1 Suites et séries de fonctions

Exercice 1 : On considère la suite (f_n) de fonctions sur $[0,1]$ définie par les relations : $f_0 = 0$, $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \dfrac{t - f_n^2(t)}{2}$.

1. à $t \in [0,1]$ fixé, montrer que $\forall n$, $0 \leq f_n(t) \leq \sqrt{t}$, que $(f_n(t))_n$ est croissante, et que $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{t}$.
2. Soit $\varepsilon \in [0,1[$. Montrer que $\forall t \in [\varepsilon, 1]$, $\forall n \geq 1$,
$|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leq (1-\varepsilon/2)|f_n(t) - f_{n-1}(t)| \leq (1-\varepsilon/2)^n$.
3. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément.
4. Cette suite permet de démontrer le théorème de Weierstrass. Comment?

Exercice 2 : Partout, $n \in \mathbb{N}$. On pose $p_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!}$ et $f_n(x) = p_n(x)e^{-x}$.

1. CVS de (f_n)?
2. Montrer que $h_n : x \mapsto f_n(x) - e^{-2x}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et qu'il existe $x_n \in]0, +\infty[$ tel que $||h_n||_{\infty,\mathbb{R}^+} = |h_n(x_n)|$.
3. Montrer que $|h_n(x_n)| = \dfrac{x_n^n e^{-x_n}}{2n!}$. $(p_n'(x) = -p_n(x) + ...)$
4. Etudier la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$, et montrer que la convergence de (f_n) est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3 :
f est une fonction $\mathcal{C}^2$ de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on pose $f_n : x \geq 1 \mapsto \dfrac{n}{x}\left(f\left(x + \dfrac{x}{n}\right) - f(x)\right)$.

1. Etudier la convergence simple de (f_n).
2. Ici, $f(x) = \ln(x)$. Montrer que la convergence est uniforme.
3. Ici $f = \cos$. Montrer que la convergence n'est pas uniforme.
4. On suppose que $x \mapsto xf''(x)$ est bornée.
Montrer que (f_n) converge uniformément. (Utiliser Taylor-Lagrange)
Si on suppose de plus que $\dfrac{f(x)}{x}$ converge en $+\infty$, qu'en déduire sur le comportement de f' en $+\infty$? (double limite)

Exercice 4 : Cas lipschitzien, et un des théorèmes de Dini

1. Soient $C > 0$ et $(f_n) \in \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n$, f_n est C-lipschtzienne.
On suppose que (f_n) converge simplement. Montrer que la convergence est uniforme.

2. Un théorème de Dini.
   Soit $(f_n) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n$, f_n est croissante, et (f_n) converge simplement vers $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
   Montrer f est croissante, et que la convergence est uniforme.

Exercice 5 : Second théorème de Dini
Soit $(f_n) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et (f_n) converge simplement vers $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
Montrer que la convergence est uniforme.
On utilisera la propriété de Borel-Lebesgue, déjà vue:
Si $[a,b] \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ où $\forall i$, O_i est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors il existe $J \subset I$ finie telle que $[a,b] \subset \bigcup_{i\in J} O_i$.

Exercice 6 : $C, D > 0$. Soit $(f_n) \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n$, f_n est C-lipschitzienne, et $||f_n||_\infty \leq D$.

1. Justifier l'existence de (x_n) suite injective d'élément de $[0,1]$ telle que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $[0,1]$.
   On se fixe une telle suite.
2. Justifier l'existence d'extractrices ϕ_0, ϕ_1, etc ... telles que $\forall k$, $\forall i \in [\![0,k]\!]$, $(f_{\phi_0\circ\phi_1\circ\ldots\circ\phi_k(n)}(x_i))_n$ converge.
3. Déterminer une extractrice ϕ telle $\forall k$, $(f_{\phi(n)}(x_k))_n$ converge.
4. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $(f_{\phi(n)}(x))_n$ converge (on pourra utiliser le critère de Cauchy). On note $f(x)$ la limite.
5. Montrer que $(f_{\phi(n)})_n$ converge uniformément vers f.

Exercice 7 : Soit $f : [-1,1] \to [-1,1]$ continue telle que $\forall x \neq 0$, $|f(x)| < |x|$.
$f_0 = f$, et $f_{n+1} = f \circ f_n$.
Si $a \in]0,1]$, montrer qu'il existe $c \in [0,1[$ tel que $\forall x$, $|x| \geq a \Longrightarrow |f(x)| \leq c|x|$.
Montrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 8 : On considère $f : x \in [0,1] \mapsto 2x(1-x)$.

1. On pose $f_0 = f$ et $f_{n+1} = f \circ f_n$. Vérifier que $\forall n$, (f_n) est définie.
   Etudier la convergence simple de (f_n), et montrer que la convergence est uniforme sur tout $[a,b] \subset]0,1[$.
2. Soit $[a,b] \subset]0,1[$ et h continue sur $[a,b]$. Montrer que h est limite uniforme sur $[a,b]$ d?une suite de polynômes à coefficients entiers.

Exercice 9 : On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$.

1. Montrer que f est bien définie, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer f'.
2. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et en déduire f.

Exercice 10 : On pose $f : x > 0 \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$

1. Justifier la bonne définition de f, et étudier sa continuité.
2. Déterminer la limite, puis un équivalent de f en $+\infty$.
3. Déterminer la limite, puis un équivalent de f en 0.

4. Calculer $f(1/p)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11 : On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Etudier la convergence simple, normale de $\sum u_n$ et la continuité de $u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
2. Etudier la dérivabilité de u sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer un équivalent de $u(x)$ quand $x \to 0$, $x \neq 0$. u est-elle dérivable en 0?

Exercice 12 : On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n e^{-\sqrt{n}x}}{x+n}$. On notera $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-\sqrt{n}x}}{x+n}$

1. Montrer que $f(x)$ est définie si $x \in \mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ si $a > 0$, ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$, et converge uniformément sur $[0, +\infty[$. Qu'en déduire sur f?
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ?$
4. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 13 : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 2\pi[$.

Exercice 14 : Théorème de Borel
(c_n) est une suite de réels.
Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{c_n x^n}{1 + n! c_n^2 x^2}$.
On pose également $a_n(x) = \dfrac{c_n x^n}{1 + n! c_n^2 x^2}$.

1. Vérifier que si $h \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{1}{1+h} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+h}}$.

   En déduire que $|a_n(x)| \leq \dfrac{|x|^{n-1}}{\sqrt{n!}}$, et que f est bien définie.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|a_n'(x)| \leq \dfrac{n|x|^{n-2}}{\sqrt{n!}} + \left| \dfrac{2n! c_n^3 x^{n+1}}{(1 + n! c_n^2 x^2)^2} \right| \leq \dfrac{n|x|^{n-2}}{\sqrt{n!}} + \dfrac{2|c_n||x|^{n-1}}{1 + n! c_n^2 x^2} \leq \dfrac{(2+n)|x|^{n-2}}{\sqrt{n!}}$ (Dériver a_n comme un produit).

   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

   On admettra que plus généralement f est $\mathcal{C}^\infty$ et qu'on peut infiniment dériver terme à terme.
3. Montrer que $a_n^{(k)}(0) = 0$ si $k < n$, et calculer $a_n^{(n)}(0)$.
4. Soit $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(0) = b_n$. (théorème de Borel)

Exercice 15 : On se donne $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $g(x) \underset{x \to +\infty}{=} O(x)$

1. On définit une suite de fonctions sur $\mathbb{R}^+$ par $y_0 = 0$ et
   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, \ y_{n+1}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}(t-x)(y_n(t) - g(t))dt.$
   Montrer que les y_n sont biens définies, bornées et continues.

2. On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = y_n - y_{n-1}$.
   Déterminer $k \in]0,1[$ tel que pour tout n, $\|u_{n+1}\|_\infty^{\mathbb{R}^+} \leq k \|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}^+}$. Qu'en déduire sur la nature de $\sum u_n$?

3. Montrer que (y_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers y continue, bornée, et vérifiant :
   $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ y(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}(t-x)(y(t) - g(t))dt$

4. Montrer que $y(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. Etablir une équation différentielle linéaire d'ordre deux vérifiée par y.

6. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une solution y de l'équation différentielle (E) : $y''(x) - e^{-x^2}y(x) = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} y(x) - ax - b + \sin(x) = 0$.
   (on montrera que l'ED devant être vérifiée par $w : x \mapsto y(x) - ax - b + \sin(x)$ admet une solution tendant vers 0 en $+\infty$).

Exercice 16 :

1. Pour $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
   (a) Montrer que ζ est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.
   (b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, exprimer a_p, le coefficient d'ordre p de la série de Taylor de ζ en 2 (ie $a_p = \dfrac{\zeta^{(p)}(2)}{p!}$) comme somme d'une série convergente.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \leq n!$.

3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, et $x \in [1, +\infty[$, on pose $f_p(x) = \dfrac{(\ln x)^p}{x^2}$.
   (a) Etudier le sens de variation de f_p et en déduire, pour $p \geq 2$, qu'il existe un entier N_p, tel que f_p soit croissante sur $[1, N_p - 1]$ et décroissante sur $[N_p, +\infty[$.
   Montrer que f_p admet un maximum M_p tel que $M_p \leq \dfrac{p!}{2^p}$.
   (b) Montrer que l'intégrale $I_p = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_p(t)dt$ existe et déterminer sa valeur.

4. (a) A l'aide de ce qui précède, déterminer un encadrement de $p!|a_p| - p!$.
   (b) Démontrer que $||a_p| - 1| \leq \dfrac{1}{2^p}$. (et donc $a_p \to 1$)

Exercice 17 : Si $a < b$, on définit $f_{a,b} : x \to \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}\right) & \text{si } x \in]a,b[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Représenter graphiquement $f_{a,b}$.

2. Montrer que $f_{a,b}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Montrer (déjà vu) qu'il existe (a_n) et (b_n) deux suites de réels finies ou indexées par $\mathbb{N}$ telles que $O = \bigsqcup_n]a_n, b_n[$.

4. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f soit nulle sur F et > 0 sur $\mathbb{R} \backslash F$. (Définir f comme somme de série.)

Exercice 18 : En utilisant $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ si $|u| < 1$, calculer :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+e^t} dt$. (on admettra $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{e^{it} - 2}$.

Exercice 19 : Soit $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-\sqrt{k}t}}{\sqrt{k}}$.

Montrer que f est définie, continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$.

2 Séries entières

Exercice 20 : Rayon de convergence de $\sum e^n x^{n^2}$.

Exercice 21 : (a_n) est une suite de réels > 0 telle que $\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}} \to s \neq 1$.
Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?

Exercice 22 : $\forall n$, $a_n \neq 0$. Comparer les rayons de convergence de $\sum a_n x^n$ et $\sum \dfrac{x^n}{a_n}$.

Exercice 23 : (a_n) vérifie $a_{n+2} = \dfrac{n^4 + n + 40}{n^4 + 3} a_{n+1} + \dfrac{3n^3 + \cos(n)}{n + n^3} a_n$.

1. Si $\alpha > 4$, montrer que pour n assez grand, $|a_{n+2}| \leq \alpha \max(|a_{n+1}|, |a_n|)$.

2. Si $\alpha > 4$, montrer qu'existe $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq C\alpha^n$.
Qu'en déduire concernant le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?

Exercice 24 : $a > 0$ et $u_n = a + \dfrac{n}{3} - E\left(\dfrac{n}{3}\right)$. Rayon de convergence et somme de $\sum u_n x^n$.

Exercice 25 : Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n+1)(2n+2)}$.

Exercice 26 : Soit $(a_n) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 1$, et qu'en posant $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$, on ait $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \geq 0,\ |f^{(p)}(x)| \leq 1$. Montrer que $f(x) = e^{-x}$.

Exercice 27 : Soit (a_n) vérifiant $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = n(-1)^n$.
En utilisant $\sum a_n x^n$, calculer a_n en fonction de n, a_0, et a_1.

Exercice 28 : Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, avec $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{a_{n-1}}{n+1}$.

Exercice 29 : Rayon de convergence et calcul de la somme de $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{2n-1} x^{n-1}$.

Exercice 30 : DSE au voisinage de 0 de $x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}$.

Exercice 31 :
Montrer que $x \mapsto \exp(\exp(x))$ est DSE sur $\mathbb{C}$. (familles sommables, sommation par paquets).

Exercice 32 :
$R > 0$. Soit f DSE sur $D(0, R)$ ne s'annulant pas. Montrer que $g := \frac{1}{f}$ est DSE sur un voisinage de 0. On cherchera les relations définissant les coefficients du DSE de g, avec $fg = 1$, puis on s'intéressera au rayon de convergence.

Exercice 33 :

1. (a_n) vérifie $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1} + a_n = \frac{1}{n!}$.
   On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ lorsque la série converge.
   Chercher formellement une équation différentielle vérifiée par f. En déduire le rayon de convergence R de la série entière, et une expression de $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.
2. On note (E) l'équation différentielle $(1-x)y'' + y = 0$.
   (a) Rechercher formellement les conditions sur les a_n pour que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution de (E). Montrer que la suite (a_n) est alors bornée.
   (b) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1, 1[$ et DSE sur ce même intervalle est un ev de dimension 2.

Exercice 34 :

On note, si $r > 0$, $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ et $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$.On convient que $D_\infty = \mathbb{C}$.

On se fixe $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$ et $f : x \in D_R \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. (le rayon de convergence de la série entière est donc supposé $\geq R$)

1. Représentation intégrale des coefficients.
   Montrer que, si $p \in \mathbb{N}$ et $r \in [0, R[$, $\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt} dt = 2\pi a_p r^p$.
2. Théorème de Liouville.
   Si $R = +\infty$ et f est bornée sur $\mathbb{C}$, montrer que f est constante. (montrer que $p \geq 1 \Longrightarrow a_p = 0$)
3. $r \in [0, R[$ et $|w| < r$. Montrer que $f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - w} f(re^{it}) dt$.
   On pourra partir de $\frac{re^{it}}{re^{it} - w} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{w}{re^{it}}\right)^p$.
4. Principe du maximum.
   On justifiera l'existence des extrema donnés. $|w| < r < R$.
   (a) Montrer que $|f(w)| \leq \frac{r}{r - |w|} \max_{C_r} |f|$.

(b) Montrer que $|f(w)| \leq \max\limits_{C_r} |f|$. (on pourra appliquer, avec justification, le résultat précédent à f^p, et faire tendre p vers $+\infty$.)

Ainsi $\max\limits_{|z|\leq r} |f(z)| = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ ie que le maximum de $|f|$ sur le disque fermé de centre 0 et de rayon r est atteint sur le bord du disque.

Exercice 35 : Si $a \in \mathbb{C}$, $r \in R_+^*$ et $r \neq |a|$, on pose $I(a,r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta}}{a+re^{i\theta}} d\theta$.

1. Si $r < |a|$, montrer que $I(a,r) = 0$. (utiliser un DSE de $\dfrac{1}{1+z}$)
2. Si $r > |a|$, calculer $I(a,r)$.
3. Soit $P = \lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X-a_i)^{d_i} \in \mathbb{C}[X]$ où les a_i sont les racines de P et les d_i leurs ordres.
   (a) Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
   (b) Si $r \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{|a_1|, ..., |a_n|\}$, que vaut $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})} re^{i\theta} d\theta$?
4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul tel que $P(0) = 0$ et $r > 0$.
   Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est assez proche de 0 alors il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq r$ et $P(z) = a$.

Exercice 36 :

1. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln(n) x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$.
   On pose $f : x \in]-1,1[\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ et $g : x \in]-1,1[\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
2. Calculer $g(x)$ (produit de Cauchy)
3. Montrer que $f(x) - g(x) \underset{x\to 1^-}{=} O(1/(1-x))$, et déterminer un équivalent en 1^- de f.

Exercice 37 :
Si $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note $a_{n,k}$ le nombre de façons d'écrire n comme somme de k entiers entre 0 et 9, en tenant compte de l'ordre d'écriture.
Autrement dit, $a_{n,k}$ est le nombre de k-uplets $(r_1, ..., r_k)$ de $\{0, 1, ..., 9\}^k$ tels que $n = r_1 + r_2 + ... + r_k$.
Ainsi, comme $4 = 0{+}1{+}3 = 1{+}0{+}3 = ... = 1{+}1{+}2 = 1{+}2{+}1 = 2{+}1{+}1 = 0{+}0{+}4 = 0{+}4{+}0 = 4{+}0{+}0$, $a_{4,3} = 12$.

1. Développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^k}$.
2. On écrit $(1 + x + x^2 + ... + x^9)^k = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t_{n,k} x^n$. Quel est le lien entre $t_{n,k}$ et $a_{n,k}$?
3. Calculer $a_{n,k}$. (on obtiendra une somme faisant intervenir des coefficients binomiaux)
4. Calculer $b_{n,k}$ où $b_{n,k}$ est le nombre de façons d'écrire n comme somme de k entiers entre 1 et 9, en tenant compte de l'ordre d'écriture.
5. Calculer $c_{n,k}$ où $c_{n,k}$ est le nombre de façons d'écrire n comme somme de k entiers naturels, en tenant compte de l'ordre d'écriture.

Exercice 38 : Soit $P(X)$ un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$ à coefficients complexes que l'on écrit sous la forme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_{d-1} X^{d-1} + X^d$$

On suppose $a_0 \neq 0$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ les racines de $P(X)$ (avec multiplicité). Pour tout entier $n \geq 1$, on définit (somme de Newton)

$$N_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \ldots + \lambda_d^n$$

Soit $Q(X)$ le polynôme réciproque de $P(X)$ défini par $Q(X) = X^d P(\frac{1}{X})$

1. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \left(\mathbb{R} \cap \left\{\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_d}\right\}\right) \to \mathbb{C}$ par $f(x) = \dfrac{Q'(x)}{Q(x)}$.
   Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $]-r, r[$, et que le développement en série entière de f en 0 s'écrit
   $$\forall x \in]-r, r[, \ f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} N_{n+1} x^n$$
   Montrer que:
   $\forall n \in \{1, ..., d-1\}, \ -(n+1)a_{d-n-1} = N_{n+1} + N_n a_{d-1} + ... + a_{d-n} N_1$
   $\forall n \geq d, \ N_{n+1} + N_n a_{d-1} + ... + N_{n+2-d} a_1 + N_{n+1-d} a_0 = 0$

2. (a) Montrer que si $a_0, \ldots, a_{d-1}$ sont des éléments de $\mathbb{Q}$, alors $N_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geq 1$.
   (b) Réciproquement, montrer que si $N_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geq 1$, alors $a_0, \ldots, a_{d-1}$ sont des éléments de $\mathbb{Q}$.
   (c) En déduire que si $\mu_1, \ldots, \mu_d$ sont des nombres complexes et si $P(X) = \prod_{i=1}^{d}(X - \mu_i)$, sans supposer $P(0) \neq 0$, alors $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ si et seulement si $\forall n \geq 1, \ \sum_{i=1}^{d} \mu_i^n \in \mathbb{Q}$

3. Soient $n, m \geq 1$ deux entiers et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ des nombres complexes. On définit
   $$A(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_n)$$
   $$B(X) = (X - \beta_1)(X - \beta_2) \ldots (X - \beta_m)$$
   Montrer que si $A(X)$ et $B(X)$ sont à coefficients rationnels, alors les polynômes
   $$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(X - \alpha_i\beta_j) \ et \ \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(X - \alpha_i - \beta_j)$$
   sont aussi à coefficients rationnels.

3 Problèmes

3.1 Développement en série entière de tan

I - Formule d'Euler pour la cotangente

Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z} \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \dfrac{1}{x+k}$. On pose également $g : x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z} \mapsto \pi \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$

1. Etablir que $h : x \in]-1, 1[\mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2 - k^2}$ est bien défine et continue. (utiliser des segments $[-a, a] \subset]-1, 1[$)

2. Etablir une relation entre $f_n(x)$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2-k^2}$.
   En déduire la convergence simple de (f_n) sur $]0,1[$, et la continuité de $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ sur $]0,1[$.
   Donner une relation entre f et h.

3. Simplifier $f_n(x+1) - f_n(x)$, et en déduire que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ vers une fonction 1-périodique, que l'on note toujours f.

4. Montrer que g est 1-périodique.

5. En simplifiant $2f_{2n}(x) - f_n(x/2) - f_n((x+1)/2)$, montrer que
   $\forall x \in]0,1[$, $2f(x) - f(x/2) - f((x+1)/2) = 0$.
   Montrer que $f - g$ vérifie la même équation fonctionnelle sur $]0,1[$.

6. Montrer que $f(x) - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, et $g(x) - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

7. En déduire que $f - g$ se prolonge continûment à $\mathbb{R}$.
   On note q le prolongement de $f - g$ à $\mathbb{R}$.
   Montrer que $q(0) = 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $2q(x) - q(x/2) - q((x+1)/2) = 0$

8. Justifier qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $|q(a)| = \max_{[0,1]} |q|$.
   Montrer que $|q(a/2)| = |q(a)|$, puis montrer que $q = 0$.

   Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$, ou encore $\frac{1}{x} + 2x\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2-k^2} = \pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$

II - Fonction zeta de Riemman

On pose $\zeta \ : \ x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

9. Montrer que ζ est définie et continue sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 1\}$.

10. Montrer que ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

11. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

12. A l'aide d'un encadrement intégral déterminer un équivalent simple de $\zeta(x)$ quand $x \to 1^-$.

III - DSE de tan

13. Justifier que ζ est bornée sur $[2, +\infty[$ et que, si $|x| < 1$, $\sum_{n\geq 1} \zeta(2n)x^{2n}$ converge.

    On pose $\forall x \in]-1,1[$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(2n)x^{2n}$.

14. Montrer que $\forall x \in]-1,1[\backslash\{0\}$, $2g(x) = 1 - \pi x \text{cotan}(\pi x)$. (justifier une interversion de sommation. On rappelle que $\text{cotan} = \frac{1}{\tan}$)

15. En utilisant $\text{cotan}(x) - 2\text{cotan}(2x)$, montrer que $\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(4^n-1)}{\pi^{2n}}\zeta(2n)x^{2n-1}$.

3.2 Problème de dénombrement (extrait d'un problème des Mines)

Une serrure de sécurité possède n boutons numérotés de 1 à n ($n \geq 1$). Une "combinaison" consiste à pousser dans un certain ordre tous les boutons. Chaque bouton n'est poussé qu'une seule fois mais il est possible de pousser simultanément plusieurs boutons.
La modélisation est effectuée de la manière suivante : pour une valeur donnée de l'entier n, soit A_n l'ensemble des entiers de 1 à n :

$$A_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Par définition une n-combinaison est une suite ordonnée $(P_1, P_2, \ldots, P_j)$ de j parties P_1, P_2, $\ldots$, P_j de l'ensemble A_n, ($1 \leq j \leq n$) ; ces parties P_i, $1 \leq i \leq n$, de A_n sont deux à deux disjointes et différentes de la partie vide ; leur réunion est égale à A_n.

Soit a_n le réel égal au nombre de n-combinaisons.

Exemples :
$n = 1$: une seule 1-combinaison : $(\{1\})$; $a_1 = 1$.
$n = 2$: il y a trois 2-combinaisons : $(\{1\}, \{2\})$; $(\{2\}, \{1\})$; $(\{1, 2\})$.
La première 2-combinaison consiste à appuyer d'abord sur le bouton 1 puis sur le bouton 2, la deuxième à appuyer d'abord sur le 2 puis sur le 1, la troisième à appuyer simultanément sur les boutons 1 et 2. $a_2 = 3$.

Première partie.

Le but de cette partie est de donner quelques exemples de n-combinaisons et d'établir une relation de récurrence vérifiée par les réels a_n, $n \geq 1$.

1. Premiers exemples :
   (a) Pour une valeur de l'entier n donné, quel est le nombre de n-combinaisons telles que les boutons soient poussés l'un après l'autre ? (les parties P_i, $1 \leq i \leq n$, sont toutes des singletons).
   (b) Déterminer, lorsque l'entier n est égal à 3, en explicitant chacune des suites possibles, le nombre a_3 des 3-combinaisons. Les singletons $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$ peuvent être désignés brièvement par 1, 2 et 3. Par exemple : $(1, 3, 2)$ désigne la 3-combinaison dans laquelle les boutons sont poussés successivement dans l'ordre 1, 3, 2 ; $(\{1, 3\}, 2)$ est la suite dans laquelle les deux boutons 1 et 3 sont poussés simultanément avant que le bouton 2 ne soit enfoncé.

2. Relations de récurrence :
   L'entier n est supérieur ou égal à 1. Soit S une n-combinaison quelconque ; S est une suite ordonnée $(P_1, P_2, \ldots, P_j)$ de j parties P_1, P_2, $\ldots$, P_j de l'ensemble A_n, deux à deux disjointes, non vides, dont la réunion est égale à A_n ($1 \leq j \leq n$).
   (a) Combien y a-t-il de choix possibles pour la partie P_1 lorsque le nombre d'éléments de P_1 est k ($\operatorname{Card} P_1 = k$) ?
   (b) Soit k un entier strictement inférieur à n ($k < n$) ; pour une partie P_1 fixée possédant k éléments ($\operatorname{Card} P_1 = k$), combien y a-t-il de n-combinaisons S ? Exprimer le résultat à l'aide du réel a_p, pour une valeur convenable de l'entier p.
   (c) Le but de cette question est d'établir une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $(a_p)_{p \geq 1}$.
   Exprimer d'abord le réel a_n, en fonction des réels a_p, $1 \leq p \leq n-1$, puis, avec la convention $a_0 = 1$, exprimer le réel a_n pour $n \geq 1$, en fonction des réels a_p, $0 \leq p \leq n-1$.
   Retrouver les valeurs obtenues ci-dessus pour a_2 et a_3.
   (d) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}$

3. Majoration des réels b_n, $n \geq 0$: Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq \dfrac{1}{(\ln 2)^n}$.

4. Minoration des réels b_n, $n \geq 1$:

   (a) Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2 \leq 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\ln 2)^k}{k!} + 2\frac{(\ln 2)^n}{n!}$.

   (b) En déduire pour tout entier $n \geq 1$, $b_n \geq \dfrac{1}{2(\ln 2)^n}$.

Deuxième partie

L'objet de cette partie est l'étude de la série entière de terme général $b_n x^n$, $n \geq 0$.
On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ lorsque cela a un sens.

1. Existence et expression de la fonction f :

   (a) Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n x^n$?

   (b) Justifier que $x \mapsto e^x f(x)$ est DSE sur $]-R, R[$.
   On note $e^x f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.
   Calculer c_n (séparer le cas $n = 0$) et en déduire $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \dfrac{1}{2 - e^x}$.

2. Une expression du coefficient a_n :

   (a) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression du coefficient a_n, au moyen de la valeur d'une dérivée de la fonction f en 0.

   (b) Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par la relation : $u_k(x) = \dfrac{e^{kx}}{2^{k+1}}$.
   Préciser le plus grand intervalle ouvert J dans lequel la série de fonctions de terme général u_k est convergente.
   Dans quels intervalles fermés la convergence de la série de fonctions u_k $k = 0, 1, 2, \ldots$ est-elle normale ?
   Préciser le plus grand intervalle ouvert dans lequel $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est indéfiniment dérivable terme à terme sur $]-R, R[$.
   En déduire une expression de a_n comme somme d'une série.

   (d) L'expression précédente permet de déterminer un équivalent de a_n quand $n \to +\infty$ (fait partie du problème d'origine). Par quelle méthode d'après vous? Sans faire de vérification/preuve, calculer un équivalent.