Grammaire formelle et hiérarchie de Chomsky

Édouard Bonnet

Février 2013, Séminaire Émeric M. Tourniaire

Grammaire formelle

Une grammaire G :

Grammaire formelle

Une grammaire G :

- alphabet T : ensemble de terminaux

Grammaire formelle

Une grammaire G :

- alphabet T : ensemble de terminaux
- alphabet N : ensemble de variables

Grammaire formelle

Une grammaire G :

- alphabet T : ensemble de terminaux
- alphabet N : ensemble de variables
- R : ensemble de règles de transformation $x \rightarrow y$ avec $x \in (T \cup N)^* N (T \cup N)^*$ et $y \in (T \cup N)^*$

Grammaire formelle

Une grammaire G :

- alphabet T : ensemble de terminaux
- alphabet N : ensemble de variables
- R : ensemble de règles de transformation $x \rightarrow y$ avec $x \in (T \cup N)^* N (T \cup N)^*$ et $y \in (T \cup N)^*$
- $S \in N$: axiome

Grammaire formelle

Une grammaire G :

- alphabet T : ensemble de terminaux
- alphabet N : ensemble de variables
- R : ensemble de règles de transformation $x \to y$ avec $x \in (T \cup N)^* N (T \cup N)^*$ et $y \in (T \cup N)^*$
- $S \in N$: axiome

On notera $\Sigma = T \cup N$

Dérivations et langage d'une grammaire

Dérivations et langage d'une grammaire

- Une dérivation : $S \to \ldots \to uxv \to uyv \to \ldots \to w$

Dérivations et langage d'une grammaire

- Une dérivation : $S \to \ldots \to uxv \to uyv \to \ldots \to w$
- $\mathcal{L}(G) = \{w \in T^* \mid S \to^* w\}$

Un exemple

- $T = \{(;)\}$
- $N = \{S\}$
- $R = \{S \to (S)S; S \to \varepsilon\}$

$\mathcal{L}(G) = ?$

Un exemple

- $T = \{(;)\}$
- $N = \{S\}$
- $R = \{S \to (S)S; S \to \varepsilon\}$

$\mathcal{L}(G) = D_1$

Langue naturelle

$P \to G_s V_s C$
$P \to G_p V_p C$
$G_p \to G_t$ et G_s
$G_t \to G_t,\ G_s$
$G_t \to G_s$
$G_s \to A_m N_m$
$G_s \to A_f N_f$
$A_m \to$ [un|le|ce]
$A_f \to$ [une|la|cette]
$N_m \to$ [chat|chien|jardin]
$N_f \to$ [niche]
$V \to$ [mange|court]
$V_p \to$ [mangent|courent]
$C \to$ dans G_s

Grammaire générale

- Type 0 : langages récursivement énumérables

Grammaire générale

- Type 0 : langages récursivement énumérables
- expressivité d'une machine de Turing

Grammaire générale

- Type 0 : langages récursivement énumérables
- expressivité d'une machine de Turing
- retourner les règles : $w \rightarrow^* S$

Grammaire générale

- Type 0 : langages récursivement énumérables
- expressivité d'une machine de Turing
- retourner les règles : $w \rightarrow^* S$
- $(q, a) \rightarrow (q', b, \uparrow)$ devient $qa \rightarrow q'b$

Grammaire générale

- Type 0 : langages récursivement énumérables
- expressivité d'une machine de Turing
- retourner les règles : $w \rightarrow^* S$
- $(q, a) \rightarrow (q', b, \uparrow)$ devient $qa \rightarrow q'b$
- $(q, a) \rightarrow (q', b, \rightarrow)$ devient $qa \rightarrow bq'$

Grammaire générale

- Type 0 : langages récursivement énumérables
- expressivité d'une machine de Turing
- retourner les règles : $w \to^* S$
- $(q, a) \to (q', b, \uparrow)$ devient $qa \to q'b$
- $(q, a) \to (q', b, \to)$ devient $qa \to bq'$
- $(q, a) \to (q', b, \leftarrow)$ devient $cqa \to q'cb$ pour tout $c \in \Sigma$.

Grammaire contextuelle

- Seules les règles $uXv \to uwv$ sont autorisées, avec $X \in N$ et u, v, $w \in \Sigma^*$

Grammaire contextuelle

- Seules les règles $uXv \rightarrow uwv$ sont autorisées, avec $X \in N$ et u, v, $w \in \Sigma^*$
- Type 1 : langages contextuels

Grammaire contextuelle

- Seules les règles $uXv \to uwv$ sont autorisées, avec $X \in N$ et $u, v, w \in \Sigma^*$
- Type 1 : langages contextuels
- expressivité d'une machine de Turing à espace linéaire

Grammaire contextuelle

- Seules les règles $uXv \rightarrow uwv$ sont autorisées, avec $X \in N$ et $u, v, w \in \Sigma^*$
- Type 1 : langages contextuels
- expressivité d'une machine de Turing à espace linéaire
- Une dérivation ne fait qu'augmenter la taille du mot

Grammaire non contextuelle

- Seules les règles $X \to w$ sont autorisées, avec $X \in N$ et $w \in \Sigma^*$

Grammaire non contextuelle

- Seules les règles $X \to w$ sont autorisées, avec $X \in N$ et $w \in \Sigma^*$
- Type 2 : langages algébriques

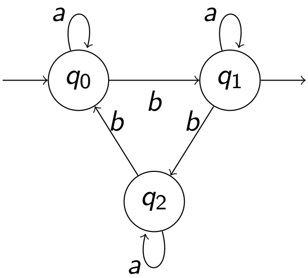
Grammaire non contextuelle

- Seules les règles $X \to w$ sont autorisées, avec $X \in N$ et $w \in \Sigma^*$
- Type 2 : langages algébriques
- expressivité d'un automate à pile

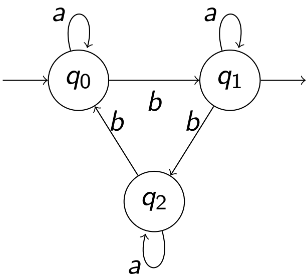
Grammaire non contextuelle

- Seules les règles $X \to w$ sont autorisées, avec $X \in N$ et $w \in \Sigma^*$
- Type 2 : langages algébriques
- expressivité d'un automate à pile
- $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ contextuel non algébrique

Automate

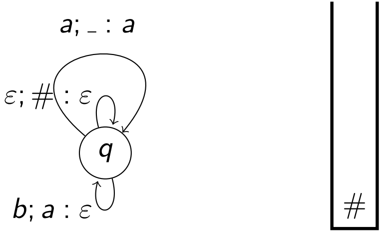


Automate



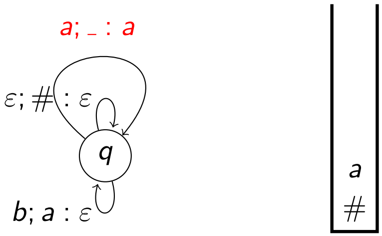
$$L = \{w | \ |w|_b \equiv 1[3]\}$$

Automate à pile



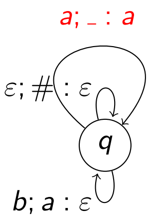
w=aaabbababb

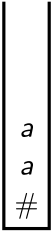
Automate à pile



w=aaabbababb

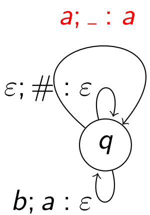
Automate à pile

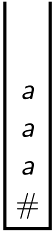




w=aaabbababb

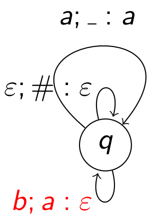
Automate à pile

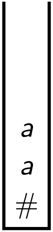




w=aaabbababb

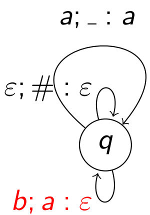
Automate à pile

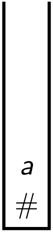




w=aaabbababb

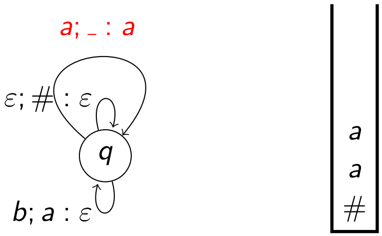
Automate à pile





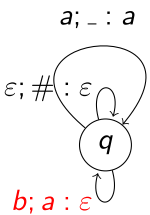
w=aaabbababb

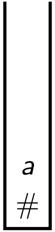
Automate à pile



w=aaabbababb

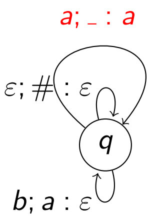
Automate à pile

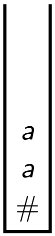




w=aaabbababb

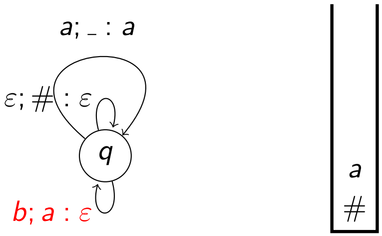
Automate à pile





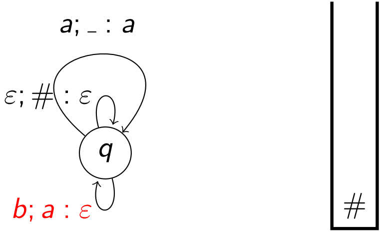
w=aaabbababb

Automate à pile



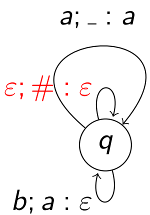
w=aaabbababb

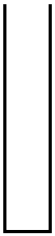
Automate à pile



w=aaabbababb

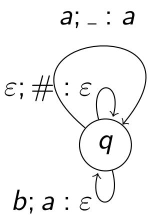
Automate à pile

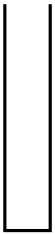




w=aaabbababb

Automate à pile





w=aaabbababb

$$L = \{w|\ |w|_a = |w|_b \wedge \forall w' \in pref(w),\ |w'|_a \geqslant |w'|_b\}$$

Grammaire régulière

- Seules les règles $X \to Ya$ sont autorisées, avec X, Y, $Z \in N$ et $a \in T$

Grammaire régulière

- Seules les règles $X \to Ya$ sont autorisées, avec X, Y, $Z \in N$ et $a \in T$
- Type 3 : langages réguliers

Grammaire régulière

- Seules les règles $X \to Ya$ sont autorisées, avec X, Y, $Z \in N$ et $a \in T$
- Type 3 : langages réguliers
- expressivité d'un automate

Grammaire régulière

- Seules les règles $X \rightarrow Ya$ sont autorisées, avec X, Y, $Z \in N$ et $a \in T$
- Type 3 : langages réguliers
- expressivité d'un automate
- D_1 algébrique non régulier

Hiérarchie de Chomsky

Type	Restriction	Machine	Langages
0	aucune	Machine de Turing	récursivement énumérables
1	$uXv \to uwv$	MdT à espace linéaire	contextuels
2	$X \to w$	automate à pile	algébriques
3	$X \to a$, $X \to aY$	automate	réguliers