Courants et Charges de Noether

(TD de Théorie des champs quantiques, Master ENS Lyon 2ème année)

D. Carpentier / F. Delduc

I. LA PARTICULE CLASSIQUE CHARGÉE EN PRÉSENCE D'UN CHAMP TRANSVERSE $\vec{B}$

On considère une particule de masse m et de charge e, dans un espace à deux dimensions x_1 et x_2. Cette particule est soumise à un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et orthogonal au plan. Ses coordonnées à l'instant t sont notées $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$. L'action qui décrit l'évolution de cette particule s'écrit selon

$$S[\vec{x}] = \int dt \, \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 + e\vec{A}(\vec{x}).\frac{d\vec{x}}{dt} \right). \tag{1}$$

$\vec{A}(\vec{x})$ désigne le potentiel vecteur électromagnétique, qui satisfait aux conditions

$$\partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ij} B \text{ avec } \epsilon = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\partial_i B = 0 \tag{3}$$

1. Montrer que la théorie est invariante de jauge, c'est-à-dire que ses équations du mouvement sont inchangées sous la transformation du potentiel vecteur

$$\vec{A}(\vec{x}) \to \vec{A}'(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x}) + \vec{\nabla}\alpha(\vec{x}), \tag{4}$$

   où $\alpha(\vec{x})$ est une fonction quelconque (régulière).

2. Exprimer en fonction de la vitesse la variable conjuguée $\vec{p}$ de la position $\vec{x}$. Etablir ensuite l'expression du hamiltonien de la particule.

3. Montrer que le problème considéré est invariant par translation dans l'espace :

$$t \to t' = t \text{ et } \vec{x}(t) \to \vec{x}'(t) = \vec{x}(t) - \vec{a} \tag{5}$$

   Indications : il est conseillé de ne vérifier cette invariance que pour des translations infinitésimales. Pour l'étude des translations finies, il est possible d'introduire le vecteur $\vec{C}(\vec{x}, \vec{a})$ dont les composantes s'écrivent

$$C_i(\vec{x}, \vec{a}) = \int_0^1 du \; A_i(\vec{x} - u\vec{a}), \tag{6}$$

   et qui satisfait aux équations

$$-a_i \partial_i C_j(\vec{x}, \vec{a}) = A_j(\vec{x} - \vec{a}) - A_j(\vec{x}), \quad \partial_i C_j - \partial_j C_i = \epsilon_{ij} B. \tag{7}$$

4. Quelles sont les charges conservées P_1, P_2 associées à la symétrie de translation ? Calculer leur crochet de Poisson. Quel commentaire ce résultat vous inspire-t-il ?

5. Il est possible de changer de variables d'espace des phases : au lieu des x_i, p_i, nous utiliserons les variables complexes

$$a = \frac{1}{\sqrt{2eB}} \left((p_1 - eA_1(\vec{x})) - i(p_2 - eA_2(\vec{x})) \right), \quad b = \frac{1}{\sqrt{2eB}} \left(P_1 - iP_2 \right), \tag{8}$$

   et leurs complexes conjugués. Exprimer le Hamiltonien en fonction de ces nouvelles variables. Déterminer les crochets de Poisson des variables a, b, a^*, b^* entre elles, et avec le Hamiltonien H.

6. Discuter la quantification de ce système. Sans effectuer de calcul, montrer comment construire une base d'états propres du Hamiltonien. Les niveaux d'énergies correspondants sont appelés les niveaux de Landau.

II. LA PARTICULE LIBRE EN 3D : CAS QUANTIQUE

On considère, dans cet exercice, la théorie quantique d'une particule de masse m dans un espace de dimension 3. La fonction d'onde $\Psi(\vec{x},t)$ décrivant l'état de cette particule, satisfait à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t\Psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_i\partial_i\Psi(\vec{x},t). \tag{9}$$

1. Montrer que cette équation peut être obtenue à partir de l'action suivante[1]

$$S[\Psi,\overline{\Psi}] = \int dtd^3x\mathcal{L}(\Psi,\overline{\Psi},\partial\Psi,\partial\overline{\Psi}) \tag{10}$$
$$= \int dtd^3x\left(i\hbar\overline{\Psi}\partial_t\Psi - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_i\overline{\Psi}\partial_i\Psi\right) \tag{11}$$

en utilisant le principe de moindre action. Comme dans le cas des fonctions de variables complexes, on considèrera que Ψ et $\overline{\Psi}$ sont des variables indépendantes lors de la dérivation des équations du mouvement.

2. A partir d'ici, nous choisirons la convention $\hbar = 1$. Nous admettrons aussi que l'espace des phases du système considéré est constitué des fonctions d'onde $\Psi(\vec{x},t)$ et des fonctions canoniquement conjuguées $i\overline{\Psi}(\vec{x},t)$. Celles-ci vérifient les relations

$$\{\Psi(\vec{x},t),\Psi(\vec{y},t)\} = 0 \tag{12}$$
$$\left\{\Psi(\vec{x},t),i\overline{\Psi}(\vec{y},t)\right\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \tag{13}$$

Donner l'expression du Hamiltonien

$$H[\Psi,\overline{\Psi}] = \int d^3x\left(i\overline{\Psi}(\vec{x},t)\partial_t\Psi(\vec{x},t) - \mathcal{L}\right). \tag{14}$$

Nous allons maintenant étudier quelques symétries du modèle.

3. **Symétrie interne**. On considère les transformations suivantes

$$\Psi(\vec{x},t) \to \Psi'(\vec{x},t) = e^{i\alpha}\Psi(\vec{x},t) \tag{15}$$
$$\overline{\Psi}(\vec{x},t) \to \overline{\Psi}'(\vec{x},t) = e^{-i\alpha}\overline{\Psi}(\vec{x},t), \tag{16}$$

où α est un paramètre réel global. Montrer que cette transformation correspond à une symétrie de l'action (10). Donner l'expression du courant de Noether et de la charge conservée Q correspondante. Quelle est l'interprétation physique de cette charge ?

4. **Symétries géométriques**
   (a) Montrer que les quantitées

$$P_i = i\int d^3x\overline{\Psi}\partial_i\Psi, i = 1,2,3 \tag{17}$$

   sont des quantités conservées.

   (b) Changement de référentiel galiléen. Nous considérons la transformation suivante :

$$t \to t' = t, \tag{18}$$
$$x_i \to x'_i = x_i + v_it, i = 1,2,3. \tag{19}$$

   Les v_i sont des paramètres globaux. La transformation des champs associée s'exprime selon

$$\Psi(\vec{x},t) \to \Psi'(\vec{x}',t') = e^{i(\frac{1}{2}mv^2t+m\vec{v}.\vec{x})}\Psi(\vec{x},t), \tag{20}$$
$$\overline{\Psi}(\vec{x},t) \to \overline{\Psi}'(\vec{x}',t') = e^{-i(\frac{1}{2}mv^2t+m\vec{v}.\vec{x})}\overline{\Psi}(\vec{x},t). \tag{21}$$

[1] Les sceptiques et les pointilleux vérifieront que la partie imaginaire de $\mathcal{S}$ est une dérivée totale par rapport au temps t, et ne joue donc aucun rôle dans la détermination des équations du mouvement de la particule.

i. Montrer que ces transformations sont des symétries de l'action (10). Vérifier que les quantités

$$G_i = tP_i + m \int d^3x \overline{\Psi} \Psi x_i \tag{22}$$

sont des charges conservées.

ii. Montrer que les crochets de Poisson $\{\vec{v}.\vec{G}, \Psi\}$ et $\{\vec{v}.\vec{G}, \overline{\Psi}\}$ génèrent les variations des champs sous un changement infinitésimal de référentiel.

iii. Calculer le crochet de Poisson $\{\vec{a}.\vec{P}, \vec{v}.\vec{G}\}$.

iv. Nous nous intéressons maintenant à la composition d'une translation d'espace de paramètre fini $\vec{a}$ et d'un changement de référentiel galiléen de paramètre fini $\vec{v}$. Vérifier que le point d'espace-temps obtenu ne dépend pas de l'ordre de composition des transformations. Comparer les champs obtenus par applications de ces transformations dans un ordre, puis dans l'autre. Quel est le lien entre ce résultat et le crochet de Poisson calculé ci-dessus ?