1 Intégrabilité

Exercice 1 : Etudier l'intégrabilité des applications suivantes, où sont donnés $f(x)$ et l'intervalle:

a) $e^{-\sqrt{x^2-x}}$, $[1,+\infty[$ b) $\dfrac{1}{1+|\sin(x)|}$, $[0,+\infty[$

c) $x+2-\sqrt{x^2+4x+1}$, $[0,+\infty[$ d) $e^{-x\sin(x)}$, $[0,+\infty[$

e) $(\ln(x))^{-\ln(x)}$, $[2,+\infty[$ f) $e-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, $[1,+\infty[$

g) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+1}$, $[1,+\infty[$ h) $\dfrac{\ln(x)}{x+e^{-x}}$, $[1,+\infty[$

i) $\dfrac{x^a}{1+x^b}$, $]0,+\infty[$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ j) $\dfrac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}$, $]0,+\infty[$

Exercice 2 : Existence et valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 3 : Etudier l'intégrabilité de $f : x\mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ sur $]0,1[$.

Avec le changement $x=\sin^2(t)$, calculer $\displaystyle\int_0^1 f$.

Exercice 4 : $b\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ est une fonction bornée.
Résoudre l'équation différentielle $y'-2y=b$ sur $\mathbb{R}^+$, et montrer que cette équation différentielle admet une unique solution bornée.

Exercice 5 : Soit $f\in\mathcal{C}^1([a,+\infty[)$ telle que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et f' est intégrable sur $[a,+\infty[$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\sin(t)dt$ converge.

Etudier la convergence de $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}-\sin(t)}dt$.

Exercice 6 : Existence de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3(t)}{t^2}dt$.

Montrer, si $x>0$, que $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin^3(t)}{t^2}dt=\int_x^{3x}\frac{3\sin(t)}{4t^2}dt$, et en déduire la valeur de I.

Exercice 7 :

1. Soit $f\in\mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $f'\in L^1([a,+\infty[)$.
   Montrer que $\displaystyle|f(n)-\int_n^{n+1}f|\leq\int_n^{n+1}|f'|$, puis montrer que $\displaystyle\sum_n f(n)$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^{+\infty}f$ converge.

2. Nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$ et de $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$?

Exercice 8 :

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $f''(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(1/x^3)$.
Montrer que f admet une asymptote affine vers $+\infty$, ie qu'existent $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) - (ax+b) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. (on commencera par remarquer que f' admet une limite finie a en $+\infty$)

Montrer que le résultat est faux si on remplace $O(1/x^3)$ par $O(1/x^2)$.

Exercice 9 :

1. Justifier l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ sur $[1, +\infty[$.
   A l'aide d'une IPP, montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.
   Plus précisément, établir un développement asymptotique à deux termes de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ quand $x \to +\infty$
2. Déterminer un équivalent de $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 10 :

1. Étudier la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} t\cos t\, dt$ et $\int_0^{+\infty} t\cos(t^2)\, dt$
2. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 3. Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\cos[P(t)]\, dt$ converge.
3. Cette intégrale converge-t-elle absolument ? On notera que $|\cos| \geq \cos^2$.

Exercice 11 :

Soit a un complexe. On pose $I(a) = \int_0^{2\pi} \ln|e^{it} - a| dt$

1. (a) Montrer que $I(0)$ existe et calculer sa valeur.
   (b) Montrer que $\int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt$ existe. En déduire que $I(1)$ existe.
   (c) Plus généralement, montrer que $I(a)$ existe pour tout complexe a et que $I(a) = I(|a|)$.

   Soit P un polynôme complexe. On pose $M(P) = \int_0^{2\pi} \ln|P(e^{it})| dt$.
2. Montrer que $M(P)$ existe.
3. Soit α un réel strictement positif.
   Montrer que $M(X^n - \alpha^n) = nM(X - \alpha)$ pour tout entier naturel n.
4. En déduire $M(X - \alpha)$ quand $0 < \alpha < 1$ puis $\alpha > 1$.
5. Calculer $M(X - 1)$.
6. Calculer $M(P)$.

2 CVD, intégrales à paramètres

Exercice 12 :

Soit $I_n = \int_0^1 t^n \ln(1-t^2) dt$. Montrer que I_n existe, et que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 13 :

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_0^1 t^n f(t) dt \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n} + o(1/n)$.

Exercice 14 :

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$.

2. Chercher un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt$.

3. Chercher un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle -1 + \int_0^1 \sqrt{1+t^n}dt$.

Exercice 15 :

1. $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall x \in [0,n]$, $\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

2. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
   On définira $f_n : x \geq 0 \mapsto \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0,n] \\ 0 \text{ si } x > n \end{cases}$ de sorte que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$, et on utilisera la CVD.

Exercice 16 : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Si $a < b$, montrer que $\displaystyle\int_a^b |f(x+1/n) - f(x)|dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   On suppose désormais f intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Limite de $\displaystyle\int_X^{+\infty} |f|$ quand $X \to +\infty$ ou $X \to -\infty$?

3. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x+1/n) - f(x)|dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. On suppose ici $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\displaystyle n\int_{\mathbb{R}} |f(x+1/n) - f(x)|dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Que dire de f?

Exercice 17 :

On pose $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Calculer f' et g' (les expressions utiliseront des intégrales)

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

3. Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Exercice 18 :

1. Pour quelles valeurs de x l'application $t \in]0,+\infty[\mapsto \dfrac{e^{(i-x)t}}{\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?
   On note I l'ensemble de ces valeurs, et $f : x \in I \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(i-x)t}}{\sqrt{t}}dt$.

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur I, déterminer une équation différentielle vérifiée par f sur I et en déduire une expression de f faisant intervenir une constante C.

3. Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$ et en déduire la valeur de C sous forme intégrale.

Exercice 19 :

$f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(t+1)}}dt$.

1. Etudier le domaine de définition I de f, et sa continuité.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis un équivalent de f en $+\infty$ (commencer par un changement de variable).

3. Déterminer la limite de f en 0.

4. Montrer que $\displaystyle f(x) \underset{x\to0}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(t+1)}}dt \underset{x\to0}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}dt$.

5. Déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 20 :

1. Intervalle de définition I de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t+e^{xt}}$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{+\infty} f$ puis un équivalent simple de f en $+\infty$ (changement de variable).
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{0} f$.

Exercice 21 :

1. Justifier la définition de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixt}}{(1+t^2)^2} dt$.
2. Montrer que g est $\mathcal{C}^2$.
3. Etablir une relation entre $g'(x)$ et $f(x)$.
4. Montrer que f est continue et que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. A l'aide d'une équation différentielle, déterminer les expressions de g puis f sur $]0, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 :

On pose, si $x \geq 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que $f(x)$ est bien défini (séparer les cas $x = 0$ et $x > 0$).
2. A l'aide du changement $u = 1/t$, calculer $f(0)$.
3. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ (domination pour $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$)
4. On a la décomposition, si $x \neq 1$, $\displaystyle\frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x^2+t^2}\right)$.
   Montrer que $f'(x) = \dfrac{\pi}{x+1}$ si $x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, et que le résultat reste valable pour $x = 1$.
5. Justifier que $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [a, b]$, $|\ln(t)| \leq |\ln(a)| + |\ln(b)|$.

   Montrer que f est continue sur $[0, 1]$, puis calculer $f(x)$ pour $x \geq 0$.

   La formule de Leibniz donne-t-elle $f'(0)$?

Exercice 23 :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, démontrer l'existence de $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos^2(xy)}{\sqrt{1-y^2}} dy$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$.
3. Etudier la limite de f en $+\infty$.
4. Si $s > 0$, montrer l'existence de $L(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-xs} dx$ (transformée de Laplace de f).
   Montrer que L est $\mathcal{C}^\infty$.
5. Déterminer la limite puis un équivalent de L en $+\infty$.

Exercice 24 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$

1. Justifier l'existence de v_n et calculer $u_n + v_n$.
2. Montrer que $e^n - u_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n e^{nu} du$.
3. En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 (1-u)^n e^{nu} du \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
   On pourra poser $t = u\sqrt{n}$ et utiliser la CVD.

4. En déduire des équivalents simples de u_n et v_n.

Exercice 25 :

1. Justifier l'existence de $a = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-e^{-t}}{\sin(t)}dt$.

2. On note $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\lambda e^t \sin(t)}dt$, et $K(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\lambda \sin(t)}dt$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$
   Déterminer un équivalent de $I(\lambda) - K(\lambda)$ quand $\lambda \to +\infty$ en fonction de a et λ.

3. On admet qu'un calcul donne, pour $\lambda > 1$,
   $K(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} \ln\left(\dfrac{\sqrt{\lambda^2-1}-\lambda-1}{\sqrt{\lambda^2-1}+\lambda+1} \times \dfrac{\sqrt{\lambda^2-1}+\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}-\lambda}\right)$.
   Montrer que $K(\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(\lambda)}{\lambda}$.

4. Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{1+e^t|\sin(t)|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

3 Problème: transformées de Fourier et de Laplace

Partout, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.
On note $L^1(I)$ l'espace des fonctions continues par morceaux intégrables sur I, à valeurs complexes.
Si $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n(I)$ l'espace des fonctions $f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telles que $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable sur I (donc $E_0 = L^1(I)$)

On note S l'espace des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telles que $\forall n,p \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^p f^{(n)}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Si $f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on définit, en les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'intégrale existe, sa transformée de Fourier par $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt$.
Si f est définie et $\mathcal{C}_m$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit, en les $x \in \mathbb{C}$ pour lesquels l'intégrale existe, sa transformée de Laplace par $Lf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$.

Ces deux transformations sont trivialement linéaires.

On admettra le **théorème de Fubini** :

Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \times J \to \mathbb{C}$, alors :
Si $\displaystyle\int_I \left(\int_J |f(x,t)|dt\right) dx$ **ou** $\displaystyle\int_J \left(\int_I |f(x,t)|dx\right) dt$ existe ($< \infty$), alors $\displaystyle\int_I \left(\int_J f(x,t)dt\right) dx$ **et** $\displaystyle\int_J \left(\int_I f(x,t)dx\right) dt$ existent, et :

$$\int_I \left(\int_J f(x,t)dt\right) dx = \int_J \left(\int_I f(x,t)dx\right) dt$$

1.1 Transformée de Fourier

1. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $\widehat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
   On a, si $a,b \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)e^{ixt}dt \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ (vu en cours. Riemann-Lebesgue).
   Montrer que $\widehat{f}(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$. ("en ε", en découpant l'intégrale).

3. Si $n,p \in \mathbb{N}$ et $n < p$, montrer que $S \subset E_p(\mathbb{R}) \subset E_n(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

4. Si $f \in E_n(\mathbb{R})$, montrer que $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et donner g telle que $\widehat{f}^{(n)} = \widehat{g}$.

5. Si $f \in S$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \in S$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{f^{(n)}}(x) = (ix)^n \widehat{f}(x)$.

6. Si $f \in S$, montrer que $\widehat{f} \in S$.
   On pourra utiliser que si $h \in S$ et $p \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^p h(x) \in S$. (à vérifier)

1.2 Transformée d'une gaussienne

On admettra que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$.

Si $\theta > 0$, notons $f_\theta : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\theta}\right)$.

7. Montrer que $f_\theta \in S$.

8. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) + xf_1(x) = 0$.
Notons $g = \widehat{f_1}$.

9. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ xg(x) + g'(x) = 0$.

10. Montrer que $\widehat{f_1} = \sqrt{2\pi} f_1$, puis que, si $\theta > 0$, $\widehat{f_\theta}(x) = \sqrt{2\pi\theta} \exp\left(-\dfrac{\theta x^2}{2}\right)$.

1.3 Inversion de la transformée de Fourier

11. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$.
En utilisant le théorème de Fubini, montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(t)f(t)e^{ixt}dt = \int_{\mathbb{R}} g(y)\widehat{f}(y-x)dy$.

On se fixe pour les quatre questions suivantes $f \in S$. Par ce qui précède, $\widehat{f} \in S \subset L^1(\mathbb{R})$.

12. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$,
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\widehat{f}(t)e^{-\varepsilon^2 t^2/2}dt = \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}f(x+\varepsilon y)dy$.

13. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\widehat{f}(t)e^{-\varepsilon^2 t^2/2}dt \xrightarrow[\varepsilon \to 0,\ \varepsilon > 0]{} \int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\widehat{f}(t)dt$.

14. Montrer que f est bornée puis que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}f(x+\varepsilon y)dy \xrightarrow[\varepsilon \to 0,\ \varepsilon > 0]{} f(x)\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}dy = \sqrt{2\pi}f(x)$.

15. En déduire la formule d'inversion :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)e^{ixt}dt$.

16. Une application.
Soit $f, g \in S$ telles que $-f^{(6)} - f^{(2)} + f = g$.
En appliquant la transformée de Fourier à cette équation différentielle, exprimer, si $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ à l'aide d'une intégrale faisant intervenir les valeurs de $\widehat{g}$.

17. $f, g \in S$ vérifient $\forall x \in \mathbb{R},\ xf^{(6)}(x) + f(x) = g(x)$. Donner une équation différentielle vérifiée par $\widehat{f}$.

1.4 Transformée de Laplace

18. Si $f \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$, montrer que Lf est définie et continue sur $H = \{x \in \mathbb{C} \mid Re(x) \geq 0\}$, et que $Lf(x) \xrightarrow[x \to +\infty,\ x \in \mathbb{R}^+]{} 0$.

19. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R}_+^*)$ est intégrable en 0 et $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} O(e^{at})$, montrer que Lf est définie et continue sur $\{x \in \mathbb{C} \mid Re(x) > a\}$.

20. Si $f \in L^1(R_+^*) \cap E_1(\mathbb{R}_+^*)$, montrer que Lf est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
Quelles hypothèses suffisantes faire sur f pour avoir Lf définie et $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^+$? (on demande juste le résultat)

21. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ est bornée, montrer que Lf est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $xLf(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} f(0)$;

22. Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*)$ est bornée et $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \in \mathbb{C}$, montrer que $xLf(x) \xrightarrow[x \to 0]{} l$

1.5 Inversion de la transformée de Laplace

23. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$. On prolonge f par 0 sur $\mathbb{R}^-$, et on appelle toujours f le prolongement.
On suppose que la formule d'inversion de la question 14 est valable pour f.
Exprimer alors, si $x > 0$, $f(x)$ à l'aide d'une intégrale faisant intervenir la fonction Lf.

1.6 Convolution

Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on définit en les $x \in \mathbb{R}$ en lesquels l'intégrale existe la convolée de f et g par $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$.

24. Montrer que si $(f*g)(x)$ existe, $(g*f)(x)$ existe aussi et $(f*g)(x) = (g*f)(x)$.
25. Si $f \in S$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $f*g$ est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
26. Si $f \in S$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $\widehat{f*g}$ existe et est égale à $\widehat{f} \cdot \widehat{g}$. (Fubini)

2 Problème Mines: Étude d'un endormorphisme d'un espace de fonctions numériques

Soit I un intervalle de la forme $[-a, a]$ où a est un réel strictement positif. Dans tout le problème, on considère les ensembles suivants :
$\mathcal{E}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué des applications de I dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞
$\mathcal{P}$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée de ses éléments polynomiaux.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n \, dt$ et si $f \in \mathcal{E}$, on note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de I dans $\mathbb{C}$ définies par les formules $\forall x \in I,\ u(f)(x) = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x\sin(t)) \, dt$ et $v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x\sin(t)) \, dt$

Préliminaires

1. Montrer que si $f \in \mathcal{E}$, $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définies et appartiennent à $\mathcal{E}$, et que l'on définit ainsi des endomorphismes u et v de $\mathcal{E}$.
2. Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par u et v.
3. Etablir pour $n \in \mathbb{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n et établir $W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.
4. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

Etude de la continuité de u et v
On considère la norme M de $\mathcal{E}$ définie pour tout $f \in \mathcal{E}$ par la formule $M(f) = \max_{x\in I} |f(x)|$

5. Vérifier que M est bien définie et montrer que u est une application continue de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, M)$ dans lui même.
6. L'application v est-elle continue de $(\mathcal{E}, M)$ dans lui même ?
7. Vérifier que l'application $N : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ définie par $N(f) = M(f) + M(f')$ est une norme sur $\mathcal{E}$, et montrer que v est continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$. Les normes N et M sont-elles équivalentes ?
8. **On admet le théorème d'approximation de Weierstrass, qui sera vu en cours ultérieurement:**
   Si $f \in \mathcal{C}([-a, a], \mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall x \in [-a, a]$, $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.

   Si $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $f(0) = p(0)$ et $|f'(x) - p'(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in I$. En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, N)$.

Etude de l'inversibilité de u et v

9. Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ à $\mathcal{P}$.
10. Déterminer $(u \circ v)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Le réel 0 est-il valeur propre de l'endomorphisme v ?
11. Déterminer également $(v \circ u)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Conclure.
12. Pour tout $f \in \mathcal{E}$, donner une relation liant $v(f)$ et $u(f')$.
13. Montrer que $f \in \mathcal{E}$ est paire (resp. impaire) si et seulement si $u(f)$ l'est. Qu'en est-il pour v ?

Etude des valeurs propres de u et v

14. Montrer que λ est une valeur propre de v si et seulement si $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u. Qu'en est-il des vecteurs propres correspondants ?

On considère une valeur propre λ de u, de vecteur propre associé $f \in \mathcal{E}$.

15. Vérifier que si $n \in \mathbb{N}$, le nombre $m_n = \max\limits_{t \in I} |f^{(n)}(t)|$ est bien défini, et établir que pour tout $x \in I$, $|\lambda| \cdot |f^{(n)}(x)| \leq \dfrac{2m_n W_n}{\pi}$. En déduire que $f \in \mathcal{P}$.

16. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u et v.

17. L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ admet-il une base de vecteurs propres de u ? De v ? L'ensemble des valeurs propres de u (resp. de v) est-il une partie fermée de $\mathbb{C}$?

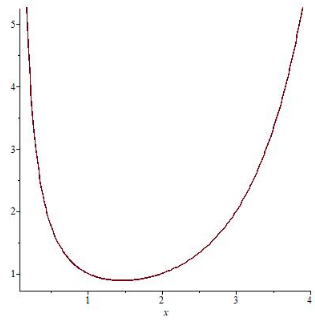
3 Fonction Gamma

On définit la fonction Gamma par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

Propriété:

1. Γ est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, et si $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
3. Γ et $\ln(\Gamma)$ sont convexes.
4. Γ diverge vers $+\infty$ en 0^+ et $+\infty$.
5. $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}$.

Graphe de Γ:



Remarques:
La fonction Gamma a été définie originellement par Bernoulli avec la limite apparaissant dans la propriété 5, donnant un prolongement naturel de la factorielle aux réels positifs. C'est Euler qui a ensuite trouvé la forme intégrale.
On peut en fait considérer $x \in \mathbb{C}$ vérifiant $Re(x) > 0$.
Γ est définie et continue sur $\{x \in \mathbb{C} \mid Re(x) > 0\}$.
La formule $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ permet naturellement d'étendre Γ à $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Q}^-$.
L'équivalent de Stirling de la factorielle s'étend à la fonction Γ: $\Gamma(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x} \left(\dfrac{x}{e}\right)^x$. Démonstration dans les exercices.

Démonstration

1. Notons $h(x,t) = t^{x-1} e^{-t}$.
$h(x,.)$ est continue sur $]0, +\infty[$, $h(x,t) \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1}$, $h(x,t) \underset{t \to +\infty}{=} o(1/t^2)$, d'où le domaine de définition.
Dans la suite, $x > 0$.
$h(x,t) = e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t}$. $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t}$.
$\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,.)$ est continue sur $]0, +\infty[$, $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) \underset{t \to +\infty}{=} o(1/t^2)$, et
$\left|\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1} |\ln(t)|^k = \underbrace{|\ln(t)|^k t^{x/2}}_{\xrightarrow[t \to 0]{} 0} t^{x/2-1} \underset{t \to 0}{=} o(t^{x/2-1})$, intégrable en 0 car $x/2 - 1 > -1$.
Ainsi $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,.)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Dominations locales: Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$.
Si $x \in [a,b]$ et $t > 0$, $\left|\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \begin{cases} |\ln(t)|^k t^{a-1}e^{-t} & si\ t \in]0,1] \\ |\ln(t)|^k t^{b-1}e^{-t} & si\ t > 1 \end{cases} = \phi(t)$.
ϕ est continue sur $]0,+\infty[$, et intégrable en vertu des comparaison précédentes en 0 et $+\infty$. Ainsi Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

2. IPP, et récurrence immédiate.

3. Si $x > 0$, $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}dt > 0$, donc Γ est (strictement) convexe.
$(\ln(\Gamma))' = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$, $(\ln(\Gamma))'' = \dfrac{\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$ est du signe de $\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2$.
$(\Gamma')^2 = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt\right)^2 = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{(x-1)/2}e^{-t/2} \times t^{(x-1)/2}e^{-t/2}dt\right)^2$.
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz:
$(\Gamma')^2 \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}dt \times \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \Gamma''(x)\Gamma(x)$, ce qui donne la positivité de $(\ln(\Gamma))''$.

4. $\Gamma(x) \geq \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt \geq e^{-1}\int_0^1 t^{x-1}dt = \dfrac{e^{-1}}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
Du fait que si $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n! \to +\infty$ et que Γ est convexe, Γ est croissante à partir d'un certain x_0, et donc $\Gamma(n+1) \to +\infty$ suffit pour avoir $\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

5. $x > 0$ est fixé. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.
On pose $\Psi_n : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \begin{cases} t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0,n] \\ 0 \text{ si } t > n \end{cases}$. Ainsi $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Psi_n$.
$\forall t > 0$, $\Psi_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t^{x-1}e^{-t}$.
Si $n \in \mathbb{N}^*$:
$\forall t \in [0,n]$, $|\Psi_n(t)| = t^{x-1}\exp(n\ln(1 - x/n)) \leq t^{x-1}e^{-x}$ car $\ln(1+t) \leq t$.
$\forall t > n$, $|\Psi_n(t)| = 0 \leq t^{x-1}e^{-x}$.
Donc $|\Psi_n| \leq g$ avec $g : t > 0 \mapsto t^{x-1}e^{-x}$.
g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, par convergence dominée, $I_n \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)$.
D'autre part, on calcule I_n: avec n IPPs, pour faire disparaître $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ (on le dérive), on calcule que $I_n = \dfrac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}$, d'où finalement $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}$.

♣

Quelques exercices:

Exercice 1: une caractérisation de la fonction Gamma

On se donne $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant : $\forall x > 0$, $f(x+1) = xf(x)$, $f(1) = 1$, et $\ln(f)$ est convexe. On veut montrer que $f = \Gamma$.

1. Vérifier que, si $x, y > 0$ et $t \in [0,1]$, $f(tx + (1-t)y) \leq f(x)^t f(y)^{1-t}$.

2. $n \in \mathbb{N}$, $x, y > 0$, $t \in [0,1]$, et $z = tx + (1-t)y$.
Montrer que
$$z(z+1)...(z+n)f(z) \leq (x(x+1)...(x+n))^t(y(y+1)...(y+n))^{1-t}f(x)^t f(y)^{1-t}$$
puis que
$$\frac{f(z)}{\Gamma(z)} \leq \left(\frac{f(x)}{\Gamma(x)}\right)^t \left(\frac{f(y)}{\Gamma(y)}\right)^{1-t}$$
Qu'en déduire dire sur $\ln\left(\dfrac{f}{\Gamma}\right)$?

3. Notons $g = \ln\left(\dfrac{f}{\Gamma}\right)$. Calculer $g(x+1) - g(x)$ et montrer que $g = 0$ (ie $f = \Gamma$)

Exercice 2: équivalent de Stirling, méthode 1

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (vu en exercice).
On pose $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(t) - t$. Partout, $x > 0$.

1. Montrer que $\displaystyle\Gamma(x+1) = x^{x+1}\int_0^{+\infty} e^{xg(u)}du$.

2. Etudier les variations de g.

   On pose $h : t \in]-1,+\infty[\mapsto 1 + g(t+1)$ pour déplacer le maximum en 0, et avoir un maximum nul.

3. Montrer qu'il existe ε, fonction continue sur $]-1,+\infty[$ nulle en 0 telle que
   $\forall t \in]-1,+\infty[$, $h(t) = t^2\left(-\dfrac{1}{2} + \varepsilon(t)\right)$.
   Quelles sont les limites de ε en -1 et $+\infty$?

   On admettra que ε est croissante (il suffirait de montrer que ε', qui est définie sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$, est positive)

4. Montrer que $\displaystyle\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \exp\left(t^2\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{x}}\right)\right)\right)dt$.

   On pose $f_x : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \exp\left(t^2\left(-\dfrac{1}{2} + \varepsilon\left(\dfrac{t}{\sqrt{x}}\right)\right)\right) \text{ si } t > -\sqrt{x} \\ 0 \text{ si } t \leq -\sqrt{x} \end{cases}$ de sorte que

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t)dt$$

5. Si $x \geq 1$, montrer que $|f_x| \leq \Phi$ avec $\Phi : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \exp(-t^2/2) \text{ si } t \leq 0 \\ \exp(h(t)) \text{ si } t > 0 \end{cases}$

6. Montrer que $\displaystyle\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$

Exercice 3: méthode de Laplace, équivalent de Stirling, méthode 2

Méthode de Laplace
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soient $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ et $c \in]a,b[$ tels que:
• f atteint son maximum en c, et uniquement en c. on a donc $f'(c) = 0$.
• $f''(c) < 0$.

Si $x \geq 0$, on pose $\displaystyle g(x) = \int_a^b e^{xf(t)}dt$.

1. Si $a \leq \alpha < c < \beta \leq b$, montrer que $\displaystyle g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_\alpha^\beta e^{xf(t)}dt$.
   Indication: on établira des inégalités $\displaystyle\int_\alpha^\beta e^{xf(t)}dt \geq cste \times e^{wx}$ et $\displaystyle\int_{[a,\alpha]\cup[\beta,b]} e^{xf(t)}dt \leq cste \times e^{zx}$ pour certains z, w vérifiant $z < w < f(c)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$.
   Justifier qu'il existe α, β tels que $a \leq \alpha < c < \beta \leq b$ et $\forall t \in [\alpha,\beta]$,
   $f(c) + \dfrac{f''(c) - \varepsilon}{2}(t-c)^2 \leq f(t) \leq f(c) + \dfrac{f''(c) + \varepsilon}{2}(t-c)^2$.

3. Si $a \leq \alpha < c < \beta \leq b$ et $\gamma < 0$, calculer un équivalent quand $x \to +\infty$ de
   $\displaystyle\int_\alpha^\beta e^{x\left(f(c) + \gamma\frac{(t-c)^2}{2}\right)}dt$.

4. Montrer que $\displaystyle g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{x|f''(c)|}}e^{xf(c)}$.

   Application à Γ
   On pose $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(t) - t$. Partout, $x > 0$.

5. Montrer que $\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{xg(u)} du$.

6. Etudier les variations de g. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall u \geq 3$, $g(u) - g(2) \leq -Cu$.

7. $\int_{1/2}^{3} e^{xg(u)} du \underset{x \to +\infty}{\sim} ?$.

8. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{xg(u)} du \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_{1/2}^{3} e^{xg(u)} du$.

   On pourra par exemple remarquer que $\int_3^{+\infty} e^{xg(u)} du = e^{g(2)x} \int_3^{+\infty} e^{x(g(u)-g(2))} du$ et montrer que $\int_3^{+\infty} e^{x(g(u)-g(2))} du$ est bornée quand $x \geq 1$.

   Majorer également $\int_0^{1/2} e^{xg(u)} du$

9. Retrouver l'équivalent de Stirling.