MP* - Séries, familles sommables

Exercice 1 : Etudier la convergence de $\sum u_n$ lorsque u_n vaut :

1. $\ln(1+1/n)$.
2. $\ln(1+(-1)^n/n)$.
3. $\ln(1+(-1)^n/\sqrt{n})$.
4. $\sin(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.

Exercice 2 : $\alpha > 0$. Étudier l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^\alpha}\right)$. (plusieurs cas. la limite est calculable dans certains cas)

Exercice 3 :

1. Justifier la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n+n^4}$.
2. Comment calculer une valeur approchée de la somme à 10^{-4} près?
3. Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k+k^4}$.

Exercice 4 : Une permutation de terme

1. On note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

   Exprimer S_{2n} avec des H_k, et montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

2. Changement de l'ordre de sommation. Au lieu de faire $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ...$, on considère maintenant: $-1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - ...$ (dans l'ordre, deux négatifs, un positif, répétés)
   On note W_n les sommes partielles de cette nouvelle série, n commençant à 1.
   Exprimer W_{3n} avec des H_k, et calculer $a = \lim\limits_{n\to+\infty} W_{3n}$. On notera que $a \neq -\ln(2)$.
   Justifier que $W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Exercice 5 : Permutation de termes: cas général

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n$ converge et $\sum |a_n|$ diverge.
On note $P = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq 0\}$, et $N = \mathbb{N} \backslash P$.

1. Justifier que $(a_n)_{n\in N}$ et $(a_n)_{n\in P}$ sont non sommables.
2. Soit $b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = b$.

   On définira σ en piochant dans P et N, de sorte à osciller autour de b.

Exercice 6 : On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k+1)}$ et $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Justifier que (S_n) converge.
2. Vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} = W_{2n} - \frac{W_n}{2}$.
3. A l'aide d'une décomposition en éléments simples et du développement asymptotique de W_n, calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(2k+1)}$

Exercice 7 : En utilisant les méthodes vues pour la série harmonique, déterminer un développement asymptotique à trois termes de $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. On admettra que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 8 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$. (u_n) vérifie $u_{n+1} = a\sin(u_n) + b$.
Montrer que $|u_{p+1} - u_p| \leq |a|^p |u_1 - u_0|$. En déduire que (u_n) converge.

Exercice 9 : On se donne une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) - \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = -\gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$ (γ est la constante d'Euler).

Exercice 10 :

1. Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}}$ quand $n \to +\infty$.

2. Soit (a_k) une suite de réels > 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

   On suppose $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a_n}$.

   (a) Etudier la convergence de la série de terme général a_n.
   (b) Déterminer α tel que $S_{n+1}^{\alpha} - S_n^{\alpha}$ admette une limite finie non nulle quand $n \to +\infty$.
   (c) Utilisant le théorème de Cesaro, trouver un équivalent de a_n.

Exercice 11 : étude asymptotique d'une suite récurrente
La suite (x_n) vérifie $x_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in]0,1[$ et que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Montrer que $\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = 1 + x_n + o(x_n)$. En utilisant le théorème de Cesaro, montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

3. Montrer que $\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

4. En déduire que $\frac{1}{x_n} - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

5. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$.

Exercice 12 : On se donne $x \in \mathbb{R}^+$. On définit $(\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ par:
$\varepsilon_1 = 1$ si $x \geq 1$, $\varepsilon_1 = 0$ si $x < 1$.
Si $n \geq 2$, $\varepsilon_n = 1$ si $x \geq \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_k}{k}$ et $\varepsilon_n = 0$ sinon.

1. Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $\varepsilon_n = 0$.

2. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n} = x$

3. Y-a-t-il une unique suite $(\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $x = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon_n}{n}$?

Exercice 13 : On s'intéresse à la convergence de $\sum \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$.

On pose $a_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k}$.

1. A l'aide d'un encadrement intégral de a_n, montrer que (a_n) est décroissante à partir d'un certain rang et que $a_n \to 0$.

2. Montrer que $\sum_{n\geq1} (-1)^n a_n$ converge, puis que $\sum \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$ converge.

Exercice 14 :

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k,n\in\mathbb{N},\ k\geq n}\frac{1}{k!}$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{p,q\geq 2}\frac{1}{p^q}$

3. Calculer $\displaystyle\sum_{p,q\in\mathbb{N}}2^{-3q-p-(p+q)^2}$.

4. CNS sur $a,b\in\mathbb{C}$ pour que $\displaystyle\left(\frac{a^p b^q}{(p+q)!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ soit sommable?

5. CNS sur $\alpha>0$ pour que $\displaystyle\left(\frac{1}{(q+p+1)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ soit sommable?

6. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p\in\mathbb{N}^*,p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}\neq\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}^*,p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}$ (on calculera les sommes). Conclusion?

7. Si $|x|<1$, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)x^n$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 15 :

1. Soit $(a_k)_{k\geq 2}$ une suite telle que $a_k\in\{0,1,...,k-1\}$ et $\displaystyle S=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{a_k}{k!}$.

   (a) Justifier l'existence de S.

   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{k-1}{k!}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{a_k}{k!}=O(1/(n-1)!)$.

   (c) Montrer que $\displaystyle 2\pi n!S-2\pi n!\sum_{k=0}^{n+1}\frac{a_k}{k!}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ puis que $\displaystyle\sin(2\pi n!S)-\sin\left(2\pi\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

2. Limite de $\sin(2\pi n!e)$?

3. Etudier la convergence de $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\sin(2\pi k!e)$.

4. $x\in[-1,1]$. Montrer qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $\sin(n!a)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x$.

Exercice 16 :

Soit $(a_n)_{n\in N}$ une suite réelle. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}na_n$ converge.

On pose $\displaystyle S_n=\sum_{k=0}^{n}ka_k$, $\displaystyle S=\sum_{k=0}^{\infty}ka_k$ et $\displaystyle A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

On veut montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}na_{n+p}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0$

1. Montrer que $\displaystyle A_n=\frac{S_n}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k}{k(k+1)}$. (transformation d'Abel)

2. Justifier que (S_n) est bornée et que $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{S_k}{k(k+1)}$ converge absolument. En déduire que la série de terme général a_n converge.

3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{p}$.

4. Soit (ε_k) une suite convergeant vers 0.

   Justifier que $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{\varepsilon_k}{k(k+1)}$ converge absolument, et montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty}\frac{\varepsilon_k}{k(k+1)}\underset{p\to+\infty}{=}o(1/p)$

5. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_{n+p} = \sum_{n=p}^{\infty} n a_n - p \sum_{n=p}^{\infty} a_n$

6. Montrer que $\displaystyle p \sum_{k=p}^{\infty} a_k = S - S_{p-1} + p \sum_{k=p}^{\infty} \frac{S_k - S}{k(k+1)}$

7. Conclure.

Exercice 17 : Sous-sommes de $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} 1/k^2$

Etant donnée une série $S = \displaystyle\sum_{k \geq p} a_k$ convergente à termes positifs, on appelle sous-somme de S toute somme du type $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} \varepsilon_k a_k$, où $\forall k,\ \varepsilon_k \in \{0, 1\}$. On note $D(S)$ l'ensemble des sous-sommes de S. (note : S désigne une série, et n'est pas un nombre)

Un résultat général

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $S = \displaystyle\sum_{k \geq 0} b_k$ converge et $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$. Soit $s = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$

1. On se fixe $x \in [0, s[$.
   Définissons (ε_k) par récurrence de la sorte :
   $\varepsilon_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } b_0 \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ étant définis, on pose $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } b_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k b_k \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k b_k$ converge.
   Montrer que $\forall n,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k b_k \leq x$, et que $a = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k b_k$ vérifie $a \leq x$.
   On suppose dans les deux questions suivantes $a < x$.
   (b) Montrer qu'il existe N tel que $\forall n \geq N,\ \varepsilon_n = 1$, et justifier l'existence de $p = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \varepsilon_n = 0\}$.
   (c) p est défini comme dans la question précédente.
   Justifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \varepsilon_k b_k > x - b_p$, et trouver une contradiction.

2. Montrer que $D(S) = [0, s]$.

   Sous-sommes de $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$

3. Ici $S = \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$.
   A l'aide d'une intégrale, montrer que $\forall n \geq 2,\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{n^2}$.
   Montrer que $D(S)$ est réunion de deux segments disjoints à préciser.
   On admettra $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \simeq 1,6$.