

# NP-complétude

## De la théorie à la pratique

Denis Kuperberg

Chargé de Recherche en Informatique Théorique

Open Minds

16 septembre 2023



# Informatique théorique ?

# Informatique théorique ?

**Géométrie:** Étude des formes



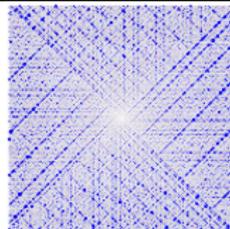
# Informatique théorique ?

**Géométrie:** Étude des formes



---

**Arithmétique:** Étude des nombres



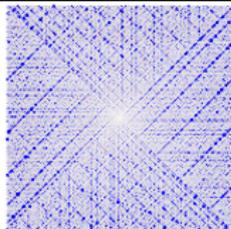
# Informatique théorique ?

**Géométrie:** Étude des formes



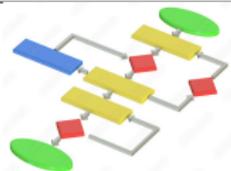
---

**Arithmétique:** Étude des nombres



---

**Informatique:** Étude des algorithmes



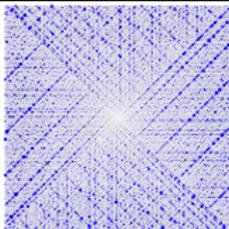
# Informatique théorique ?

**Géométrie:** Étude des formes



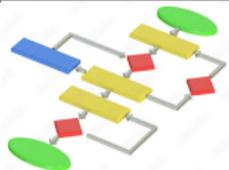
---

**Arithmétique:** Étude des nombres



---

**Informatique:** Étude des algorithmes



Existe-t-il un algorithme pour résoudre mon problème ?

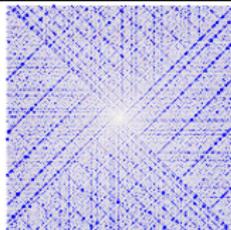
# Informatique théorique ?

**Géométrie:** Étude des formes



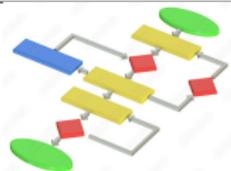
---

**Arithmétique:** Étude des nombres



---

**Informatique:** Étude des algorithmes



Existe-t-il un algorithme pour résoudre mon problème ?

Si oui, en existe-t-il un rapide ?

# Algorithme d'addition

$$\begin{array}{r} 2023 \\ + 985 \\ \hline \end{array}$$

# Algorithme d'addition

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \quad \textcircled{1} \\ 2 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \\ + \quad \quad 9 \quad 8 \quad 5 \\ \hline 3 \quad 0 \quad 0 \quad 8 \end{array}$$

# Algorithme d'addition

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \quad \textcircled{1} \\ 2 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \\ + \quad \quad 9 \quad 8 \quad 5 \\ \hline 3 \quad 0 \quad 0 \quad 8 \end{array}$$

Temps de calcul proportionnel au nombre de chiffres  $n$

→ Algorithme rapide

## Trier une liste

9	3	7	2	5	1
---	---	---	---	---	---

--	--	--	--	--	--

## Trier une liste

9	3	7	2	5	1
---	---	---	---	---	---

1					
---	--	--	--	--	--

## Trier une liste

9	3	7	2	5	1
---	---	---	---	---	---

1	2				
---	---	--	--	--	--

## Trier une liste

9	3	7	2	5	1
---	---	---	---	---	---

1	2	3			
---	---	---	--	--	--

## Trier une liste

9	3	7	2	5	1
---	---	---	---	---	---

1	2	3	5		
---	---	---	---	--	--

## Trier une liste

9	3	7	2	5	1
---	---	---	---	---	---

1	2	3	5	7	
---	---	---	---	---	--

## Trier une liste

9	3	7	2	5	1
---	---	---	---	---	---

1	2	3	5	7	9
---	---	---	---	---	---

Temps de calcul: environ  $n^2$   
→ Algorithme rapide:

## Trier une liste

9	3	7	2	5	1
---	---	---	---	---	---

1	2	3	5	7	9
---	---	---	---	---	---

Temps de calcul: environ  $n^2$   
→ Algorithme **rapide**:

**En général** : temps de calcul  $n^k =$  **rapide**.

## Trier une liste

9	3	7	2	5	1
---	---	---	---	---	---

1	2	3	5	7	9
---	---	---	---	---	---

Temps de calcul: environ  $n^2$   
→ Algorithme **rapide**:

**En général** : temps de calcul  $n^k =$  **rapide**.  
Algorithme **polynomial**.

## Trier une liste

9	3	7	2	5	1
---	---	---	---	---	---

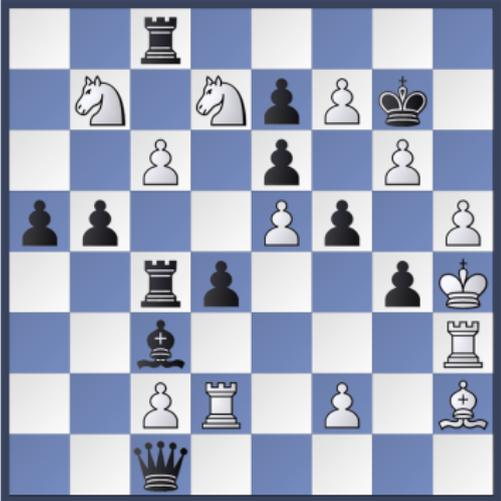
1	2	3	5	7	9
---	---	---	---	---	---

Temps de calcul: environ  $n^2$   
→ Algorithme **rapide**:

**En général** : temps de calcul  $n^k =$  **rapide**.  
Algorithme **polynomial**.

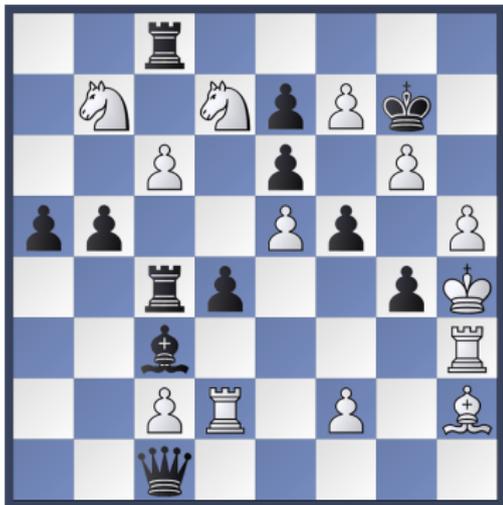
L'addition et le tri sont des problèmes dans **P**.

# Des problèmes difficiles



```
i=42
while(i>1):
    if i%2==0:
        i=i/2
    else:
        i=3*i+1
```

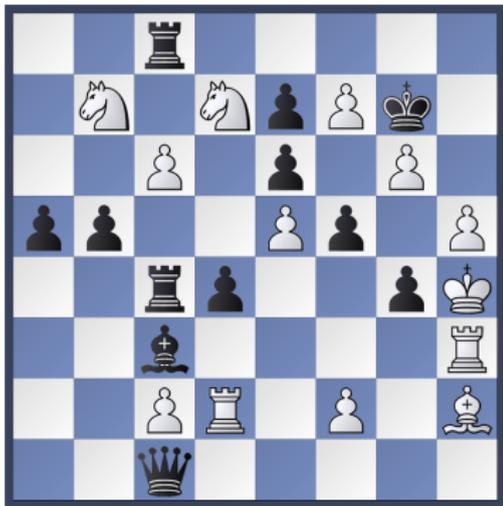
# Des problèmes difficiles



Temps:  $2^n$ , Exponentiel

```
i=42
while(i>1):
    if i%2==0:
        i=i/2
    else:
        i=3*i+1
```

# Des problèmes difficiles

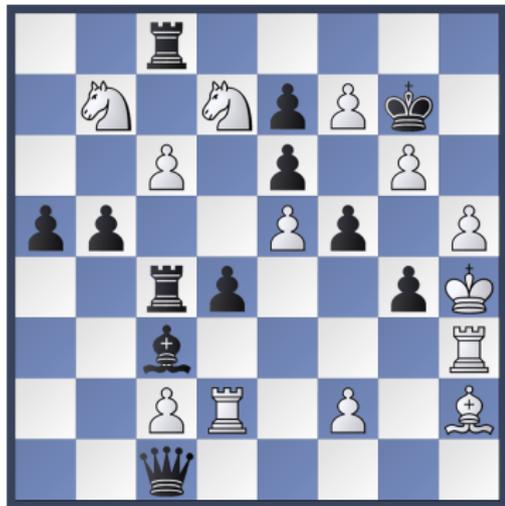


Temps:  $2^n$ , Exponentiel

```
i=42
while (i>1):
    if i%2==0:
        i=i/2
    else:
        i=3*i+1
```

Pas d'algorithme !

# Des problèmes difficiles



Temps:  $2^n$ , Exponentiel

```
i=42
while (i>1):
    if i%2==0:
        i=i/2
    else:
        i=3*i+1
```

Pas d'algorithme !

Les échecs et l'arrêt ne sont pas dans P.

## Un cas intermédiaire

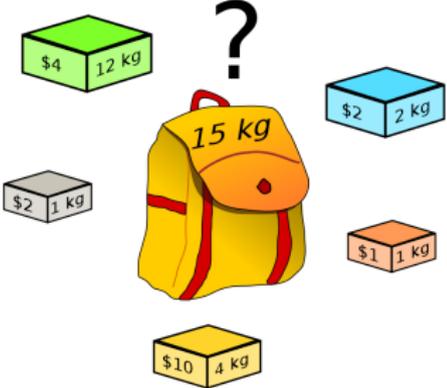
5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

## Un cas intermédiaire

5	3			7			
6			1	9	5		
	9	8					6
8				6			3
4			8		3		1
7				2			6
	6					2	8
			4	1	9		5
				8			7
						7	9

Dur à trouver, simple à vérifier: **NP**

# Des problèmes NP



# NP-complétude

Ces problèmes NP sont-ils dans P ?

# NP-complétude

Ces problèmes NP sont-ils dans P ?

Pour l'instant: seulement des algorithmes **exponentiels**

# NP-complétude

Ces problèmes NP sont-ils dans P ?

Pour l'instant: seulement des algorithmes **exponentiels**

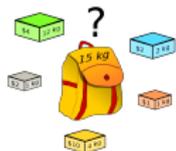


$2^n$  possibilités (ici  $2^5 = 32$ ).

# NP-complétude

Ces problèmes NP sont-ils dans P ?

Pour l'instant: seulement des algorithmes **exponentiels**



$2^n$  possibilités (ici  $2^5 = 32$ ).

5	3		7				
6		1	9	5			
	9	8				6	
8			6				3
4		8		3			1
7			2				6
	6				2	8	
		4	1	9			5
			8			7	9



...

# NP-complétude

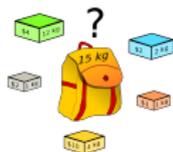
Ces problèmes NP sont-ils dans P ?

Pour l'instant: seulement des algorithmes **exponentiels**



$2^n$  possibilités (ici  $2^5 = 32$ ).

5	3		7				
6		1	9	5			
	9	8				6	
8			6				3
4		8	3				1
7			2				6
	6				2	8	
		4	1	9			5
			8			7	9



...

**NP-complets**

# NP-complétude

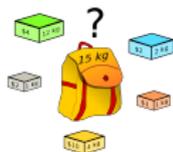
Ces problèmes NP sont-ils dans P ?

Pour l'instant: seulement des algorithmes **exponentiels**



$2^n$  possibilités (ici  $2^5 = 32$ ).

5	3		7				
6		1	9	5			
	9	8				6	
8			6				3
4		8	3				1
7			2				6
	6				2	8	
		4	1	9			5
			8			7	9



...

**NP-complets**

P=NP ?

# NP-complétude

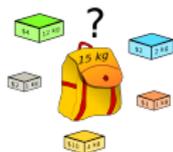
Ces problèmes NP sont-ils dans P ?

Pour l'instant: seulement des algorithmes **exponentiels**



$2^n$  possibilités (ici  $2^5 = 32$ ).

5	3		7				
6		1	9	5			
	9	8				6	
8			6				3
4		8		3			1
7			2				6
	6				2	8	
			4	1	9		5
				8		7	9



...

**NP-complets**

P=NP ?

Problème du millénaire, 1 million \$

## Et en pratique ?

Solveurs **efficaces** mais peu connus.

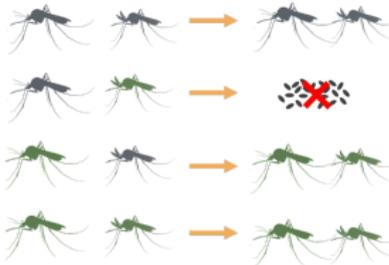
# Et en pratique ?

Solveurs **efficaces** mais peu connus.



Sylvain Charlat

## Infection des moustiques



# Et en pratique ?

Solveurs **efficaces** mais peu connus.



Sylvain Charlat

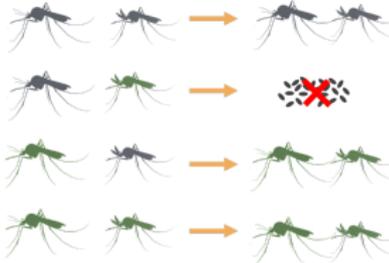


Etienne Rajon

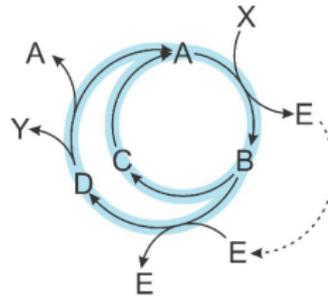


Nicolas Lartillot

## Infection des moustiques



## Emergence de la sélection naturelle



# Et en pratique ?

Solveurs **efficaces** mais peu connus.



Sylvain Charlat

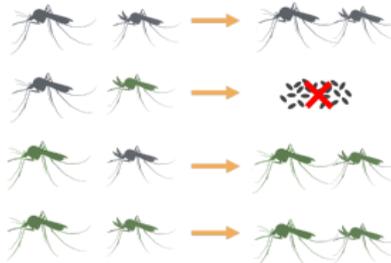


Etienne Rajon

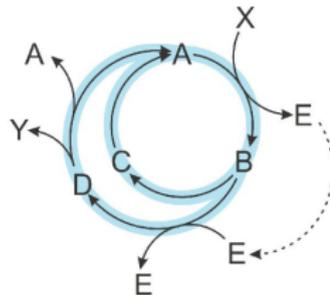


Nicolas Lartillot

## Infection des moustiques



## Emergence de la sélection naturelle



N'ayez pas peur de la NP-complétude, utilisez des solveurs !