les poids en fonction de x et y)

4. Montrer que f est continue.

5. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + sxy$ est-elle convexe?
   Idem avec $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + sxy$.

Exercice 24 : Matrices stochastiques

$n \in \mathbb{N}^*$.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si et seulement si $\forall i, j$, $a_{i,j} \geq 0$ et $\forall i$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.
2. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est compact.

   Soit A une matrice stochastique. On pose, si $k \in \mathbb{N}$, $B_k = \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} A^i$.

3. Montrer que B_k est stochastique.
4. Soient Φ, Ψ deux extractions telles que $B_{\Phi}(k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $B_{\Psi}(k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $AC = CA = C$.
   Montrer que $C = D$
5. Montrer que (B_k) converge.

Exercice 25 : Recouvrement de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$

$\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$.

$n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.
Si $a \in \mathbb{R}^n$, on note $B_{a,r} = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x-a\| \leq r\}$ la boule fermée de centre a et de rayon r.
$S = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|a\| = 1\}$ est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

Soit K une partie bornée non vide de $\mathbb{R}^n$, et soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer que l'on peut trouver un sous ensemble fini A de K tel que :
$$K \subset \bigcup_{a\in A} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}.$$
   On pourra raisonner par l'absurde en construisant une suite de $K^{\mathbb{N}}$ niant le théorème de Bolzano-Weierstrass.
2. Soit Λ un sous ensemble de K tel que pour tous x, y distincts dans Λ, $\|x-y\| > \varepsilon$. Montrer que Λ est fini et que son cardinal est majoré par celui d'un ensemble A du type considéré à la question précèdente.
   Si de plus Λ est de cardinal maximal, montrer que : $K \subset \displaystyle\bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\varepsilon}$

   On admet l'existence d'une fonction μ, appelée *volume*, définie sur certaines parties bornées de $\mathbb{R}^n$ (on fera ici comme si μ était définie sur toutes les parties bornées. En fait, μ n'est pas définie sur des parties assez pathologiques) et vérifiant les propriétés suivantes.

   (i) Pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $r > 0$, $\mu(B_{a,r}) = r^n$.

   (ii) Pour toute famille $K_1, \ldots, K_m$ de parties bornées $\mathbb{R}^n$ deux à deux disjointes on a :
$$\mu\left(\bigcup_{1\leq i\leq m} K_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu(K_i).$$
   (iii) Pour toutes K, K' parties bornées de $\mathbb{R}^n$, $K \subset K'$ implique $\mu(K) \leq \mu(K')$.

   Soit Λ une partie finie de S telle que pour tous x, y distincts dans Λ, $\|x-y\| > \varepsilon$.

3. Vérifier que les boules $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ pour $a \in \Lambda$ sont toutes contenues dans $B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$.
   Montrer alors que le cardinal de Λ est majoré par $\left(\dfrac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$.
4. Justifier l'existence d'une partie finie Λ_n de S, de cardinal majoré par 5^n, et telle que :
$$S \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} B_{a,\frac{1}{2}}.$$

Exercice 26 : Soient $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$ tels que $(x_1 - x_0, x_2 - x_0, ..., x_n - x_0)$ soit libre.
Soit $S = conv(\{x_0, ..., x_n\}) = \left\{\displaystyle\sum_i \lambda_i x_i \mid \forall i,\ \lambda_i \geq 0 \ et \ \sum_i \lambda_i = 1\right\}$.
Montrer que S est compact, et que $\mathring{S} = \left\{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \mid \forall i,\ \lambda_i > 0 \ et \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\right\}$.

Exercice 27 : Projection sur un convexe, théorème de Minkowski
E est un espace euclidien. (rq: si E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, on a vu que l'on peut toujours le munir d'un produit scalaire).

1. Soit C un convexe non vide fermé de E différent de E.
   (a) les deux questions sont indépendantes.
   $a, b, c \in E$.
   Calculer $\frac{d}{dt}\left(||a-(b+t(c-b))||^2\right)_{t=0}$.
   Si $||a-b|| = ||a-c||$ et $b \neq c$, montrer que $||a-(b+c)/2|| < ||a-b||$.
   (b) Si $x \in E \backslash C$, montrer qu'il existe un unique $y \in C$, que l'on notera $p_C(x)$, tel que $||x-y|| = d(x, C)$, et que $\forall z \in C$, $< z - p_C(x), x - p_C(x) > \leq 0$.

   Si $x \in C$, $p_C(x) = x$ et les résultats subsistent trivialement.
   (c) En développant $||(x-p_C(x)) + (p_C(x) - p_C(y)) + (p_C(y) - y)||^2$, montrer que p_C est 1-lipschitzienne.
   (d) Soit $x \in \partial C$. On se donne $(x_n) \in (E \backslash C)^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$.
   Justifier que l'on peut extraire de $\left(\frac{x_n - p_C(x_n)}{||x_n - p_C(x_n)||}\right)$ une sous-suite convergente vers e de norme 1, et montrer qu'alors $C \subset (x + vect(e)^{\perp}) - \mathbb{R}^+ e$ (ie que C est d'un côté de l'hyperplan affine $(x + vect(e)^{\perp})$. un tel hyperplan affine est dit hyperplan d'appui de C en x).
   (e) Soit $x \in \partial C$ et H un hyperplan (affine) d'appui de C en x. Montrer que tout point extrémal du convexe $H \cap C$ est un point extrémal de C

2. Il s'agit de montrer que si C un convexe compact de E, alors C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (un théorème de Minkowski).
   Il va apparaître des sous-espaces affines, et nous allons faire une récurrence sur la dimension, donc nous allons poser:
   H_n: "Si C est un convexe compact de E inclus dans un sous-espace affine de dimension n de E, alors C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux." Soit C un convexe compact.
   (a) Soit $x \in C$, et D une droite affine contenant x. Montrer que $D \cap C$ est du type $[a, b]$ avec $a, b \in C$.
   (b) Montrer le théorème de Minkowski.

Problème : sous-groupes compacts du groupe linéaire

Posé aux Mines.
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$ dont le produit scalaire est noté $(.|.)$ et la norme euclidienne est notée $\|.\|$. On note $L(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $GL(E)$ le groupe des automorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^i l'endomorphisme $u \circ u \circ \cdots \circ u$ (i fois) avec la convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$ (identité). L'ensemble vide est noté $\emptyset$.

Si F est un sous-ensemble quelconque de E, on appelle *enveloppe convexe* de F, et on note $\mathrm{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant F. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et on admet que $\mathrm{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ où $x_1, \ldots, x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$. [NDLR: cf. cours: théorème de Caratheodory]

L'espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes est noté $M_{n,m}(\mathbb{R})$. On notera en particulier $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$. La matrice transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$. La trace de A est notée $\mathrm{Tr}(A)$.

On note $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ inversibles et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n.

Les parties A, B et C sont indépendantes

A. Préliminaires sur les matrices symétriques

On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques. Une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ *non nul*, on a ${}^tXSX > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer qu'une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbb{R}^{+*}$.

2. En déduire que pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^tRR$. Réciproquement montrer que pour tout $R \in GL_n(\mathbb{R})$, ${}^tRR \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. Montrer que l'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

B. Autres préliminaires

Les trois questions de cette partie sont mutuellement indépendantes.

4. Soit K un sous-ensemble compact de E et $\mathrm{Conv}(K)$ son enveloppe convexe. On rappelle que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Définir une application Φ de $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ dans E telle que $\mathrm{Conv}(K) = \Phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$. En déduire que $\mathrm{Conv}(K)$ est un sous-ensemble compact de E.

5. On désigne par g un endomorphisme de E tel que pour tous x, y dans E, $(x|y) = 0$ implique $(g(x)|g(y)) = 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$. (On pourra utiliser une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ et considérer les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ pour $i \in \{2, \ldots, n\}$.)
En déduire que g est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

6. On se place dans l'espace vectoriel euclidien $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique défini par $(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.
Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$.

C. Quelques propriétés liées à la compacité

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$.

7. Montrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.

Soit K un sous-ensemble compact de E. On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon r.

8. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de E tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

On considère une famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles ouverts de E, I étant un ensemble quelconque, telle que $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.

9. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i. (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.) En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ telle que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide : $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$.

10. Montrer qu'il existe une sous famille finie $(F_{i_1}, \ldots, F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \emptyset$.

D. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K un sous-ensemble non vide, compact et *convexe* de E. Pour tout $x \in E$, on note $N_G(x) = \sup_{u\in G} \|u(x)\|$.

11. Montrer que N_G est bien définie et que c'est une norme sur E.

12. Montrer en outre que N_G vérifie les deux propriétés suivantes :

   - pour tous $u \in G$ et $x \in E$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$;
   - pour tous $x, y \in E$ avec x non nul, $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Pour la deuxième propriété, on pourra utiliser le fait que si $z \in E$, l'application qui à $u \in G$ associe $\|u(z)\|$ est continue.

On considère un élément $u \in L(E)$, et on suppose que K est stable par u, c'est à dire que $u(K)$ est inclus dans K. Pour tout $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u^i(x)$. Enfin, on appelle *diamètre* de K le réel $\delta(K) = \displaystyle\sup_{x,y\in K} \|x-y\|$ qui est bien défini car K est borné.

13. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans K et en déduire qu'il en existe une suite extraite convergente vers un élément a de K. Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u(x_n) - x_n\| \leq \dfrac{\delta(K)}{n}$. En déduire que l'élément a de K est un point fixe de u.

On suppose maintenant que le compact non vide convexe K est stable par tous les éléments de G. Soit $r \geq 1$ un entier, $u_1, u_2, \ldots, u_r$ des éléments de G et $u = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i$.

14. Montrer que K est stable par u et en déduire l'existence de $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

15. Montrer que $N_G\left(\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$. En déduire que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on a

$$N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) = N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right)$$

16. En déduire, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geq 0$ tel que $u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.

17. Déduire de la question précédente que a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1, \ldots, r\}$.

18. En utilisant le résultat de la question 10, montrer qu'il existe $a \in K$ tel que pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.

E. Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

On se place à nouveau dans l'espace vectoriel euclidien $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$. On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe linéaire et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n.
Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Si $A \in G$, on définit l'application ρ_A de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui même par la formule $\rho_A(M) = {}^tAMA$. On vérifie facilement, et on l'admet, que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, l'application qui à $A \in G$ associe $\rho_A(M)$ est continue.
On note $H = \{\rho_A \mid A \in G\}$, $\Delta = \{{}^tAA \mid A \in G\}$ et $K = \mathrm{Conv}(\Delta)$.

19. Montrer que $\rho_A \in GL(M_n(\mathbb{R}))$ et que H est un sous-groupe compact de $GL(M_n(\mathbb{R}))$.

20. Montrer que Δ est un compact contenu dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et que K est un sous-ensemble compact de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est stable par tous les éléments de H.

21. Montrer qu'il existe $M \in K$ tel que pour tout $A \in G$, $\rho_A(M) = M$. En déduire l'existence de $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $A \in G$, $NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. En déduire enfin qu'il existe un sous-groupe G_1 de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $G = N^{-1}G_1N = \{N^{-1}BN/\ B \in G_1\}$.

Soit K un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$, et $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $NKN^{-1} \subseteq O_n(\mathbb{R})$. On désigne par g l'automorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice N dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, par P un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et par σ_P la symétrie orthogonale par rapport à P.

22. Montrer que $g\circ\sigma_P\circ g^{-1}$ est une symétrie, puis que c'est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. En déduire que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$. Montrer que g conserve l'orthogonalité et en déduire K.