TP 4 : Polynômes

3 avril 2014

On peut représenter de manière pratique un polynôme par le tableau de ses coefficients. Par exemple, si $P(X) = 5 - 7X - 3X^2 + X^3$ serait représenté par le tableau `[5, -7, -3, 1]`.

Question 1
Donner le tableau représentant le polynôme $P(X) = -3X + 2X^2 + X^4$. Quel polynôme le tableau `[-1, 2, 4, 0, 0, -1]` represente-t-il ?

Question 2
Définir une fonction `print_poly` prenant en argument un tableau représentant un polynôme et affichant à l'écran le polynôme sous forme d'une chaîne de caractères.

Question 3
Définir des fonctions `degre` et `coef_max` renvoyant respectivement le degré et le plus grand coefficient (en valeur absolue) du polynôme correspondant au tableau donné en argument. Par exemple, `degre([5, -7, -3, 1])` renvoie 4 et `coef_max([5, -7, -3, 1])` renvoie -7.

Question 4
Définir une fonction `valeur_naive` prenant un tableau représentant un polynôme P et un nombre x en arguments et renvoyant la valeur prise par P en x. Par exemple, `valeur_naive([5, -7, -3, 1], 3)` renvoie -16. Quelle est la complexité dans le pire cas en terme de multiplications de `valeur_naive` appliquée à un polynôme de degré d ?

Question 5
La *méthode de Horner* permet de calculer la valeur prise par un polynôme en un point en effectuant un nombre moins important de multiplications. Elle s'appuie sur l'égalité $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots x(a_{n-1} + xa_n)\ldots))$. Définir une fonction `horner` renvoyant la même valeur que `valeur_naive` si elle est appliquée aux même arguments, mais utilisant la méthode de Horner. Quelle est la complexité dans le pire cas en terme de multiplications de `horner` appliquée à un polynôme de degré d ?

Question 6
Définir une fonction `somme` prenant deux polynômes P_1 et P_2 en arguments et renvoyant un tableau représentant le polynôme $P_1 + P_2$. De même définir une fonction `oppose` renvoyant un tableau représentant le polynôme opposé du polynôme argument.

Question 7
Définir une fonction `mult_naive` prenant deux polynômes en arguments et renvoyant un tableau correspondant au produit. Quelle est la complexité dans le pire cas en terme de multiplications de `mult_naive` appliquée à des polynômes de degré d_1 et d_2 ?

Question 8
En supposant que les polynômes soient tous deux de degré $d = 2^k$, proposer un algorithme de style *diviser pour régner* réalisant la multiplication souhaitée (il s'agit de l'algorithme de *Karatsuba*. On pourra s'inspirer des idées de l'algorithme de Strassen pour la multiplication des matrices. Quelle est la complexité dans le pire cas en terme de multiplications de cet algorithme ?

Question 9
La division euclidienne peut également être définie pour les polynômes. Étant donnés deux polynômes A et B de degré d_A et d_B, il s'agit de trouver deux polynômes Q et R de degré d_Q et $d_R < d_B$ tels que $A = BQ + R$. Par exemple, la division euclidienne de $A = X^5 - X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X$ par $B = X^2 - X + 1$ donne $Q = X^3 - 2X + 1$ et $R = X - 1$. Vérifier à l'aide des fonctions définies précédemment que $A = BQ + R$. Définir une fonction `division` effectuant la division euclidienne des deux polynômes donnés en arguments et renvoyant le quotient et le reste.