Twin-Width et Algorithmes de Graphes

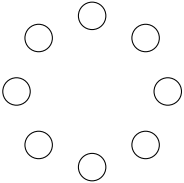
Édouard Bonnet

CNRS, ENS de Lyon, LIP

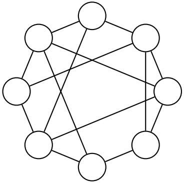
4 juin 2026, Congrès de la SIF, Nancy

Carl Feghali (1986–2026)

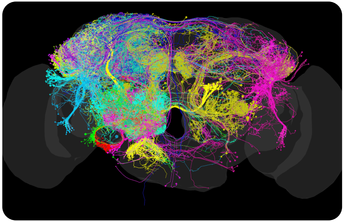
Les graphes sont partout

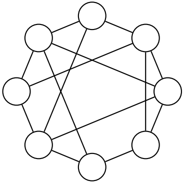


Les graphes sont partout

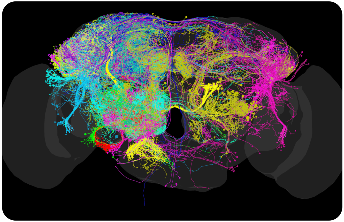


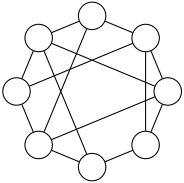
Les graphes sont partout

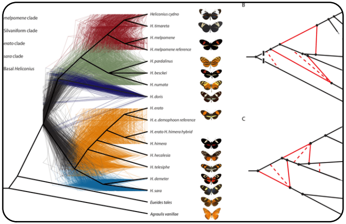




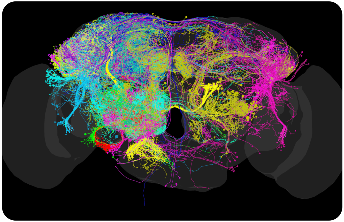
Les graphes sont partout

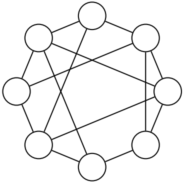


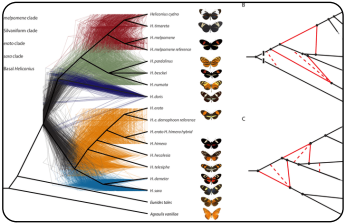




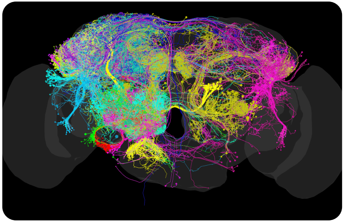
Les graphes sont partout

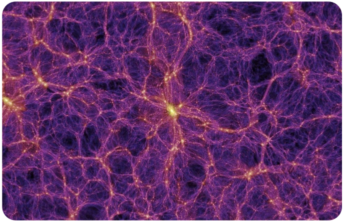


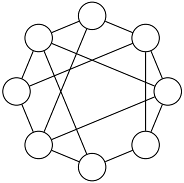


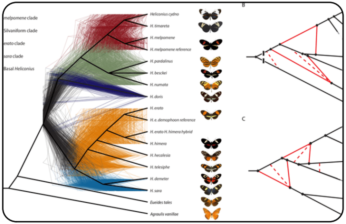


Les graphes sont partout









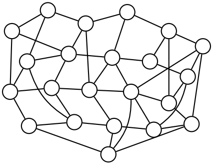
Logique comme cadre pour exprimer des problèmes

Premier ordre : relation d'adjacence $E(\cdot,\cdot)$ et $=$,
connecteurs booléens $\wedge, \vee, \neg$, quantification sur les sommets $\exists, \forall$

Logique comme cadre pour exprimer des problèmes

Premier ordre : relation d'adjacence $E(\cdot, \cdot)$ et $=$,
connecteurs booléens $\wedge, \vee, \neg$, quantification sur les sommets $\exists, \forall$

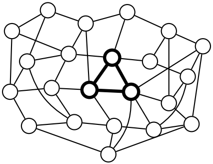
Exemple :
$\varphi_{\triangle} := \exists x \exists y \exists z \;\; x \neq y \;\wedge\; x \neq z \;\wedge\; y \neq z \;\wedge E(x,y) \wedge E(x,z) \wedge E(y,z)$



Logique comme cadre pour exprimer des problèmes

Premier ordre : relation d'adjacence $E(\cdot,\cdot)$ et $=$,
connecteurs booléens $\wedge, \vee, \neg$, quantification sur les sommets $\exists, \forall$

Exemple :
$\varphi_\triangle := \exists x \exists y \exists z \;\; x \neq y \;\wedge\; x \neq z \;\wedge\; y \neq z \;\wedge E(x,y) \wedge E(x,z) \wedge E(y,z)$



Logique comme cadre pour exprimer des problèmes

Monadique du second ordre (MSO) : Premier ordre + quantification sur des ensembles de sommets et appartenance

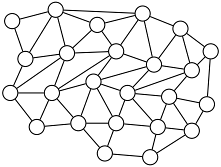
Logique comme cadre pour exprimer des problèmes

Monadique du second ordre (MSO) : Premier ordre + quantification sur des ensembles de sommets et appartenance

Exemple : $\varphi_{\text{3-col}} := \exists X \exists Y \exists Z\ \forall x\ (x \in X \vee x \in Y \vee x \in Z)$

$$\wedge\ \mathrm{stable}(X) \wedge \mathrm{stable}(Y) \wedge \mathrm{stable}(Z)$$

avec $\mathrm{stable}(X) := \forall x \forall y\ (x \in X \wedge y \in X) \Rightarrow \neg E(x, y)$



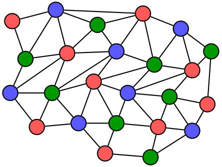
Logique comme cadre pour exprimer des problèmes

Monadique du second ordre (MSO) : Premier ordre + quantification sur des ensembles de sommets et appartenance

Exemple : $\varphi_{\text{3-col}} := \exists X \exists Y \exists Z\ \forall x\ (x \in X \vee x \in Y \vee x \in Z)$

$$\wedge\ \mathrm{stable}(X) \wedge \mathrm{stable}(Y) \wedge \mathrm{stable}(Z)$$

avec $\mathrm{stable}(X) := \forall x \forall y\ (x \in X \wedge y \in X) \Rightarrow \neg E(x, y)$



X,Y,Z

Méta-algorithmes

Théorème (Courcelle '90)

Tout problème exprimable en logique MSO a un algorithme linéaire sur les instances de largeur arborescente fixée.

Méta-algorithmes

Théorème (Courcelle '90)

Tout problème exprimable en logique MSO a un algorithme linéaire sur les instances de largeur arborescente fixée.

Théorème (Courcelle–Makowsky–Rotics '00)

Tout problème exprimable en logique MSO a un algorithme polynomial sur les instances de largeur de clique fixée.

$$\boxed{\text{On ne peut pas aller plus loin que la largeur de clique bornée}}$$

Méta-algorithmes

Théorème (Courcelle '90)

Tout problème exprimable en logique MSO a un algorithme linéaire sur les instances de largeur arborescente fixée.

Théorème (Courcelle–Makowsky–Rotics '00)

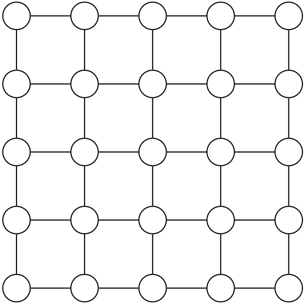
Tout problème exprimable en logique MSO a un algorithme polynomial sur les instances de largeur de clique fixée.

On ne peut pas aller plus loin que la largeur de clique bornée

Et la logique du premier ordre ?

La twin-width : une décomposition dynamique

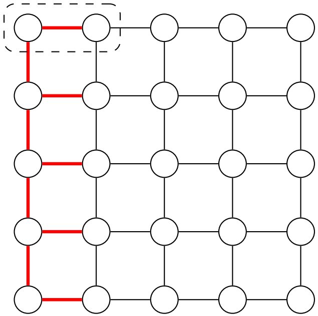
trigraphe : graphe avec deux types d'arêtes, noires et rouges



La twin-width : une décomposition dynamique

trigraphe : graphe avec deux types d'arêtes, noires et rouges

suite de contractions :
suite de trigraphes où tour à tour deux sommets sont unis

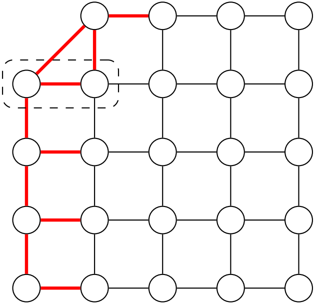


La twin-width : une décomposition dynamique

trigraphe : graphe avec deux types d'arêtes, noires et rouges

suite de contractions :
suite de trigraphes où tour à tour deux sommets sont unis

twin-width :
plus petit d tel que le (tri)graphe a une suite de contractions avec degré rouge au plus d

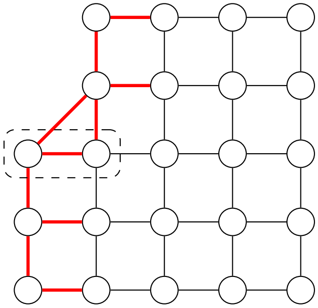


La twin-width : une décomposition dynamique

trigraphe : graphe avec deux types d'arêtes, noires et rouges

suite de contractions :
suite de trigraphes où tour à tour deux sommets sont unis

twin-width :
plus petit d tel que le (tri)graphe a une suite de contractions avec degré rouge au plus d

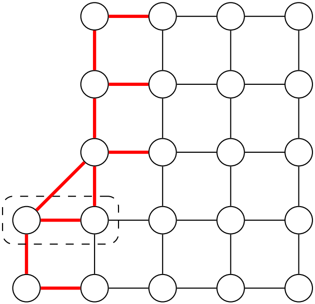


La twin-width : une décomposition dynamique

trigraphe : graphe avec deux types d'arêtes, noires et rouges

suite de contractions :
suite de trigraphes où tour à tour deux sommets sont unis

twin-width :
plus petit d tel que le (tri)graphe a une suite de contractions avec degré rouge au plus d

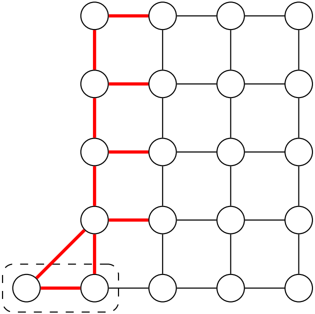


La twin-width : une décomposition dynamique

trigraphe : graphe avec deux types d'arêtes, noires et rouges

suite de contractions :
suite de trigraphes où tour à tour deux sommets sont unis

twin-width :
plus petit d tel que le (tri)graphe a une suite de contractions avec degré rouge au plus d

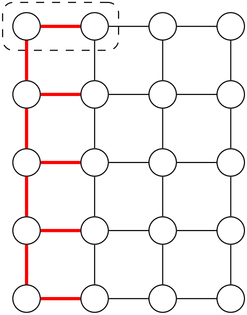


La twin-width : une décomposition dynamique

trigraphe : graphe avec deux types d'arêtes, noires et rouges

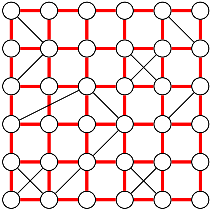
suite de contractions :
suite de trigraphes où tour à tour deux sommets sont unis

twin-width :
plus petit d tel que le (tri)graphe a une suite de contractions avec degré rouge au plus d

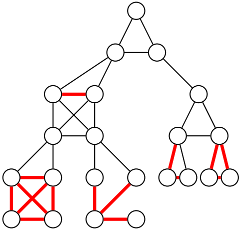


Paramètres réduits

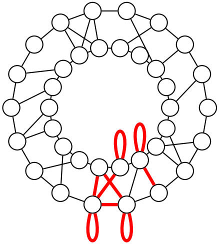
Autres conditions sur les graphes rouges



degré maximum réduit = twin-width



taille de composante réduite ≡ largeur de clique

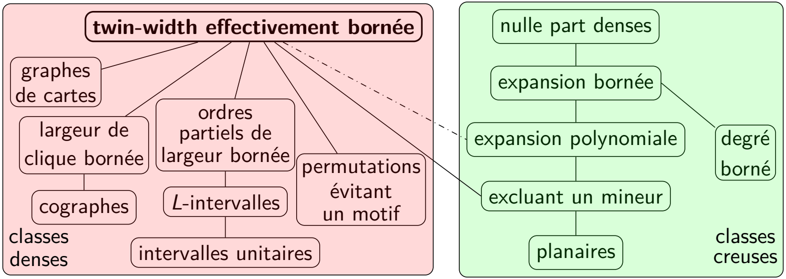


nombre d'arêtes réduit

Méta-algorithmes

Théorème (B., Kim, Thomassé, Watrigant '20)

Tout problème en logique du premier ordre a un algorithme linéaire sur les graphes de twin-width effectivement bornée.



Méta-algorithmes

Théorème (B., Kim, Thomassé, Watrigant '20)

Tout problème en logique du premier ordre a un algorithme linéaire sur les graphes de twin-width effectivement bornée.

Reformulation du théorème de Courcelle–Makowsky–Rotics :

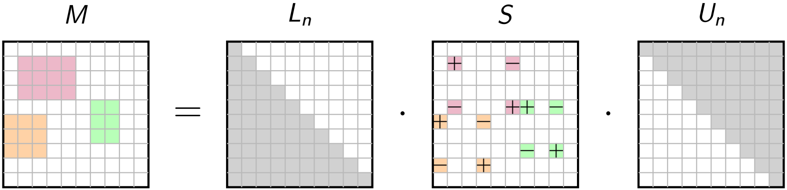
Théorème (B., Kim, Reinald, Thomassé '22)

Tout problème en logique MSO a un algorithme polynomial sur les graphes de taille de composante réduite bornée.

D'autres applications algorithmiques

Théorème (B., Geniet, Kim, Moon '26)

On peut calculer le produit d'une matrice $n \times n$ de twin-width bornée avec une autre matrice en temps $O(n^2 \log n)$.



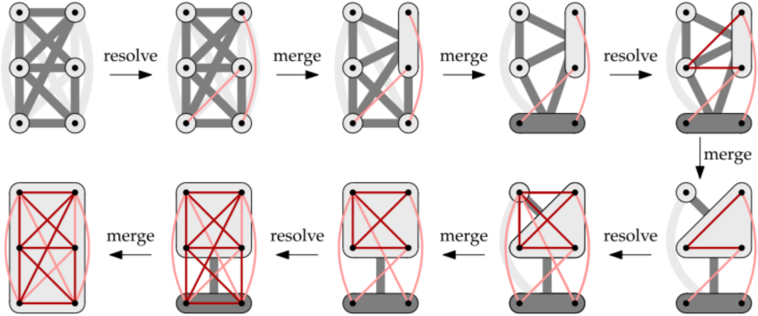
Théorème (B., Duron, Pilipczuk, Sokołowski, Toruńczyk '26+)

La distance entre chaque paire de sommets peut être calculée en temps $O(n^2)$ dans un graphe de twin-width bornée à n sommets.

Perspectives

Trouver efficacement les suites de contractions

Délimiter la tractabilité de la logique du premier ordre

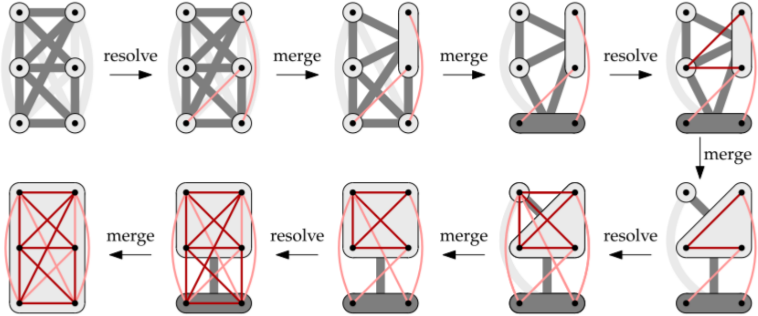


Merge-width de Dreier et Toruńczyk

Perspectives

Trouver efficacement les suites de contractions

Délimiter la tractabilité de la logique du premier ordre



Merge-width de Dreier et Toruńczyk

Merci pour votre attention !