Fermions unidimensionnels :
Deuxième partie : Intégrale Fonctionnelle :

(TD de Théorie des champs quantiques, Master ENS Lyon 2ème année)

D. Carpentier

Le but de ce TD est de rappeler le formalisme de seconde quantification, et de montrer son utilité dans la description des systèmes électroniques unidimensionnels. Cette première partie est aussi l'occasion de découvrir la notion de bosonisation des fermions en dimension 1. La seconde partie s'intéresse à ce modèle de fermions unidimensionnels par l'intégrale de chemin, après avoir rappelé les bases de ce formalisme.

I. L'INTÉGRALE FONCTIONNELLE

A. Etats cohérents bosoniques

1. Montrer que l'état

$$|\phi\rangle = \exp\left(\sum_i \phi_i a_i^\dagger\right)|0\rangle, \tag{1}$$

est un état propre des opérateurs d'annihilation a_i de l'espace de Fock considéré. Dans cette expression, les $\{\phi_i\}_i$ sont un ensemble de nombres complexes caractérisant l'état $|\phi\rangle$ considéré.

2. Montrer que les opérateurs de création de l'espace de Fock considéré agisse sur l'état $|\phi\rangle$ ci-dessus selon

$$a_i^\dagger|\phi\rangle = \frac{\partial}{\partial\phi_i}|\phi\rangle \tag{2}$$

3. Montrer que le recouvrement entre deux états cohérents $|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$ s'exprime selon

$$\langle\psi|\phi\rangle = \exp\left(\sum_i \overline{\psi}\phi_i\right) \tag{3}$$

4. Montrer que l'ensemble des états cohérents forment une base complète de l'espace de Fock :

$$\int \prod_i \frac{d\phi_i d\overline{\phi_i}}{\pi} \exp\left(-\sum_i \overline{\phi_i}\phi_i\right)|\phi\rangle\langle\phi| = Id. \tag{4}$$

Indications : il est utile de remarquer que l'opérateur ci-dessus commute avec tous les opérateurs de création et d'annihilation de $\mathcal{F}$. Ceci nous prouve, d'après le lemme de Schur, la proportionnalité de cet opérateur avec l'identité. Il ne reste plus qu'à déterminer le coefficient de proportionnalité.

B. Etats cohérents fermioniques

5. On cherche à définir l'analogue de l'état cohérent (1) pour des fermions. Montrer que si un tel état $|\psi\rangle$ vérifie la relation $a_i|\psi\rangle = \psi_i|\psi\rangle$, alors les valeurs propres ψ_i anticommutent entre elles.

De telles variables anticommutantes s'appellent des *variables de Grassmann*. L'intégration par rapport à de telles variables se définit simplement par les règles

$$\int d\psi_i = 0 \quad ; \quad \int d\psi_i\psi_i = 1. \tag{5}$$

On vérifie aisément que cette intégration correspond également à la différentiation usuelle $\partial_{\psi_i}\psi_j = \delta_{ij}$.

Muni de ces variables de Grassmann, nous pouvons maintenant définit notre état cohérent fermionique :

$$|\psi\rangle = \exp\left(-\sum_i \psi_i a_i^\dagger\right)|0\rangle, \quad \langle\psi| = \langle 0|\exp\left(-\sum_i a_i\overline{\psi_i}\right), \tag{6}$$

où les $\{\psi_i\}_i$ constituent un ensemble de variables de Grassmann caractérisant l'état cohérent. On remarquera que les variables $\overline{\psi_i}$ qui apparaissent dans la définition de $\langle\psi|$ ne sont pas les complexes conjugués des ψ_i !

6. Montrer que

$$a_i^\dagger|\psi\rangle = -\partial_{\psi_i}|\psi\rangle \tag{7}$$

7. Montrer la relation de fermeture

$$\int \prod_i d\psi_i d\overline{\psi_i}\ \exp\left(-\sum_i \overline{\psi_i}\psi_i\right)|\psi\rangle\langle\psi| = Id. \tag{8}$$

A partir d'ici, nous introduisons la notation $\eta = +1$ pour les bosons, et $\eta = -1$ pour les fermions. De plus, la mesure d'intégration dépendra de la statistique des particules :

$$\int d(\overline{\phi},\phi) = \int \frac{d\phi_i d\overline{\phi_i}}{\pi} \text{ pour les bosons} \tag{9}$$

et

$$\int d(\overline{\psi},\psi) = \int d\psi_i d\overline{\psi_i} \text{ pour les fermions.} \tag{10}$$

C. Intégrale fonctionnelle

Nous allons construire explicitement la représentation de la fonction de partition sous forme d'intégrale fonctionnelle. Celle des différentes fonctions de corrélation s'en déduira aisément. Nous considérons donc la fonction de partition Z associé à un problème bosonique ou fermionique décrit par un hamiltonien H. Cette fonction de partition s'écrit par définition :

$$Z = \mathrm{Tr} e^{-\beta(H-\mu N)} = \sum_n \langle n|e^{-\beta(H-\mu N)}|n\rangle \tag{11}$$

où l'ensemble des états $|n\rangle$ constitue une base de l'espace de Fock.

8. Montrer que cette fonction de partition peut se réécrire sous la forme

$$Z = \int d(\overline{\psi},\psi) e^{-\sum_i \overline{\psi}_i\psi_i}\langle\eta\psi|e^{-\beta(H-\mu N)}\ |\psi\rangle. \tag{12}$$

On utilisera pour cela la règle de commutation pour les fermions $\langle n|\psi\rangle\langle\psi|n\rangle = \langle-\psi|n\rangle\langle n|\psi\rangle$ avec $\langle-\psi| = \exp - \sum_i \overline{\psi}a_i$.

9. Nous procédons ensuite de façon identique à l'intégrale de chemin en mécanique quantique : l'intervalle $0,\beta$ est découpé en N intervalle de longueur β/N; et entre deux intervalles, nous introduisons une relation de fermeture d'états cohérents. Montrer que la fonction de partition s'écrit alors

$$Z = \int \prod_{n=0}^{N} d(\overline{\psi}^n,\psi^n)\exp -\frac{\beta}{N}\left(\sum_{n=0}^{N-1}\frac{N}{\beta}(\overline{\psi}^n - \overline{\psi}^{n+1})\psi^n + \frac{\langle\psi^{n+1}|H-\mu N|\psi^n\rangle}{\langle\psi^{n+1}|\psi^n\rangle}\right). \tag{13}$$

10. Prenons la limite continue $N\to\infty$. Montrer que l'expression finale de la fonction de partition devient alors

$$Z = \int D(\overline{\psi},\psi)\exp -S(\overline{\psi},\psi) \text{ avec } S(\overline{\psi},\psi) = \int_0^\beta d\tau\ \overline{\psi}\partial_\tau\psi + \frac{\langle\psi|H-\mu N|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}. \tag{14}$$

D. Interactions et bosonisation en dimension 1

1. Fermions libres

Nous considérons ici le modèle simple d'un ensemble de fermions en dimensions 1. Les degrés de libertés pertinents sont les fermions (ou excitations particule-trou) autour de la surface de Fermi $|E-E_F| \ll E_F$. Cela revient à considérer les fermions droits ou gauche :

$$\psi_R^\dagger(q) = \psi^\dagger_{+k_F+q} \text{ et } \psi_L^\dagger(q) = \psi^\dagger_{-k_F+q} \text{ avec } |q| \ll k_F. \tag{15}$$

11. Montrer que l'action du modèle s'écrit

$$S_0[\psi^\dagger,\psi] = \sum_{\alpha=R,L} \int dx d\tau\ \psi_\alpha^\dagger(-i\alpha v_F \partial_x + \partial_\tau)\psi_\alpha. \tag{16}$$

12. Les matrices de Pauli constituent une représentation des matrices de Dirac γ_μ ($[\gamma_\mu,\gamma_\nu] = 2\delta_{\mu\nu}$) en dimension 2, avec la définition

$$\gamma_0 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

et $\sigma_0 = Id$. Montrer qu'avec cette convention, l'action (16) prend la forme d'une action de Dirac

$$S_0 = v_F \int d^2x\ \bar\psi(\sigma_1\partial_{x_0} + \sigma_2\partial_{x_1})\psi \tag{18}$$

avec $\psi = (\psi_R,\psi_L), \bar\psi = \psi^\dagger\sigma_1$ et $x_0 = \tau/v_F$. Les fermions droits et gauches constituent un ensemble de fermions de Dirac (relativistes).

13. Montrer que la transformation $\psi \to e^{i\phi_v}\psi$ est une symétrie de l'action, dont le courant de Noether est

$$j_\mu = \bar\psi\gamma_\mu\psi = (\rho, ij) \tag{19}$$

où $\rho = \rho_R + \rho_L = \psi_R^\dagger\psi_R + \psi_L^\dagger\psi_L$ est la densité de fermions, et $j = v_F(\rho_R - \rho_L)$ le courant de particules.

14. Montrer que la transformation $\psi \to e^{i\phi\sigma_3}\psi, \bar\psi \to e^{i\phi\sigma_3}\bar\psi$ est une symétrie de l'action, dont le courant de Noether est

$$j_\mu = \epsilon_{\mu\nu}\bar\psi\sigma_\nu\psi. \tag{20}$$

En déduire que les densité de fermions droits et gauches sont conservées indépendamment.

2. Bosons libres

On considère des opérateurs bosoniques $b(x)$ et $b^\dagger(x)$.

15. Montre que le changement de variables suivant, en des opérateurs de charge ρ et de phase ϕ

$$b(x) = \left(\frac{k_F}{\pi} + \rho(x)\right)^{1/2} e^{i\phi(x)}, \quad b^\dagger(x) = \left(\frac{k_F}{\pi} + \rho(x)\right)^{1/2} e^{-i\phi(x)} \tag{21}$$

implique que ces nouvelles variables bosoniques sont conjuguées

$$[\rho(x), \phi(x')] = i\delta(x-x'). \tag{22}$$

16. En définissant $\theta(x) = \pi \int_{-\infty}^{x} dx' \rho(x')$, montrer que
$$[\phi(x), \theta(x')] = i\pi\Theta(x' - x) \tag{23}$$
où Θ est la fonction de Heaviside.
En fonction de cette nouvelle variable θ, l'action (lagrangienne) des bosons libres s'exprime selon[1] :
$$S[\theta] = \frac{1}{2\pi} \int dx d\tau ((\partial_x \theta)^2 + (\partial_\tau \theta)^2). \tag{24}$$

17. Montrer que le moment canonique conjugué de θ est
$$\pi_\theta = \frac{1}{\pi} \partial_\tau \phi. \tag{25}$$
En déduire que la densité hamiltonienne s'écrit
$$H = \frac{1}{2\pi} \left((\partial_x \theta)^2 + \pi^2 \pi_\theta^2 \right) \tag{26}$$
et que l'action correspondante vaut
$$S[\theta, \phi] = \frac{1}{2\pi} \int dx d\tau \left[(\partial_x \theta)^2 + (\partial_x \phi)^2 + 2i \partial_\tau \theta \partial_x \phi \right]. \tag{27}$$

3. Bosonisation

On se propose d'écrire les opérateurs fermioniques sous la forme
$$c^\dagger(x) = \Gamma \sum_\alpha e^{i\alpha \frac{1}{\pi}(k_F x + \theta(x))} e^{i\phi(x)}. \tag{28}$$

18. Montrer que ces opérateurs satisfont une statistique fermionique.
19. Déduire de l'écriture ci-dessus que les opérateurs droits et gauche correspondants vérifient
$$c_\alpha^\dagger(x) = \Gamma e^{i\alpha \frac{1}{\pi} \theta(x)} e^{i\phi(x)}. \tag{29}$$
20. Montrer que la symétrie précédente du problème $\phi \to \phi + \phi_v$ nous permet d'écrire
$$\rho_R = \frac{1}{2\pi} (\partial_x \theta - \partial_x \phi) \text{ et } \rho_L = \frac{1}{2\pi} (\partial_x \theta + \partial_x \phi). \tag{30}$$
21. Nous considérons maintenant la partie d'interaction de ces fermions droits et gauches, qui peut s'écrire sous la forme
$$S_{int}[\psi^\dagger, \psi] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=R,L} \int dx d\tau \; (g_2 \rho_\alpha \rho_{-\alpha} + g_4 \rho_\alpha \rho_\alpha) \text{ avec } \rho_\alpha = \psi_\alpha^\dagger \psi_\alpha. \tag{31}$$
A l'aide de (30), réécrire l'action du modèle de fermions en interaction sous la forme
$$S[\theta, \phi] = \frac{1}{2\pi} \int dx d\tau \left[\frac{1}{g} v (\partial_x \theta)^2 + g v (\partial_x \phi)^2 + 2i \partial_\tau \theta \partial_x \phi \right], \tag{32}$$
avec
$$v = \left(\left(v_F + \frac{g_4}{2\pi} \right)^2 - \left(\frac{g_2}{2\pi} \right) \right)^{1/2} \text{ et } g = \left(\frac{v_F + (g_4 - g_2)/(2\pi)}{v_F + (g_4 + g_2)/(2\pi)} \right)^{1/2}. \tag{33}$$
Nous venons de transformer un problème de fermions en interaction en un modèle (quadratique) de bosons libres.

---

[1] Nous nous attendons à ce que l'énergie de ces bosons soit d'ordre ρ^2. Or d'après la formulation ci-dessus, $\rho \simeq \partial_x \theta / \pi$. L'invariance par rotation dans l'espace $(x, v_F \tau)$ implique la forme proposée pour l'action bosonique lagrangienne.