Diffusion et Calcul perturbatif

(TD de Théorie des champs quantiques, Master ENS Lyon 2ème année)

D. Carpentier / F. Delduc

Nous utilisons les conventions de notation $\vec{p}$ pour le vecteur impulsion, et p pour le quadri-vecteur.

Rappels: Les propriétés de diffusion associées à une interaction entre particules données sont contenues dans la matrice de diffusion S. L'amplitude de transition entre états asymptotiques entrants et sortants s'écrit

$$_{out}\langle p_1, p_2, ... \, |q_1, q_2\rangle_{in} = {}_{in}\langle p_1, p_2, ... \, |S|q_1, q_2\rangle_{in}. \tag{1}$$

On sépare habituellement la partie triviale de S en écrivant $S = 1 + iT$. Les éléments de matrice de T s'écrivent alors :

$$_{in}\langle p_1, p_2, ... \, |T|q_1, q_2\rangle_{in} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - \sum_i p_i) \mathcal{M}_{p_1, p_2, ... \leftarrow \, q_1, q_2}. \tag{2}$$

I. DIFFUSION QUANTIQUE RELATIVISTE

Le but de cette première partie est de relier la section efficace différentielle $d\sigma_{\beta\leftarrow\alpha}$ aux éléments $\mathcal{M}_{p_1, p_2, ... \leftarrow \, q_1, q_2}$ de la matrice de diffusion S (les amplitudes de transition).

On considère, par simplification, que l'interaction entre les particules incidentes se passe dans une région finie de l'espace, de volume $V = L^3$, et pendant un temps T. L'intérêt de cette simplification est qu'elle régularise les fonctions δ : les seules impulsions autorisées sont les $\vec{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)$, et l'on peut écrire

$$\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \to \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\vec{p}, \vec{q}} \quad ; \quad \delta(E - E') \to \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} dt \exp\left(i(E - E')t\right). \tag{3}$$

La normalisation des états à N particules *distinctes* $\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2, ... \vec{q}_N | \vec{p}_1, \vec{p}_2, ... \vec{p}_N\rangle = \delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{p}_1) ... \delta^{(3)}(\vec{q}_N - \vec{p}_N)$, devient dans cette boite finie : $\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2, ... \vec{q}_N | \vec{p}_1, \vec{p}_2, ... \vec{p}_N\rangle_V = \delta_{\vec{q}_1, \vec{p}_1} ... \delta_{\vec{q}_N, \vec{p}_N}$, ce qui impose la correspondance

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2, ... \vec{p}_N\rangle \to \left(\frac{V}{(2\pi)^3}\right)^{N/2} |\vec{p}_1, \vec{p}_2, ... \vec{p}_N\rangle_V \tag{4}$$

1. Exprimez en fonction de $S_{\alpha\beta}$ la probabilité $P_{\alpha\to\beta}$ qu'un état entrant $|\alpha\rangle = |\vec{p}_1, \vec{p}_2, ... \vec{p}_N\rangle_V$ dans la boite en ressorte en un état $|\beta\rangle = |\vec{q}_1, \vec{q}_2, ... \vec{q}_M\rangle_V$
2. En déduire la probabilité $dP_{\alpha\to\beta}$ que cet état $|\alpha\rangle$ ressorte en un état contenu dans un volume $d^3\vec{q}_1 ... d^3\vec{q}_M$ autour de $|\beta\rangle$.
3. En déduire l'expression de $dP_{\alpha\to\beta}$ en fonction de $\mathcal{M}_{\alpha\to\beta}$.
4. L'interaction n'existant que pendant la durée T, le taux de transition entre les états $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ s'exprime simplement comme

$$d\Gamma_{\alpha\to\beta} = dP_{\alpha\to\beta}/T \tag{5}$$

   On préfère souvent considérer la section efficace associée, qui est le taux de transition par unité de flux de particules incidentes. Ce flux s'exprime comme $v_\alpha V^{-1}$ (densité de particules incidentes par unité de temps). Dans le cas d'un flux incident à deux particules, la vitesse du flux v_α qui intervient dans cette expression est

$$v_\alpha = \frac{\sqrt{(p_1.p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2} \tag{6}$$

   Montrer que dans le cas où $|\alpha\rangle = |p_1, p_2\rangle$ et $|\beta\rangle = |q_1, q_2\rangle$ sont des états à 2 particules, l'expression de cette section efficace se simplifie selon ($E = E_1 + E_2$)

$$d\sigma_{\alpha\to\beta} = d\Omega (2\pi)^{10} \frac{q E_1' E_2' E_1 E_2}{(E_1 + E_2)^2} |\mathcal{M}_{\alpha\to\beta}|^2, \text{ avec } q = \frac{\sqrt{((E^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}}{2E} \tag{7}$$

   où $d\Omega$ est le différentiel d'angle solide autour de $\vec{q}_1$.

II. APPROCHE PERTURBATIVE D'UN MODÈLE SIMPLE

On se propose maintenant de calculer perturbativement l'amplitude de transition dans un cas simple. On considère pour cela un modèle jouet (mini-QED en quelque sorte) constitué d'un champ complexe φ, $\bar{\varphi}$, en interaction avec un champ scalaire Π. Ce modèle est décrit par l'action classique relativiste

$$S[\varphi,\bar{\varphi},\Pi] = \int d^4x[\partial^\mu\bar{\varphi}\partial_\mu\varphi - m^2\bar{\varphi}\varphi + \frac{1}{2}(\partial^\mu\Pi\partial_\mu\Pi - \mu^2\Pi^2) - g\bar{\varphi}\varphi\Pi] = \int d^4x\mathcal{L}. \tag{8}$$

L'intensité g de interaction est ici supposée petite.
La charge de Noether associée à la symétrie continue

$$\varphi \longrightarrow e^{i\alpha}\varphi, \quad ; \quad \bar{\varphi} \longrightarrow e^{-i\alpha}\bar{\varphi} \tag{9}$$

s'exprime selon (voir un précédent TD)

$$Q = \int d^{D-1}x \ \ j_0 = i\int d^3x[\bar{\varphi}\partial_0\varphi - \varphi\partial_0\bar{\varphi}]. \tag{10}$$

1. Cas libre : dans ce cas, les champs φ, $\bar{\varphi}$ et Π vérifient l'équation de Klein-Gordon. Exprimer la charge de Noether en fonction des composantes de Fourier des champs φ, $\bar{\varphi}$. Montrer que la théorie libre du champ complexe φ, $\bar{\varphi}$ décrit un ensemble de particules de charges $+1$ et -1. Il s'agira de nos "pseudo-électrons" et "pseudo-positrons". Le champ Π jouera le rôle de boson d'échange.

2. On se propose de calculer l'amplitude de diffusion

$$\begin{aligned} < \mathbf{p}_1+,\mathbf{p}_2-,in|iT|\mathbf{q}_1+,\mathbf{q}_2-,in > \ &= \ (2\pi)^D\delta^D(p_1+p_2-q_1-q_2)\times \\ &\times \ i\mathcal{M}(q_1+,q_2-\to p_1+,p_2-). \end{aligned} \tag{11}$$

   entre un pseudo-électron et un pseudo-positron vers un un pseudo-électron et un pseudo-positron. On utilisera pour cela la formule qui relie la matrice de diffusion et la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green :

$$S =: \exp\left(i\int d^4y\varphi(y)G_F^{-1}(\frac{\delta}{i\delta j(x)})\right) : Z[j]|_{j=0}\,, \tag{12}$$

   où G_F est la fonction de Green de Feynman du champ libre φ, $\bar{\varphi}$.

   Déterminez, à l'ordre g^2, les deux diagrammes contribuant à $\mathcal{M}(q_1+,q_2-\to p_1+,p_2-)$.

3. En déduire l'expression suivante, à l'ordre g^2 :

$$i\mathcal{M}(q_1+,q_2-\to p_1+,p_2-) = (-ig)^2\left(\frac{i}{(q_1+q_2)^2-\mu^2}+\frac{i}{(q_1-p_1)^2-\mu^2}\right)+\mathcal{O}(g^4) \tag{13}$$

4. Limite non-relativiste. On considère la limite : $\mathbf{p_i}^2, \mathbf{q_i}^2 \ll m^2$, dans laquelle le hamiltonien à deux corps (électron et positron) se réécrit

$$H = \frac{\mathbf{q}_1^2}{2m}+\frac{\mathbf{q}_2^2}{2m}+V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \tag{14}$$

   (a) A l'approximation de Born, l'amplitude de transition s'écrit $i\mathcal{M}(q_1+,q_2-\to p_1+,p_2-) = -iV(q_1-p_1)$. Montrer que dans cette limite, le potentiel effectif correspondant au modèle relativiste ci-dessus s'écrit

$$V(q) = \frac{g^2}{-q^2+\mu^2} \tag{15}$$

   (b) Effectuer la transformée de Fourier pour montrer que ce potentiel prend la forme d'un potentiel de Yukawa attractif, de portée μ^{-1}.