

Application du formalisme de Landauer à l'effet Hall quantique

- *Résumé* : L'objet de ce stage est l'application du formalisme de Landauer, qui permet de comprendre le transport électronique dans un fil quantique en termes de diffusion, aux états de bord mis en évidence dans l'effet Hall quantique.
- *Mots-clés* : Formalisme de Landauer, effet Hall quantique, états de bord.

-David Carpentier
-ENS Lyon
43 allée d'Italie
69007 Lyon

Table des matières

Remerciements	5
Introduction	6
1 Formalisme de Landauer	7
1.1 Cas à un seul mode	7
1.1.1 Conductance intrinsèque d'une portion de fil	7
1.1.2 Conductance pour deux terminaux	10
1.2 Cas à plusieurs modes	11
1.3 Conductance à 4 terminaux	12
1.3.1 Cas à un mode	13
1.3.2 Cas à plusieurs modes	15
2 Approche de l'effet Hall quantique par le formalisme de Landauer	16
2.1 Préambules	16
2.1.1 L'effet Hall classique	16
2.1.2 Les niveaux de Landau	17
2.1.3 Présentation des résultats expérimentaux	17
2.2 Introduction : résistance à deux terminaux	19
2.2.1 Les états de bord	19
2.2.2 conducteur parfait	21
2.2.3 conducteur avec diffusion élastique	21
2.3 Résistance à quatre terminaux : résistance de Hall	22
2.4 Contacts désordonnés	24
Conclusion	27
A Expression de la conductance intrinsèque dans le cas à plusieurs modes	28
B Calcul des coefficients reliant les intensités aux différences de potentiel dans la configuration à quatre terminaux	32

Table des figures

1.1	boîte noire reliant les courants entrant et sortant	7
1.2	fil relié à deux réservoirs	10
1.3	schéma théorique d'une portion de fil reliée à 4 réservoirs . .	13
2.1	résultats expérimentaux de Von Klitzing. En rouge la résistance de Hall.	18
2.2	Spectre d'énergie d'un conducteur parfait dans un fort champ magnétique avec un potentiel de confinement. L'intersection des courbes des niveaux d'énergie avec l'énergie de Fermi correspond aux états de bords.	20
2.3	Chiralité des bords : les électrons d'un bord se déplacent dans un seul sens, opposé à celui de l'autre bord	20
2.4	On voit ici la levée de dégénérescence des niveaux de Landau et leur étalement autour de la valeur originelle E_n . A fort champ B, il n'y a aucun recouvrement entre les niveaux. . . .	23
2.5	effet Hall quantique : configuration à quatre terminaux	24
2.6	Conducteur avec contacts désordonnés	24
A.1	configuration à quatre terminaux	28

Remerciements

Je tiens naturellement à remercier David Carpentier, qui a su insister sur les points les plus subtils du sujet tout en m'apportant la cohérence et l'intérêt d'une vue d'ensemble,

Je tiens à remercier également tous ceux qui au sein du labo m'ont prodigué leur aide, leur bonne humeur, ou les deux,

Merci enfin à tous ceux qui m'ont permis de garder la ligne cet été en piochant allègrement durant mes absences dans les biscuits sur mon bureau.

Introduction

Les dernières décennies ont été marquées par des avancées de premier ordre dans le riche domaine de la matière condensée, la mise en évidence de l'effet Hall quantique en 1980 en est un paradigme certain. A suivi dans ce champ d'investigation la découverte de l'effet Hall quantique fractionnaire, et les études sur l'effet Hall quantique de spin sont maintenant au coeur de l'actualité.

Nous avons durant ce stage entrepris d'acquérir les outils théoriques nécessaires à la compréhension d'une approche de l'effet Hall quantique entier (nous laisserons de côté ici l'effet Hall quantique fractionnaire) qui pourrait s'avérer fructueuse quant à l'étude de l'effet Hall de spin :

-Nous présenterons tout d'abord les bases du formalisme de Landauer, qui permet d'appréhender le transport électronique au sein d'un fil quantique en termes de diffusion.

-Nous verrons ensuite l'intérêt de ce formalisme pour l'effet Hall quantique. A cette fin, nous expliquerons comment la physique du phénomène, initialement bi-dimensionnelle, peut se ramener à une géométrie uni-dimensionnelle, via la notion d'états de bord. Cela nous permettra d'y appliquer certains résultats obtenus pour le transport électronique dans un fil quantique.

Chapitre 1

Formalisme de Landauer

Le formalisme de Landauer est une approche du transport électronique en termes de diffusion. Il s'agit de déduire les propriétés du fil (conductance, résistance) sans étudier la physique du transport proprement dite (en cela on assimile le fil à une "boîte noire"[1]), mais en les décrivant en termes de réflexion et de transmission des courants.

1.1 Cas à un seul mode

1.1.1 Conductance intrinsèque d'une portion de fil

On cherche à exprimer la conductance d'une portion de fil. Commençons, conformément à la démarche annoncée, par nous intéresser à la matrice de diffusion reliant les amplitudes des fonctions d'onde des électrons entrant et sortant :

$$\begin{pmatrix} a_1^L \\ a_2^R \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_1^R \\ a_2^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^R \\ a_2^L \end{pmatrix} \quad (1.1)$$



FIG. 1.1 – boîte noire reliant les courants entrant et sortant

Si l'on veut maintenant relier les courants entrant et sortant, nous écrivons une matrice M telle que :

$$\begin{pmatrix} j_1^L \\ j_2^R \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} j_1^R \\ j_2^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & T' \\ T & R' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1^R \\ j_2^L \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

M est une matrice de probabilité, dont les coefficients sont les carrés de ceux de la matrice S. En effet, le courant est proportionnel au carré de l'amplitude de la fonction d'onde ($j = i\hbar(\nabla\phi\phi^* + \phi\nabla\phi^*)$). Il y a conservation du courant, c'est-à-dire que l'on doit avoir égalité des courants entrant et sortant. De ce fait, la matrice S doit conserver la norme des vecteurs amplitudes $\begin{pmatrix} a_1^L \\ a_2^R \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_1^R \\ a_2^L \end{pmatrix}$, ce qui signifie qu'elle est unitaire. On a donc $SS^\dagger = Id$, ce qui entraîne :

$$\begin{cases} rr^* + t't'^* = 1 \\ rt^* + t'r'^* = 0 \\ tr^* + r't'^* = 0 \\ tt^* + r'r'^* = 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

d'où on tire, en se souvenant que $R = rr^*$, $R' = r'r'^*$, $T = tt^*$, $T' = t't'^*$:

$$\begin{aligned} R + T' &= 1 \\ T + R' &= 1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

De plus, il y a également conservation par renversement du temps.

Appliquons un champ magnétique B. Changeons t en -t ($j_{1/2}^R$ devient $j_{1/2}^L$, les vitesses des électrons changent de signe), et changeons B en -B. Les lois de l'électromagnétisme restent les mêmes, nous devons avoir :

$$\begin{pmatrix} j_1^R \\ j_2^L \end{pmatrix} = M(-B) \begin{pmatrix} j_1^L \\ j_2^R \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Ayant par ailleurs :

$$\begin{pmatrix} j_1^R \\ j_2^L \end{pmatrix} = M^\dagger(B) \begin{pmatrix} j_1^L \\ j_2^R \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

nous aboutissons à l'égalité $M^\dagger(B) = M(-B)$. Si $B = 0$, nous avons invariance par renversement du temps, $M^\dagger = M$. Cela nous donne que $T = T'$.

L'ensemble de ces conditions aboutit aux égalités suivantes :

$$R = R', T = T', R + T = 1 \quad (1.7)$$

Cherchons maintenant, pour parvenir à la conductance, à exprimer δV en fonction des courants entrant dans le fil.

La différence de densité électronique entre chaque côté du fil est : $n_1 - n_2 = \left. \frac{dn}{dE} \right)_{E_F} e \delta V$.

$$n_1 = n_1^R + n_1^L = \frac{1}{ev_F} (j_1^L + j_1^R) \quad (1.8)$$

$$n_2 = \frac{1}{ev_F} (j_2^L + j_2^R) \quad (1.9)$$

où v_F vitesse de Fermi ($\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = E_F$)

On a donc, en utilisant (1.6), $\delta V = \frac{(j_1^L + j_1^R) - (j_2^L + j_2^R)}{2e^2 v_F \left. \frac{dn}{dE} \right)_{E_F}}$ et

$$\begin{aligned} (j_1^L + j_1^R) - (j_2^L + j_2^R) &= (Rj_1^R + Tj_2^L) + j_1^R - j_2^L - (Tj_1^R + Rj_2^L) \\ &= (1 + R - T) (j_1^R - j_2^L) = 2R (j_1^R - j_2^L) \end{aligned} \quad (1.10)$$

d'où :

$$\delta V = \frac{2R (j_1^R - j_2^L)}{2e^2 v_F \left. \frac{dn}{dE} \right)_{E_F}} \quad (1.11)$$

Soit, en considérant que¹ $\left. \frac{dn}{dE} \right)_{E_F} = \frac{1}{2\pi\hbar v_F}$:

$$\delta V = \frac{2R (j_1^R - j_2^L) (\pi\hbar v_F)}{e^2 v_F} \quad (1.12)$$

Cherchons maintenant à exprimer l'intensité I traversant le fil en fonction des courants entrant.

$$I = j_1^R - j_1^L = j_2^R - j_2^L \quad (1.13)$$

¹ $n = \frac{2k_F}{2\pi/L}$ en 1D (On considère à la fois les électrons allant vers la gauche et ceux allant vers la droite. $\frac{dn}{dE} = \left(\frac{dn}{dk} \right) \left(\frac{dk}{dE} \right)$ nous donne alors le résultat mentionné

(cf conservation du courant)

Soit :

$$\begin{aligned} I &= j_1^R - (Rj_1^R + Tj_2^L) \\ &= T(j_1^R - j_2^L) \end{aligned} \quad (1.14)$$

La conductance du fil $G = \frac{I}{\delta V}$ s'exprime donc de la sorte :

$$G = \frac{e^2 v_F T (j_1^R - j_2^L)}{2R (j_1^R - j_2^L) (\pi \hbar v_F)} \quad (1.15)$$

Soit :

$$G = \frac{e^2 T}{h R} = \frac{e^2}{h} \frac{T}{1 - T} \quad (1.16)$$

C'est la conductance intrinsèque du fil : nous n'avons en effet pour aboutir à ce résultat fait aucune hypothèse sur les systèmes d'où proviennent et où vont les courants entrant et sortant [3].

1.1.2 Conductance pour deux terminaux

On prend maintenant un fil relié à deux réservoirs aux potentiels chimiques μ_1 et μ_2 (cf fig. 1.2), et on cherche à exprimer la conductance entre les réservoirs. Les contacts entre les réservoirs et le fil seront considérés comme parfaits, c'est-à-dire qu'il n'y aura pas de réflexion ($T = 1$) sur le réservoir. Tous les électrons se mouvant vers la droite arrivant sur la "boîte noire" viennent donc forcément du réservoir 1, et sont au potentiel μ_1 , idem pour le réservoir 2.

G sera égal à $\frac{Ie}{\mu_1 - \mu_2}$. (On rappelle que $eV = \mu_1 - \mu_2$)

On part pour I de l'expression (1.13), toujours valable, et pour les courants de (1.6). On a de plus ici :

$$j_1^R = en_1^R v = ev \int dE \frac{dn_1^R}{dE} f_1^R(E) = \frac{e}{h} \int dE f_1^R(E) \quad (1.17)$$



FIG. 1.2 – fil relié à deux réservoirs

où $f_1^R(E)$ correspond à la densité d'états du réservoir 1 occupés par les électrons se dirigeant vers la droite.

De même pour les autres courants. D'où d'après 1.14 :

$$I = \frac{e}{h} \int dET(f_1^R - f_2^L) \quad (1.18)$$

A température nulle $\int dE(f_1^R - f_2^L) = \mu_1 - \mu_2$.

On a donc :

$$G = \frac{Ie}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{e^2}{h} T \quad (1.19)$$

On constate que cette expression diffère de celle trouvée précédemment. On peut comprendre cela en considérant que la résistance mesurée aux bornes des réservoirs est la somme de deux résistances en série : la résistance intrinsèque du fil (voir section précédente) et la résistance de "contact". Cette résistance de contact est ici celle d'un conducteur parfait, puisque nous avons postulé qu'il n'y avait pas de réflexion sur le réservoir : on peut donc la calculer en faisant $T = 1$ dans l'expression de la résistance intrinsèque. Et nous avons bien :

$$\frac{1}{G} = \frac{h}{e^2} \frac{1-T}{T} + \frac{h}{e^2} \quad (1.20)$$

1.2 Cas à plusieurs modes

Nous allons maintenant expliciter la forme généralisée à plusieurs modes de l'expression précédente.

On peut pour cela s'inspirer du modèle du guide d'ondes en optique : le fil, de section finie $L_x L_y$ et de longueur infinie dans la direction Oz, s'apparente à un guide d'ondes électroniques. Il faut ajouter dans l'équation de Schrödinger le potentiel V de confinement, tel que $V = 0$ dans le fil et $V = \infty$ ailleurs. La fonction d'onde de l'électron doit donc s'annuler aux bords. Le Hamiltonien est séparable selon les trois directions de l'espace, on peut écrire trois équations distinctes $\frac{p_x^2}{2m} \phi_x = (E_x + V_x(x)) \phi_x$, $\frac{p_y^2}{2m} \phi_y = (E_y + V_y(y)) \phi_y$ et $\frac{p_z^2}{2m} \phi_z = E_z \phi_z$. On a par conséquent

$$\phi = \phi_x \phi_y \phi_z = cste \sin(k_x x) \sin(k_y y) \exp i k_z z \quad (1.21)$$

où $k_x = n \frac{2\pi}{L_x}$ et $k_y = m \frac{2\pi}{L_y}$. L'énergie des électrons peut s'écrire $E_x + E_y + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} = E_i + \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}$. Les modes i qui nous intéressent sont ceux à l'énergie

de Fermi (eux seuls interviennent dans la conduction), le nombre de valeurs discrètes de E_i inférieures à E_F nous donne donc le nombre de modes transverses. Apportons à ce stade une précision sur nos conventions : nous définirons désormais les modes i en tenant compte du spin, c'est la raison pour laquelle il sera inutile par la suite de faire apparaître un facteur 2 dans nos équations.

Reprenons dans ce cadre le calcul de la conductance à deux terminaux. La matrice de probabilité M doit maintenant s'écrire :

$$\begin{pmatrix} j_{11}^L \\ \vdots \\ j_{1i}^L \\ \vdots \\ j_{21}^R \\ \vdots \\ j_{2i}^R \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & \dots & R_{1j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ R_{i1} & \dots & R_{ij} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} T'_{11} & \dots & T'_{1j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ T'_{i1} & \dots & T'_{ij} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ T_{i1} & \dots & T_{ij} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} R'_{11} & \dots & R'_{1j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ R'_{i1} & \dots & R'_{ij} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{11}^R \\ \vdots \\ j_{1j}^R \\ \vdots \\ j_{21}^L \\ \vdots \\ j_{2j}^L \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

où R_{ij} est le coefficient de réflexion pour un courant de mode j vers un courant de mode i et T_{ij} est le coefficient de transmission pour un courant de mode j vers un courant de mode i . On note : $R_i = \sum_j R_{ij}$ et $T_i = \sum_j T_{ij}$. De façon analogue à la section précédente, l'invariance par renversement du temps et l'unitarité de la matrice de diffusion nous donne : $\sum_i T_i = \sum_i (1 - R_i)$ et $R_i + T_i = 1$, $R'_i + T_i = 1$.

Par analogie avec (1.18) nous avons donc pour l'intensité :

$$\begin{aligned} I &= \frac{e}{h} \sum_i \int dE ((1 - R'_i f_1^R(E)) - T_i f_2^L(E)) \\ &= \frac{e}{h} \sum_i \int dE T_i (f_1^R(E) - f_2^L(E)) \end{aligned} \quad (1.23)$$

A température nulle $\int dE (f_1^R - f_2^L) = \mu_1 - \mu_2$. D'où :

$$G = \frac{Ie}{\mu_1 - \mu_2} = \frac{e^2}{h} \sum_i T_i \quad (1.24)$$

1.3 Conductance à 4 terminaux

Nous allons maintenant analyser le cas où la portion de fil est reliée à quatre réservoirs. C'est en effet la configuration utilisée en pratique pour les mesures expérimentales de la conductance intrinsèque du fil, en particulier pour

l'effet Hall quantique qui va nous intéresser par la suite. La configuration est celle de la figure 1.3.

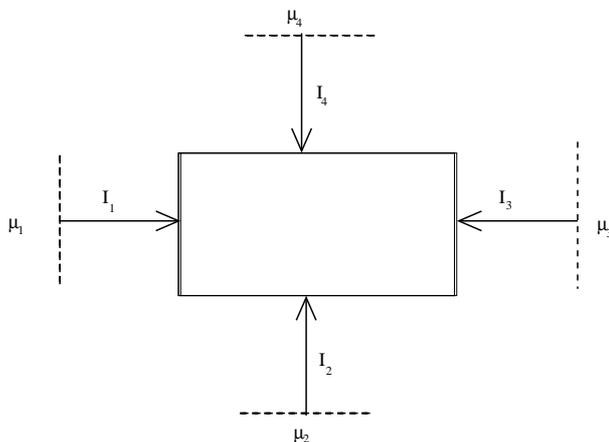


FIG. 1.3 – schéma théorique d'une portion de fil reliée à 4 réservoirs

1.3.1 Cas à un mode

Considérons par exemple le courant dans le contact 1, que nous supposons, comme dans la section précédente, parfait. En s'inspirant de 1.17, on peut dire que réservoir 1 y injecte un courant $\frac{e}{h}\mu_1$. En ce qui concerne le courant qui va au réservoir, il y a quatre contributions : le courant 1 réfléchi sur la "boîte noire", au potentiel μ_1 donc, le courant transmis issu du réservoir 2, celui issu du réservoir 3, et celui issu du réservoir 4. Nous arrivons en conséquence à l'expression suivante de l'intensité dans le contact 1 [4] :

$$I_1 = \frac{e}{h}((1 - R_1)\mu_1 - \sum_{j \neq 1} T_{1j}\mu_j) \quad (1.25)$$

On peut généraliser ce résultat sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \frac{e}{h} \begin{pmatrix} (1 - R_{11}) & -T_{12} & -T_{13} & -T_{14} \\ -T_{21} & (1 - R_{22}) & -T_{23} & -T_{24} \\ -T_{31} & -T_{32} & (1 - R_{33}) & -T_{34} \\ -T_{41} & -T_{42} & -T_{43} & (1 - R_{44}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Au facteur e près, cette matrice peut être vue comme la matrice de conductance. Notons qu'en raison de la conservation du courant, la somme de chaque colonne et de chaque ligne est nulle.

Considérons maintenant que $I_1 = -I_3$ et que $I_2 = -I_4$. Cela nous donne, après calculs, la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_3 \\ \mu_2 - \mu_4 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

avec

$$\alpha_{11} = \frac{e}{\hbar} \frac{(1 - R_{11})S - (T_{14} + T_{12})(T_{41} + T_{21})}{S} \quad (1.28)$$

$$\alpha_{12} = \frac{e}{\hbar} \frac{(T_{12}T_{34} - T_{14}T_{32})}{S} \quad (1.29)$$

$$\alpha_{21} = \frac{e}{\hbar} \frac{(T_{21}T_{43} - T_{23}T_{41})}{S} \quad (1.30)$$

$$\alpha_{22} = \frac{e}{\hbar} \frac{(1 - R_{22})S - (T_{21} + T_{23})(T_{32} + T_{12})}{S} \quad (1.31)$$

$$(1.32)$$

où

$$S = T_{12} + T_{14} + T_{32} + T_{34} = T_{21} + T_{41} + T_{23} + T_{43} \quad (1.33)$$

(Ces deux sommes sont égales en raison de l'invariance par renversement du temps)

Quelle est alors la conductance mesurée dans le cas à quatre terminaux ? Supposons que le courant aille du réservoir 1 au réservoir 3. Les potentiels mesurés sont alors μ_2 et μ_4 , sous la condition que les courants 2 et 4 soient nuls. En injectant la condition $I_2 = 0$ dans la dernière matrice, on obtient facilement que

$$\frac{eI_1}{\mu_2 - \mu_4} = e \frac{(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})}{(\alpha_{21})} \quad (1.34)$$

Nous noterons ce quotient $G_{13,24}$. C'est la conductance mesurée aux bornes 2 et 4 lorsque le courant passe dans l'échantillon du réservoir 1 vers le réservoir 3.

On peut généraliser cette démarche et l'appliquer à n'importe quel couple de contacts, et l'exprimer ainsi :

$$G_{mn,kl} = \frac{e^2}{\hbar} \frac{(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})S}{(T_{km}T_{ln} - T_{kn}T_{lm})} = \frac{e^2}{\hbar} \frac{D}{(T_{km}T_{ln} - T_{kn}T_{lm})} \quad (1.35)$$

1.3.2 Cas à plusieurs modes

Considérons que tous les terminaux sont identiques et comportent chacun N modes. La matrice de diffusion de notre échantillon sera désormais une matrice $4N \times 4N$. Notons désormais $R_{ii,mn}$ la probabilité qu'un électron du terminal i dans le mode m soit réfléchi dans le mode n , et $T_{ij,mn}$ la probabilité qu'un électron du terminal i dans le mode m passe dans le terminal j dans le mode n . Ainsi, nous pouvons exprimer le courant du réservoir i vers le réservoir j

$$I_{ij} = -\frac{e}{h} \sum_{mn} T_{ij,mn} \mu_j \quad (1.36)$$

et le courant qui revient vers le réservoir i

$$I_{ii} = -\frac{e}{h} \sum_{mn} R_{ii,mn} \mu_i \quad (1.37)$$

La conservation du courant nous mène à écrire cette fois non plus $\sum_j I_{ij} = \frac{e}{h} \mu_i$ mais $\sum_j I_{ij} = \frac{e}{h} N \mu_i$.

Nous pouvons donc en conclure l'expression de I_i dans le cas à plusieurs modes[4] :

$$I_i = \frac{e}{h} \left((N - R_{ii}) \mu_i - \sum_{j \neq i} T_{ij} \mu_j \right) \quad (1.38)$$

en notant $\sum_{mn} R_{ii,mn} = R_{ii}$ et $\sum_{mn} T_{ij,mn} = T_{ij}$.

Chapitre 2

Approche de l'effet Hall quantique par le formalisme de Landauer

L'effet Hall quantique est un état remarquable de matière condensée, montrant une quantification de la conductance sous certaines conditions de température. Il a été mis en évidence expérimentalement par Von Klitzing en 1980. Nous allons dans ce chapitre l'aborder du point de vue des états de bord, ce qui nous permettra de mettre en application le formalisme de Landauer précédemment présenté, en nous inspirant des travaux de M. Buttiker[5].

2.1 Préambules

2.1.1 L'effet Hall classique

Considérons un champ magnétique uniforme B appliqué le long de l'axe z , orthogonalement à un gaz 2D d'électrons. L'effet Hall se manifeste lorsqu'on fait passer un courant selon x à travers l'échantillon.

Les électrons sont alors déviés de leur trajectoire initiale, perpendiculairement au champ et à la direction de propagation du courant. une différence de concentration de charges s'établit entre les bords opposés perpendiculairement au courant. Il en résulte une tension u_H entre les bords, et on définit la résistance de Hall par $R_H = \frac{u_H}{I}$.

$$R_H = \frac{B}{ne} \tag{2.1}$$

où n est la densité d'électrons.

2.1.2 Les niveaux de Landau

Reprenons l'échantillon décrit précédemment, avec le champ B orthogonal. Alors que la mécanique classique prédit qu'un électron décrira une trajectoire circulaire avec un rayon arbitraire, le rayon cyclotron ne peut avoir en mécanique quantique que des valeurs particulières : $R_C = l_B \sqrt{2n+1}$ où $l_B = \sqrt{\hbar/eB}$ est la longueur magnétique et n est un entier. La surface délimitée par la trajectoire d'un électron est donc un multiple de $s = 2\pi l_B^2$, que l'on peut associer au quantum de flux $\phi_0 = \frac{h}{e}$: le flux ϕ est égal à BS où S est la surface totale de l'échantillon, le produit de B et de la surface minimale nous donne $\phi_0 = B2\pi l_B^2 = \frac{h}{e}$, quantum de flux. Choisissons pour le champ B la jauge de Landau, soit $A = (-By, 0, 0)$. D'où l'hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2m} \left(\left(p_x - \frac{e}{c} By \right)^2 + p_y^2 \right) + V_{\text{confinement}}(y) \quad (2.2)$$

La fonction d'onde est séparable en une fonction de x (identique à celle d'une particule libre) et une fonction de y, d'où nous tirerons les énergies de Landau. On peut l'écrire $\psi_{j,k} = e^{ikx} f_j(y)$. L'équation aux valeurs propres pour f nous révèle que f est solution de l'équation d'un oscillateur harmonique centré en y_0 et d'énergie E_n tel que :

$$y_0 = \frac{p_x}{m\omega_C} \quad (2.3)$$

$$E_n = \hbar\omega_C \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.4)$$

où $\omega_C = \frac{eB}{m}$, pulsation cyclotron.

Les niveaux d'énergie sont quantifiés, ce sont les niveaux de Landau. En raison de la symétrie de translation, ils sont fortement dégénérés : l'énergie ne dépendant pas du centre de la trajectoire circulaire, la dégénérescence de ces niveaux vaut $N_B = \frac{\phi}{\phi_0} = \frac{S}{s}$, elle correspond au nombre de quanta de flux dans l'échantillon. On définit le facteur de remplissage des niveaux de Landau comme le rapport du nombre d'électrons dans l'échantillon sur le nombre d'états disponibles dans un niveau, ce qui nous donne $\nu = \frac{N_e}{N_B} = \frac{nh}{eB}$, où n est la densité électronique.

2.1.3 Présentation des résultats expérimentaux

Considérons un système où les électrons évoluent en deux dimensions -réalisé à une hétérojonction. On applique à ce système un fort champ magnétique orthogonal au plan. On s'attend à ce que la résistance varie linéairement avec B, dans le cadre de l'effet Hall classique. Or la présence de plateaux pour

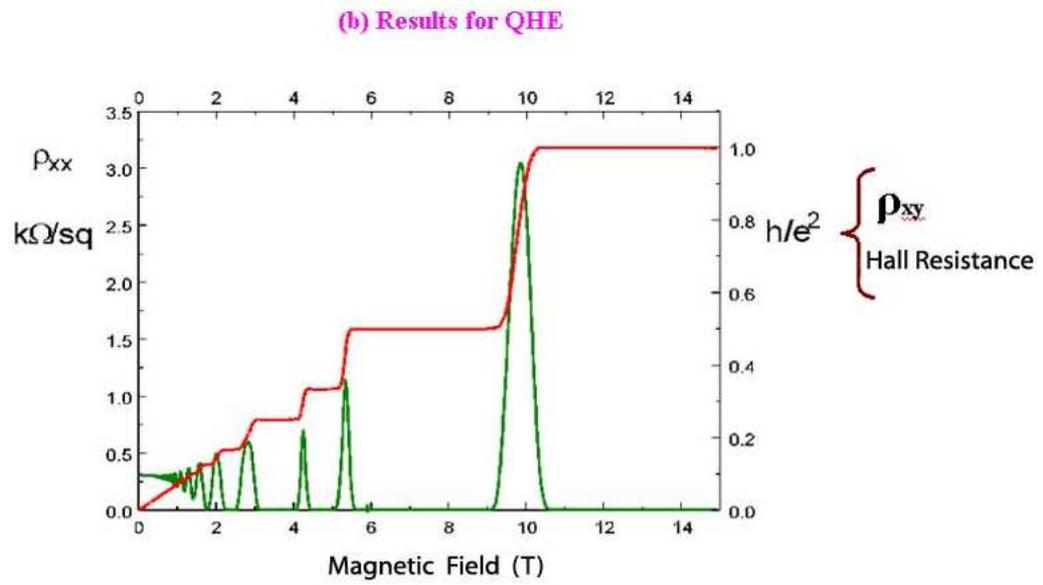


FIG. 2.1 – résultats expérimentaux de Von Klitzing. En rouge la résistance de Hall.

des valeurs entières de ν ($= \frac{nh}{eB}$) a été mise en évidence par Von Klitzing en 1980 (cf fig. 2.1).

Les plateaux obtenus correspondent à des valeurs entières de $\sigma_H = \frac{e^2}{h} \frac{1}{R_H}$, à une très grande précision. On observe également une conductance longitudinale nulle, sauf lors de la transition entre les plateaux, mais nous ne nous étendrons pas sur ce point.

ν entier est égal au nombre de niveaux de Landau exactement remplis. Si tous les états d'un niveau sont exactement remplis, il faut pour ajouter un électron apporter une énergie de $\hbar\omega_C$. Si les énergies thermiques et électriques sont faibles devant cette valeur, l'électron est piégé par les états localisés d'impuretés et ne participe pas au transport électronique. On observe donc un plateau pour la valeur de la résistance de Hall.

2.2 Introduction : résistance à deux terminaux

L'approche de Buttiker pour l'effet Hall quantique consiste à décrire le transport électronique par le formalisme de Landauer appliqué aux états de bord, description possible puisque l'introduction des états de bord dans l'étude de l'effet Hall permet de se ramener à une dimension, comme dans la section précédente. Commençons donc par présenter cette notion puis par réviser le cas simple de la conductance à deux terminaux pour un conducteur parfait, nous complexifierons ensuite progressivement le modèle pour arriver au cas adéquat à l'effet Hall.

2.2.1 Les états de bord

Reportons nous à l'équation (2.2), et considérons maintenant plus en détail l'effet du confinement. On s'aperçoit que les valeurs des énergies quantifiées augmentent près des bords : $E_{nk} = E_n + V(y_k)$, avec y_k correspondant à la position transverse. On retrouve $E_{nk} = \hbar\omega_C(n+1/2)$ lorsque l'on fait $V = 0$.

C'est alors que l'on peut montrer que les électrons acquièrent une vitesse longitudinale, de sens opposé sur chacun des bords. En effet,

$$v_{g,nk} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_{nk}}{dk} = \frac{1}{\hbar} \frac{dV}{dk} \quad (2.5)$$

et $\frac{dV}{dk}$ est nul partout sauf au voisinage aux bords de l'échantillon.

Le nombre d'états à l'énergie de Fermi est déterminé par l'équation $E_F = E_{nk}$. Lorsque l'énergie de Fermi se trouve entre deux niveaux de Landau, le nombre N de valeurs de k satisfaisant l'équation correspond au nombre d'états à l'énergie de Fermi (cf fig. 2.2).

Ainsi l'effet Hall quantique, c'est-à-dire l'apparition de plateaux pour les valeurs de la résistance transverse, peut également se traduire en termes

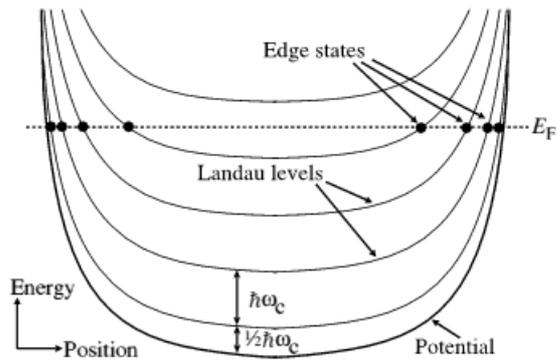


FIG. 2.2 – Spectre d'énergie d'un conducteur parfait dans un fort champ magnétique avec un potentiel de confinement. L'intersection des courbes des niveaux d'énergie avec l'énergie de Fermi correspond aux états de bords.



FIG. 2.3 – Chiralité des bords : les électrons d'un bord se déplacent dans un seul sens, opposé à celui de l'autre bord

d'états de bord : on a conduction seulement au bord de l'échantillon, et les bords sont chiraux (les électrons tournent dans le sens imposé par B, cf fig. 2.3). Le mouvement des électrons au bord peut se décomposer en un mouvement circulaire de pulsation ω_C et un mouvement linéaire de long des bords.

2.2.2 conducteur parfait

On connecte un conducteur parfait 2D à deux réservoirs. Partons du cas sans champ magnétique. On retrouve les calculs accomplis au chapitre précédent. Nous avons pour le courant :

$$I = \frac{e}{h} \Delta\mu \sum_i T_i, \quad (2.6)$$

où $\Delta\mu$ est la différence de potentiel entre les deux réservoirs. Ici il s'agit d'un conducteur parfait on a donc pour tout i $T_i = 1$, d'où :

$$I = \frac{e}{h} \Delta\mu N \quad (2.7)$$

où N est le nombre de modes.

Lorsqu'on ajoute un champ magnétique orthogonal, la conduction passe par les états de bord. On peut donc exprimer l'intensité passant à travers l'échantillon de la même manière que dans le cas (sans champ magnétique) à N modes i , à ceci près qu'il faut savoir que le courant est cette fois localisé aux bords et que le nombre de modes N est en fait le nombre d'états de bord, on a donc pour la résistance (inverse de la conductance) :

$$R = \frac{h}{e^2} \frac{1}{N} \quad (2.8)$$

Il est à noter que ceci n'est pas la résistance de Hall, mais la résistance à deux terminaux. Notons également que N dépend du champ magnétique, en effet plus on augmente celui-ci moins il y a de niveaux de Landau en-dessous de l'énergie de Fermi, et donc plus N est petit.

Ceci est bien sûr une situation idéale, sans impureté et donc sans diffusion.

2.2.3 conducteur avec diffusion élastique

Considérons désormais une région désordonnée, connectée de part et d'autre à des conducteurs parfaits à leur tour connectés à des réservoirs. Il faut cette fois prendre en considération les coefficients de transmission T_{ij} et de réflexion R_{ij} entre les modes i et j . On a :

$$R = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\sum_i T_i} \quad (2.9)$$

(cf chapitre précédent)

Cette expression est valide même en présence de champ magnétique : en effet, elle ne dépend pas de la nature des niveaux d'énergie considérés.

A faible champ magnétique, la présence d'impuretés et donc de diffusion a pour effet de "mélanger" les modes. L'expression de R trouvée précédemment n'est donc plus valable.

On retrouve en revanche cette expression en augmentant le champ magnétique : considérons en effet un électron à un bord, et une impureté présente dans cette région (on rappelle qu'à fort champ magnétique seule cette région est à considérer pour la conduction). La direction de propagation d'un électron dans un état de bord arrivant sur cette impureté restera inchangée : un électron venant de la droite doit ressortir en allant vers la droite, si ce n'était pas le cas et qu'il pouvait être diffusé vers la gauche (rétrodiffusion), cela signifierait qu'il aurait à franchir transversalement l'échantillon, ce qui est interdit par très grand gap entre les niveaux de Landau $\hbar\omega_C$ dans le volume (cf fig. 2.2). C'est cette propriété qui, selon Buttiker, est à l'origine de l'effet Hall quantique.

Tous les coefficients de réflexion sont donc nuls, et on a

$$T_i = \sum_j T_{ij} = 1 \quad (2.10)$$

On retrouve donc pour la résistance :

$$R = \frac{h}{e^2} \frac{1}{N} \quad (2.11)$$

Précisons également que la présence d'impuretés amène une levée de dégénérescence des niveaux de Landau : $E = E_n(\text{Landau}) + V(y_k)$ (potentiel de confinement, nul sauf aux bords) + $V_{\text{impuretés}}$. Cela a pour effet d'étaler les énergies autour du centre E_n , sans mener à une superposition des niveaux, pour les densités d'impuretés considérées (cf fig 2.4). Le graphe 2.2, même s'il n'est plus exact, demeure encore donc une bonne illustration du phénomène.

2.3 Résistance à quatre terminaux : résistance de Hall

Penchons-nous désormais sur le cas où l'échantillon est relié à quatre réservoirs via des contacts parfaits (pas de réflexion sur les réservoirs) : c'est la confi-

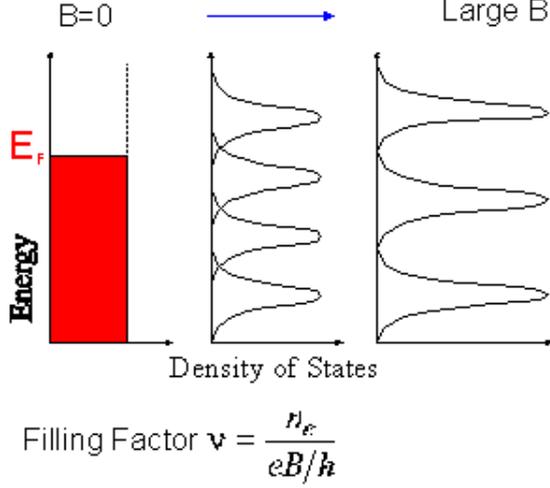


FIG. 2.4 – On voit ici la levée de dégénérescence des niveaux de Landau et leur étalement autour de la valeur originelle E_n . A fort champ B, il n’y a aucun recouvrement entre les niveaux.

guration des mesures expérimentales de la résistance de Hall, résistance transverse. On peut y appliquer les résultats (et les notations) du chapitre précédent, la résistance de Hall (tension transverse sur intensité) correspond à la résistance $R_{12,AB}$.

$$R_H = R_{12,AB} = \frac{h}{e^2} \frac{(T_{A1}T_{B2} - T_{A2}T_{B1})}{D} \quad (2.12)$$

Il faut maintenant dans cette expression injecter les conditions particulières imposées par la chiralité des bords, à savoir que :

$$T_{A1} = T_{2A} = T_{B2} = T_{1B} = N \quad (2.13)$$

du fait de la conservation du courant (N est le nombre d’états de bord), et que tous les autres coefficients de transmission sont nuls. Il n’y a pas non plus de réflexion. Ces simplifications de la matrice (1.26) nous font trouver que $D = N^3$, et que $(T_{A1}T_{B2} - T_{A2}T_{B1}) = N^2$. On a donc bien :

$$R_H = R_{12,AB} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{N} \quad (2.14)$$

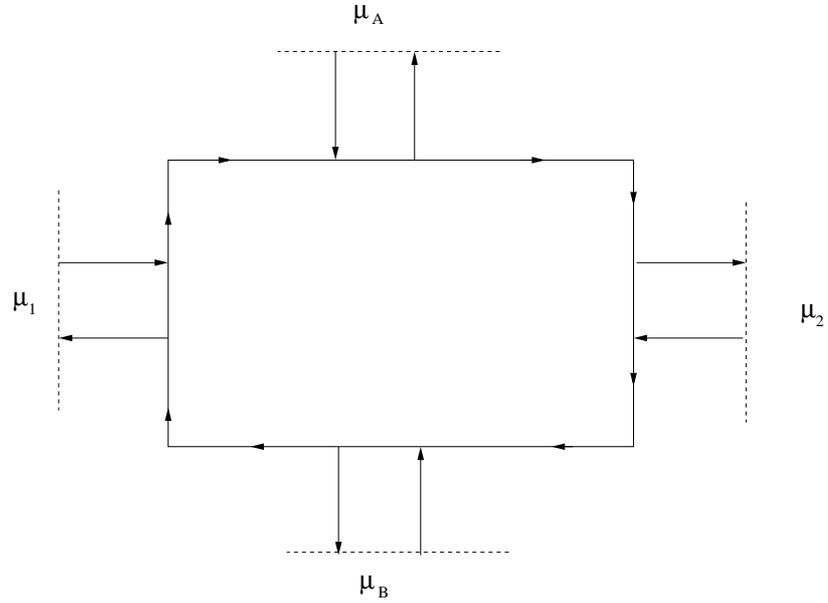


FIG. 2.5 – effet Hall quantique : configuration à quatre terminaux

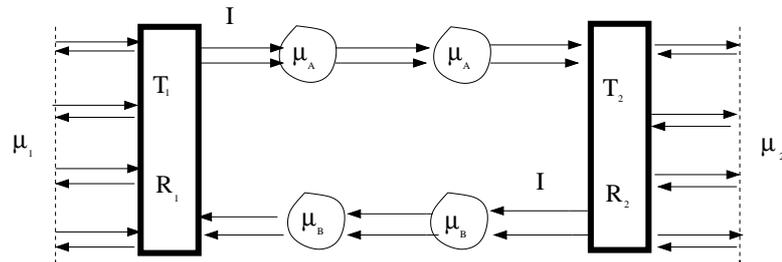


FIG. 2.6 – Conducteur avec contacts désordonnés

2.4 Contacts désordonnés

Revenons désormais à la configuration à deux terminaux. Nous allons nous pencher sur le cas où les contacts ne sont plus parfaits mais désordonnés, cas que le modèle à quatre terminaux de la section précédente va nous aider à mieux comprendre.

Pour les cas étudiés jusqu'à présent, les bords sont des équipotentiels, aux potentiels des réservoirs. Le bord du haut est au potentiel μ_1 (potentiel du réservoir de gauche), celui du bas au potentiel μ_2 (réservoir de droite). Cette situation est assez irréaliste.

Considérons donc maintenant que les contacts entre les réservoirs et les bords

ne sont plus des conducteurs parfaits, mais des régions désordonnées. Le contact de gauche a un coefficient total de transmission T_1 et un coefficient total de réflexion R_1 (T_2 et R_2 pour celui de droite). On peut donc résumer la situation au contact, à gauche par exemple, ainsi : On a un réservoir au potentiel μ_1 , où il y a M modes, un gaz d'électron en 2D à N états de bord, un électron dans le i ème mode du réservoir a une probabilité T_{ij} de passer dans le j ème état de bord. On a donc :

$$I = \frac{e}{h} T (\mu_1 - \mu_2) \quad (2.15)$$

avec $T = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M T_{ij}$.

Si $\sum_j T_{ij} < 1$, le mode i n'est pas complètement rempli. Le cas idéal, qui était en fait celui traité jusqu'à présent, est le cas où il se trouve dans le réservoir un grand nombre de M , on a alors $T = N$ ($\sum_{j=1}^M T_{ij} = 1$), et on retrouve l'expression de R que l'on a dérivée. Si au contraire $M \ll N$, on aura de la réflexion puisque tous les électrons des états de bord ne pourront se "loger", et une fraction des électrons du bord du haut pourront alors passer dans le bord du bas (et vice versa). un contact idéal est un contact sans réflexion entre le réservoir et le contact. Si c'est le cas, on a alors un contact désordonné.

Une fois dans les bords, l'équilibre, par diffusion inélastique, commence à se faire. Appelons μ_A le potentiel atteint par le bord supérieur, μ_B celui atteint par l'inférieur (cf fig. 2.6). Appelons R_1 le coefficient de réflexion du contact désordonné de gauche pour les électrons venant du réservoir, $T_1 (= \sum_{i,j} T_{1ij})$ le coefficient de transmission analogue, $R'_1 (= \sum_{i,j} R_{1ij})$ son coefficient de réflexion pour les électrons venant des états de bord, T'_1 le coefficient de transmission analogue. La conservation du courant et la microréversibilité nous impose $T_1 = T'_1$, $\sum_j T_{1ij} + \sum_j R_{1ij} = 1$, soit $T_1 + R_1 = N$, et de même $T_1 + R'_1 = N$. Même chose pour le contact désordonné de droite.

On peut de fait proposer à la place de la figure 2.6 un schéma équivalent, celui de la figure 2.5 qui nous ramène au formalisme de Landauer à quatre terminaux, pourvu que l'on considère que les contacts du haut et du bas (A et B) sont idéaux et que les contacts de droite et de gauche (1 et 2) sont désordonnés.

Il faut donc imposer les conditions particulières suivantes :

$-j_A^H = j_A^B$ et $j_B^H = j_B^B$ (comme dans le chapitre précédent), du fait de l'impossibilité pour les électrons de passer d'un bord à l'autre. Cela signifie que $I_A = 0$ et $I_B = 0$.

$-T_{12} = 0$ et $T_{21} = 0$ (les électrons ne passe pas de 1 à 2 et de 2 à 1 sans être préalablement "thermostatés" au potentiel μ_A ou μ_B)

$-T_{1A} = 0$, $T_{A1} = T_1$, $T_{2A} = T_2$ et $T_{A2} = 0$ (les électrons du bord du haut

vont tous vers la droite)

$-T_{2B} = 0$, $T_{B2} = T_2$, $T_{B1} = 0$ et $T_{1B} = T_1$ (les électrons du bord du bas vont tous vers la gauche)

$-T_{BA} = R_2$ et $T_{AB} = R_1$ (la seule possibilité pour un électron du haut d'aller en bas est d'être réfléchi sur le réservoir 2, et vice-versa)

$-R_{11} = R'_1 = M - T_1$, $R_{22} = R'_2 = M - T_2$ (M états dans les réservoirs de droite et de gauche)

$-R_{AA} = 0$, $R_{BB} = 0$ (pas de rétrodiffusion).

Le résultat du chapitre précédent

$$I_i = \frac{e}{h} ((N_i - R_i)\mu_i - \sum_{j \neq i} T_{ij}\mu_j) \quad (2.16)$$

nous donne ici :

$$I_1 = \frac{e}{h} (T_1\mu_1 - T_1\mu_B) \quad (2.17)$$

$$I_A = \frac{e}{h} (N\mu_A - T_1\mu_1 - R_1\mu_B) = 0 \quad (2.18)$$

$$I_2 = \frac{e}{h} (-T_2\mu_A + T_2\mu_2) \quad (2.19)$$

$$I_B = \frac{e}{h} (-R_2\mu_A - T_2\mu_2 + N\mu_B) = 0 \quad (2.20)$$

On retrouve donc, après calculs :

$$R_{12,AB} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{N} \quad (2.21)$$

d'où, la résistance de Hall correspondant à $R_{12,AB}$,

$$R_H = \frac{h}{e^2} \frac{1}{N} \quad (2.22)$$

Les deux derniers cas étudiés dans ce chapitre étaient pour le premier, une configuration à quatre terminaux où tous les contacts sont idéaux (transparents), pour le deuxième, une configuration à quatre terminaux où les contacts par lesquels passe le courant sont désordonnés et où ceux qui mesurent la tension sont idéaux. Notons en effet que l'on ne peut observer d'effet Hall quantique si les quatre contacts sont désordonnés : le courant injecté alors amène la population des états de bord hors équilibre, et de ce fait la résistance de Hall n'est plus quantifiée. Il faut donc nécessairement que les contacts mesurant la tension transverse soient idéaux.

Conclusion

Si la durée du stage ne nous a pas permis d'aborder en détail l'effet Hall quantique de spin, il nous est néanmoins possible d'en dire quelques mots, et de le relier à notre étude.

On retrouve dans l'effet Hall de spin une conduction localisée aux bords de l'échantillon, mais il y a cette fois dans chaque bord deux courants d'électrons, de vitesse et de spin opposés. Les bords ne sont plus, comme dans l'effet Hall quantique que nous avons traité, chiraux. La perspective de notre travail est donc celle d'une mise en oeuvre de l'approche développée -à savoir l'application du formalisme de Landauer aux états de bords- à cette configuration, pour questionner la possibilité de relier la résistance de Hall à la répartition de la population des spins, et ainsi d'accéder par la mesure de la résistance transverse à cette dernière.

Annexe A

Expression de la conductance intrinsèque dans le cas à plusieurs modes

Pour la calculer pratiquement, on part d'un fil relié à quatre réservoirs.

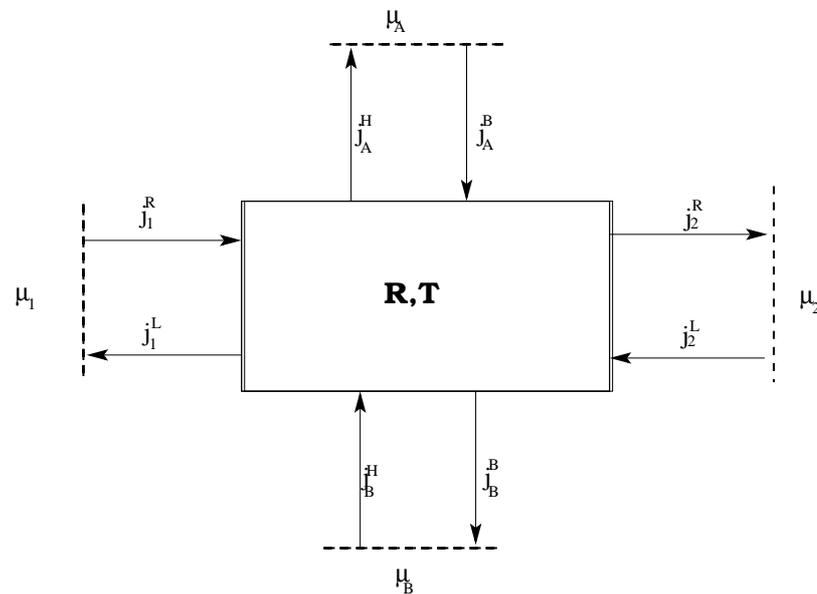


FIG. A.1 – configuration à quatre terminaux

R_{ij} est le coefficient de réflexion pour le courant du mode j vers le courant du mode i et T_{ij} est le coefficient de transmission pour le courant du mode j vers le courant de mode i . On note : $R_i = \sum_j R_{ij}$ et $T_i = \sum_j T_{ij}$. La

conservation du courant et l'invariance par renversement temps (unitarité de la matrice) implique $\sum_i T_i = \sum_i (1 - R_i)$ et $R_i + T_i' = 1$, $R_i' + T_i = 1$.

Le courant va de 1 à 2. La conductance s'exprime : $G = \frac{Ie}{\mu_A - \mu_B}$.

Cherchons tout d'abord à calculer l'intensité :

$$I = j_1^R - j_1^L = j_2^R - j_2^L = \sum_i j_{1i}^R - \sum_i j_{1i}^L = \sum_i j_{2i}^R - \sum_i j_{2i}^L \quad (\text{A.1})$$

car il faut désormais sommer sur tous les modes.

$$I = \sum_i \left(\sum_j T_{ij} j_{1j}^R + \sum_j R_{ij}' j_{2j}^L \right) - \sum_i j_{2i}^L \quad (\text{A.2})$$

Soit :

$$I = \sum_i \left(T_i j_{1i}^R - (1 - R_i') j_{2i}^L \right) = \sum_i T_i (j_{1i}^R - j_{2i}^L) \quad (\text{A.3})$$

Nous considérons que tous les électrons des différents modes arrivant sur l'échantillon depuis un réservoir sont caractérisés par un seul et même potentiel chimique, celui du réservoir en question. Cela semble une hypothèse raisonnable, dans la mesure où elle correspond à l'idée d'une force motrice dans l'échantillon fixée. Les courants j_{1i}^R (respectivement j_{2i}^L) sont donc identiques entre eux, et nous pouvons écrire en nous inspirant de (1.17) et de (1.18) :

Finalement :

$$I = \frac{e}{\pi\hbar} \int dE \sum_i T_i (f_1^R(E) - f_2^L(E)) \quad (\text{A.4})$$

Considérons maintenant la différence de potentiel entre les réservoirs A et B.

On définit μ_A et μ_B de sorte à ce que $n_A = n_1$ et $n_B = n_2$. Rappelons que :

$$n_1 = \frac{1}{e} \sum_i \left(\frac{j_{1i}^R}{v_i} + \frac{j_{1i}^L}{v_i} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$n_2 = \frac{1}{e} \sum_i \frac{j_{1i}^R + \sum_j (R_{ij} j_{1j}^R + T_{ij}' j_{2j}^L)}{v_i} \quad (\text{A.6})$$

où $v_i = \frac{\hbar k_i}{m}$. Au vu de l'hypothèse introduite précédemment (à savoir que les courants des différents modes venant d'un même réservoir sont identiques) nous pouvons sortir j_{1j}^R et j_{2j}^L de la somme sur j :

$$n_1 = \frac{1}{e} \sum_i \frac{(1+R_i)j_{1i}^R + T_i' j_{2i}^L}{v_i}$$

$$n_1 = \frac{1}{\pi\hbar} \int dE \sum_i \frac{(1+R_i)f_1^R(E) + T_i' f_2^L(E)}{v_i} \quad (\text{A.6})$$

De même,

$$n_2 = \frac{1}{\pi\hbar} \int dE \sum_i \frac{(1+R_i')f_2^L(E) + T_i f_1^R(E)}{v_i} \quad (\text{A.7})$$

Rappelons également (cf premier chapitre) que :

$$\mu_A - \mu_B = \frac{n_A - n_B}{2 \frac{dn}{dE}} = \frac{\pi\hbar(n_A - n_B)}{2 \sum_i (1/v_i)} \quad (\text{A.8})$$

On a donc, avec la condition $n_A = n_1$ et $n_B = n_2$ introduite préalablement :

$$\mu_A - \mu_B = \frac{1}{2 \sum_i \frac{1}{v_i}} \int dE \sum_i \frac{(1+R_i - T_i)(f_1^R - f_2^L)}{v_i} \quad (\text{A.9})$$

D'où l'expression de la conductance :

$$G = \frac{Ie}{(\mu_A - \mu_B)} = \frac{2e^2 \int dE \sum_i T_i (f_1^R(E) - f_2^L(E)) \sum_i \frac{1}{v_i}}{\int dE \sum_i \frac{(1+R_i - T_i)(f_1^R - f_2^L)}{v_i}} \quad (\text{A.10})$$

A température nulle $\int dE (f_1^R(E) - f_2^L(E)) = \mu_1 - \mu_2$, ce qui nous donne :

$$G = \frac{Ie}{(\mu_A - \mu_B)} = \frac{2e^2 \sum_i T_i \sum_i \frac{1}{v_i}}{\pi\hbar \sum_i \frac{(1+R_i - T_i)}{v_i}} \quad (\text{A.11})$$

On peut également retrouver cette expression par une autre méthode. Appelons j_A^H le courant allant vers le haut (du fil vers le réservoir A) et j_A^B le courant allant vers le bas (du réservoir A vers le fil), comme indiqué sur la figure ??èquedcond intrinsèque. De même pour le réservoir B.

La règle d'or de Fermi nous dit que la probabilité qu'un électron d'énergie i du réservoir passe dans le fil est la suivante : probabilité que le niveau i soit rempli dans le réservoir A \times coefficient de couplage réservoir/fil \times probabilité que le niveau i soit vide dans le fil.

D'où :

$$j_A^B = \frac{2e}{h} \int dE \sum_i f_A(E) |V_i(E)|^2 (1 - f_1^R(E) - f_1^L(E)) \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{2e}{h} \int dE \sum_i f_A(E) |V_i(E)|^2 (1 - f_2^R(E) - f_2^L(E)) \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{2e}{h} \int dE \sum_i f_A(E) |V_i(E)|^2 (1 - (1+R_i)f_1^R - T_i' f_2^L) \quad (\text{A.14})$$

où $|V_i(E)|^2$ correspond à la probabilité qu'a l'électron de mode i de passer dans le fil.

Si l'on applique le même raisonnement pour le courant du fil vers le réservoir A on obtient :

$$j_A^H = \frac{2e}{h} \int dE \sum_i (f_1^R(E) + f_1^L(E)) |V_i(E)|^2 (1 - f_A(E)) \quad (\text{A.15})$$

$$j_A^H = \frac{2e}{h} \int dE \sum_i (f_2^R(E) + f_2^L(E)) |V_i(E)|^2 (1 - f_A(E)) \quad (\text{A.16})$$

$$j_A^H = \frac{2e}{h} \int dE \sum_i (f_1^R(E)(1 + R_i) + T_i' f_2^L(E)) |V_i(E)|^2 (1 - f_A(E)) \quad (\text{A.17})$$

La condition qu'on impose au système est la suivante : on ajuste μ_1 de sorte à ce que le courant fil/réservoir A soit nul. On égale donc j_A^H et j_A^B , soit :

$$\int dE \sum_i f_A(E) |V_i(E)|^2 (1 - (1 + R_i) f_1^R - T_i' f_2^L) \quad (\text{A.18})$$

$$= \int dE \sum_i (f_1^R(E)(1 + R_i) + T_i' f_2^L(E)) |V_i(E)|^2 (1 - f_A(E)) \quad (\text{A.19})$$

Considérant que la variation de $|V_i(E)|^2$ avec E ou i est aléatoire, et que donc les effets en découlant tendent à se moyennner, on pose que $|V_i(E)|^2$ ne dépend ni de i ni de E . Cela nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \int dE \sum_i f_A(E) (1 - (1 + R_i) f_1^R - T_i' f_2^L) \\ &= \int dE \sum_i (f_1^R(E)(1 + R_i) + T_i' f_2^L(E)) (1 - f_A(E)) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Autrement dit

$$\int dE f_A(E) = \int dE \sum_i (f_1^R(E)(1 + R_i) + T_i' f_2^L(E)) \quad (\text{A.21})$$

Nous rappelons que $n_A = \frac{1}{\pi\hbar} \int dE \sum_i \frac{f_A(E)}{v_i}$, et trouvons que

$$n_A = \frac{1}{\pi\hbar} \int dE \sum_i \frac{(f_1^R(E)(1 + R_i) + T_i' f_2^L(E))}{v_i} \quad (\text{A.22})$$

On retrouve la condition imposée dans la méthode précédente $n_A = n_1$ (le même raisonnement nous amène également à $n_B = n_2$), ce qui nous donne ainsi l'expression de G (A.11).

Annexe B

Calcul des coefficients reliant les intensités aux différences de potentiel dans la configuration à quatre terminaux

Nous allons expliciter le calcul des coefficients α_{11} , α_{12} , α_{21} , α_{22} exposés précédemment. Nous allons partir pour cela de la relation (1.26). Elle nous donne :

$$I_1 + I_3 = \frac{e}{h} [(1 - R_{11} - T_{31})\mu_1 - (T_{12} + T_{32})\mu_2 + (1 - R_{33} - T_{13})\mu_3 - (T_{14} + T_{34})\mu_4] \quad (\text{B.1})$$

En ajoutant la condition $I_1 = -I_3$, cette somme devient nulle. En sachant de plus que la somme de chaque ligne de la matrice 1.26 est nulle (à cause de la conservation du courant), et que la matrice est symétrique (en raison de l'invariance par renversement du temps) nous trouvons :

$$(T_{12} + T_{14})\mu_1 - (T_{12} + T_{32})\mu_2 + (T_{32} + T_{34})\mu_3 - (T_{14} + T_{34})\mu_4 = 0 \quad (\text{B.2})$$

La condition $I_2 = -I_4$ nous donne le même résultat, si l'on tient bien compte de l'identité entre les coefficients T_{ij} et T_{ji} .

Cherchons maintenant à faire apparaître les différences de potentiel :

$$(T_{12} + T_{14})\mu_1 - (T_{12} + T_{32})\mu_2 + (T_{12} + T_{14} + T_{32} + T_{34})\mu_3 - (T_{12} + T_{14})\mu_4 - (T_{14} + T_{34} + T_{12} + T_{32})\mu_4 + (T_{12} + T_{32})\mu_4 = 0 \quad (\text{B.3})$$

Soit

$$S(\mu_3 - \mu_4) + (T_{12} + T_{14})(\mu_1 - \mu_3) - (T_{12} + T_{32})(\mu_2 - \mu_4) = 0 \quad (\text{B.4})$$

ou de même

$$(T_{12} + T_{14} + T_{32} + T_{34})\mu_1 - (T_{32} + T_{34})\mu_1 - (T_{12} + T_{32} + T_{14} + T_{34})\mu_2 + (T_{14} + T_{34})\mu_2 + (T_{32} + T_{34})\mu_3 - (T_{14} + T_{34})\mu_4 = 0 \quad (\text{B.5})$$

soit

$$S(\mu_1 - \mu_2) - (T_{32} + T_{34})(\mu_1 - \mu_3) + (T_{14} + T_{34})(\mu_2 - \mu_4) = 0 \quad (\text{B.6})$$

avec les notations du premier chapitre. On peut donc exprimer μ_2 et μ_4 de la sorte :

$$\mu_2 = \mu_1 - \frac{(T_{32} + T_{34})}{S}(\mu_1 - \mu_3) + \frac{(T_{14} + T_{34})}{S}(\mu_2 - \mu_4) \quad (\text{B.7})$$

$$\mu_4 = \mu_3 + \frac{(T_{12} + T_{14})}{S}(\mu_1 - \mu_3) - \frac{(T_{12} + T_{32})}{S}(\mu_2 - \mu_4) \quad (\text{B.8})$$

En injectant ces expressions dans celle de I_1 , et en prenant toujours en compte la symétrie de la matrice 1.26 et la nullité de la somme de chacune de ses lignes et de ses colonnes on a :

$$I_1 = \frac{e}{h} \left[(1 - R_{11})\mu_1 - T_{12}(\mu_1 - \frac{(T_{32} + T_{34})}{S}(\mu_1 - \mu_3) + \frac{(T_{14} + T_{34})}{S}(\mu_2 - \mu_4)) - T_{13}\mu_3 - T_{14}(\mu_3 + \frac{(T_{12} + T_{14})}{S}(\mu_1 - \mu_3) - \frac{(T_{12} + T_{32})}{S}(\mu_2 - \mu_4)) \right] \quad (\text{B.9})$$

$$I_1 = \frac{e}{h} \left[(1 - R_{11} - \frac{(T_{14} + T_{12})(T_{41}T_{21})}{S})(\mu_1 - \mu_3) - \frac{T_{12}T_{34} - T_{14}T_{32}}{S}(\mu_2 - \mu_4) \right] \quad (\text{B.10})$$

Ce qui s'écrit en utilisant les notations du premier chapitre :

$$I_1 = \alpha_{11}(\mu_1 - \mu_3) - \alpha_{12}(\mu_2 - \mu_4) \quad (\text{B.11})$$

On aboutit de même pour I_2 à :

$$I_2 = \frac{e}{h} \left[(1 - R_{22} - \frac{(T_{21} + T_{23})(T_{32}T_{12})}{S})(\mu_2 - \mu_4) - \frac{T_{21}T_{43} - T_{23}T_{41}}{S}(\mu_1 - \mu_3) \right] \quad (\text{B.12})$$

soit

$$I_2 = -\alpha_{21}(\mu_1 - \mu_3) + \alpha_{22}(\mu_2 - \mu_4) \quad (\text{B.13})$$

Bibliographie

- [1] *D.Carpentier*, cours de M2 de l'ENS Lyon.
- [2] *M.Buttiker, Y.Imry, R.Landauer, S.Pinhas*, Generalized many-channel conductance formula with application to small rings, *phys. rev. B* 31, 6207 (1985).
- [3] *Y.Imry*, Introduction to mesoscopic physics 2nd edition, Oxford University Press.
- [4] *M.Buttiker*, Four-terminal phase-coherent conductance, *phys. rev. lett.* 57, 1761 (1986).
- [5] *M.Buttiker*, Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors, *phys. rev. B* 38, 9375 (1988)
- [6] *M.Buttiker*, Transmission probabilities and the quantum hall effect, *phys. rev. lett* 62 (1989)
- [7] *D.Carpentier*, L'effet Hall quantique : quelques aspects, rapport de stage.
- [8] *A. Douglas Stone, A. Szafer*, What is measured when you measure a resistance? -the Landauer formula revisited, *IBM j. res. develop.* 32 (1988)
- [9] *C.L. Kane, E.J.Mele*, Quantum spin hall effect in graphene, *phys. rev. lett.* 95, 226801 (2005).
- [10] 10) *B.Giovannini*, cours de physique du solide avancée, unpublished (2001/2002).
- [11] 11) *S.M.Girvin*, The quantum Hall effect, novel excitations and broken symmetries, Les Houches EDP Sciences, Springer-Verlag (1999)