Les Graphes dans le GdR-IFM

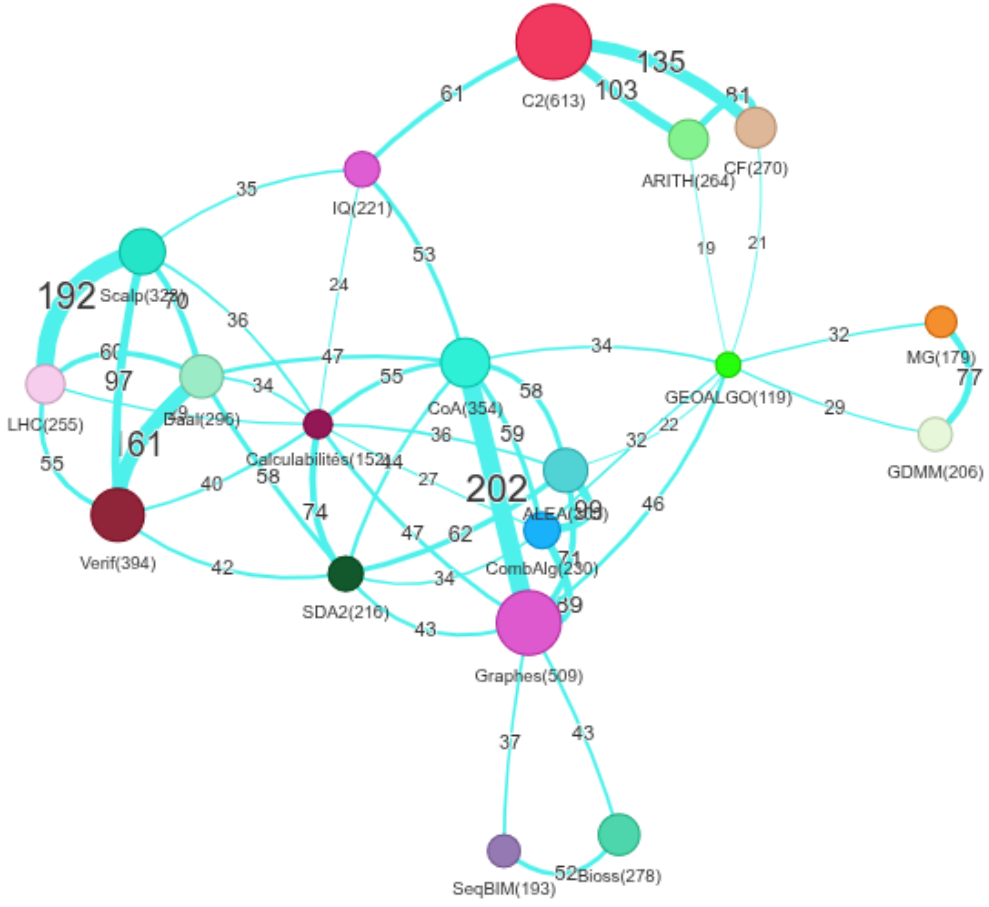
Édouard Bonnet

CNRS, ENS de Lyon, LIP

22 octobre 2026, Graphes : la science des liens, Paris

GdR Informatique Fondamentale et ses Mathématiques

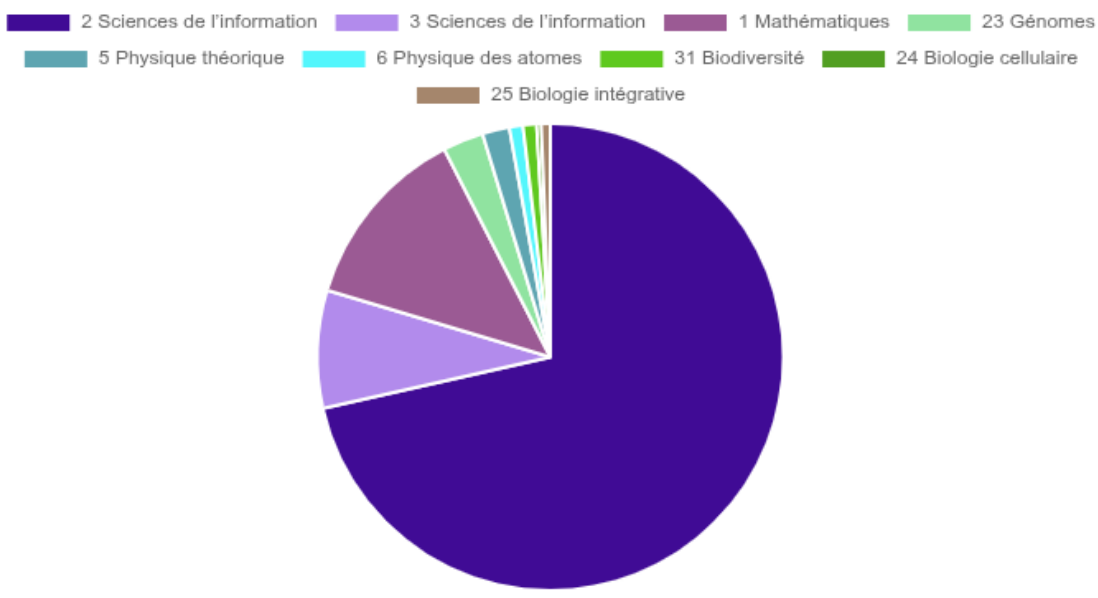
Responsables : Pierre Fraigniaud et Guillaume Theyssier



24 GTs et 3000+ membres

Axes du GdR-IFM, place des mathématiques et mission

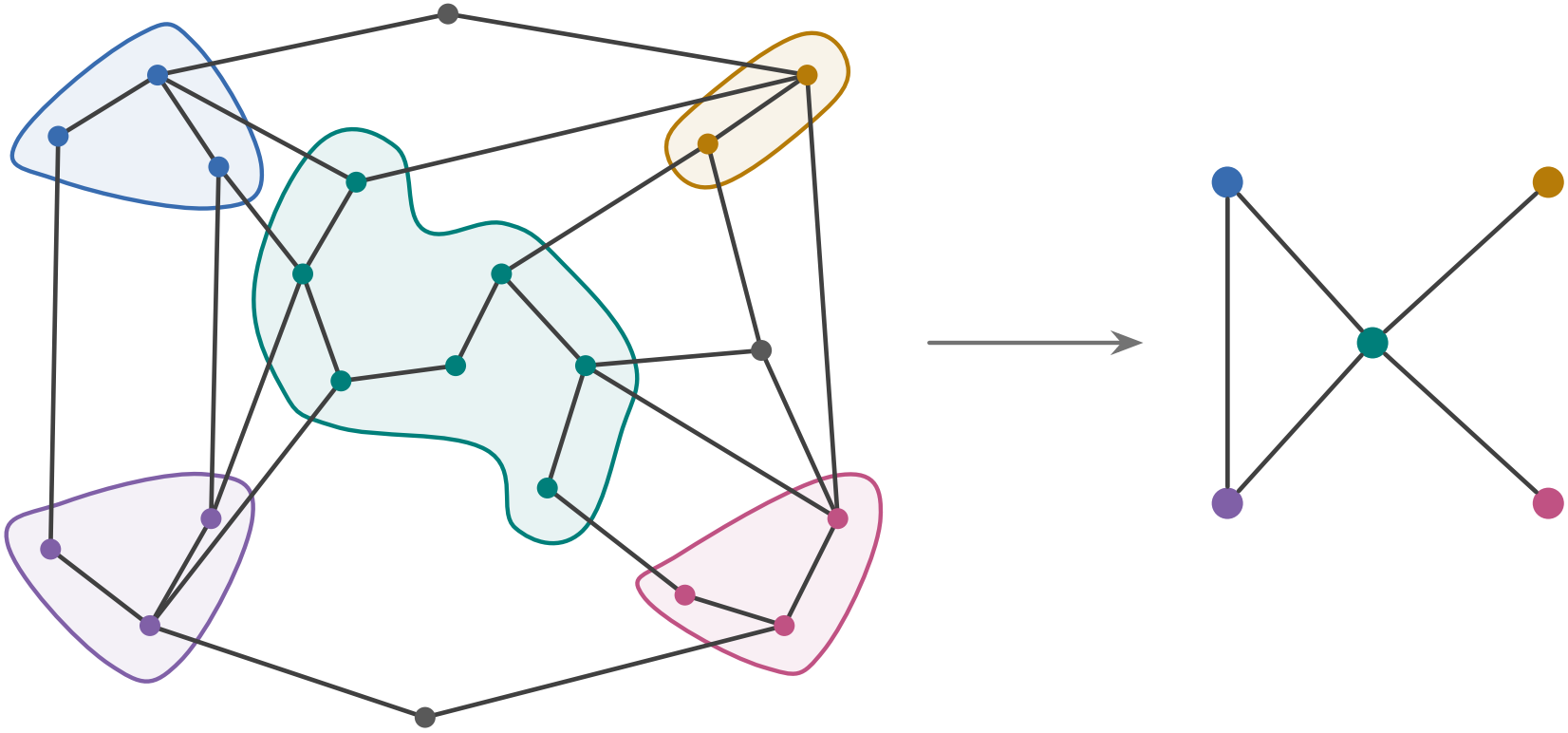
Axe 1 : Combinatoire, graphes et systèmes dynamiques
Axe 2 : Calculabilité, complexité, algorithmique et calcul quantique
Axe 3 : Calcul formel, arithmétique et cryptologie
Axe 4 : Programmes, vérification, preuve, automates et logique
Axe 5 : Géométries et image



Étude des fondements (concepts et outils) de l'informatique

Mineurs de graphes

Projet *Graph Minors* de Robertson et Seymour

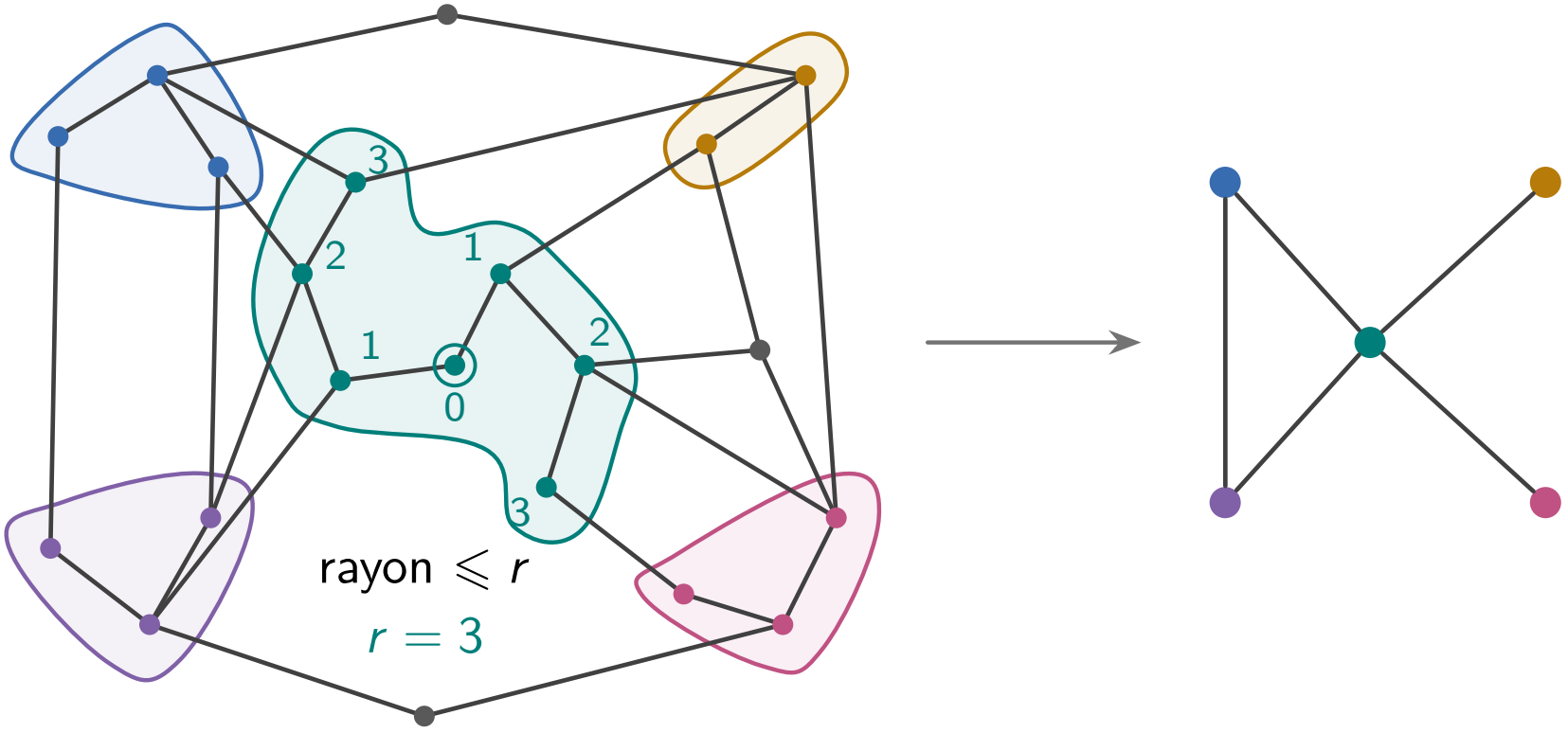


Les classes excluant un mineur généralisent les graphes planaires

$\rightarrow$ source intarissable de résultats structurels et algorithmiques

Mineurs superficiels

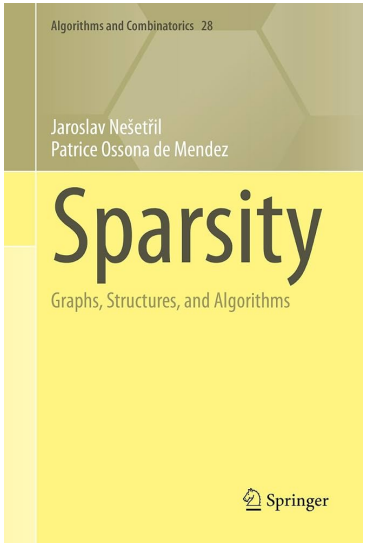
Suite de travaux par Jaroslav Nešetřil et Patrice Ossona de Mendez



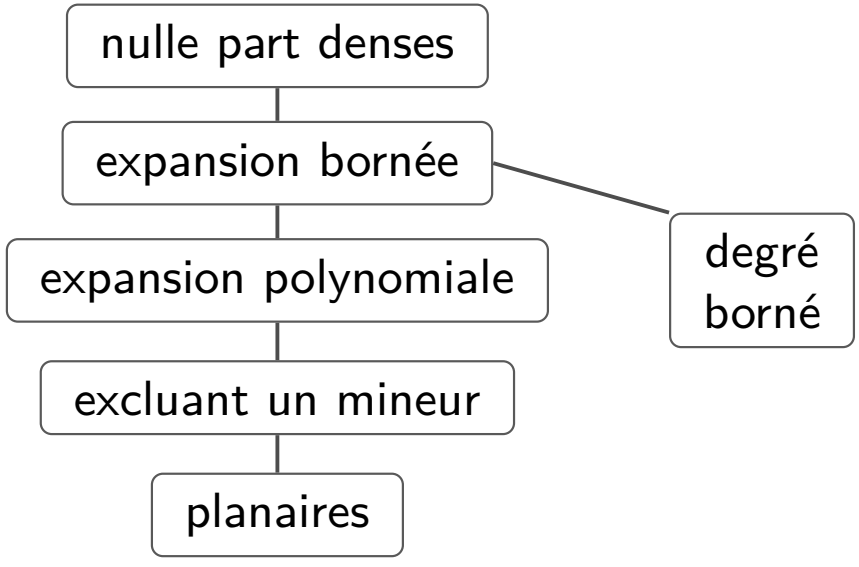
Expansion bornée : $\forall r\, \exists d_r$, tout r-mineur de $\mathcal{C}$ a un degré moyen $\leqslant d_r$.

Nulle part dense : $\forall r\, \exists t_r$, aucun r-mineur de $\mathcal{C}$ ne contient K_{t_r}.

Classes éparses



Nerode prize 2025



Enumeration for FO Queries over Nowhere Dense Graphs JACM 2022
Nicole Schweikardt, Luc Segoufin, Alexandre Vigny.

Sketching Distances in Monotone Graph Classes RANDOM 2022
Louis Esperet, Nathaniel Harms, Andrey Kupavskii.

Discrepancy and sparsity JCTB 2024
Mario Grobler, Yiting Jiang, Patrice Ossona de Mendez, Sebastian Siebertz, Alexandre Vigny.

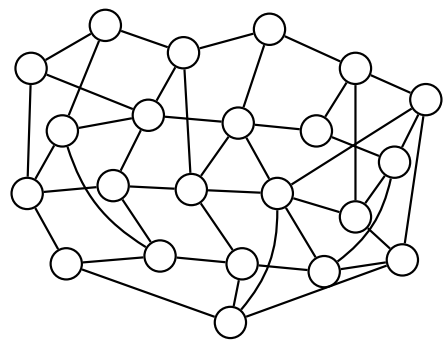
Logique comme cadre pour exprimer des problèmes

Premier ordre : relation d'adjacence $E(\cdot, \cdot)$ et $=$,
connecteurs booléens $\wedge, \vee, \neg$, quantification sur les sommets $\exists, \forall$

Logique comme cadre pour exprimer des problèmes

Premier ordre : relation d'adjacence $E(\cdot, \cdot)$ et $=$,
connecteurs booléens $\wedge, \vee, \neg$, quantification sur les sommets $\exists, \forall$

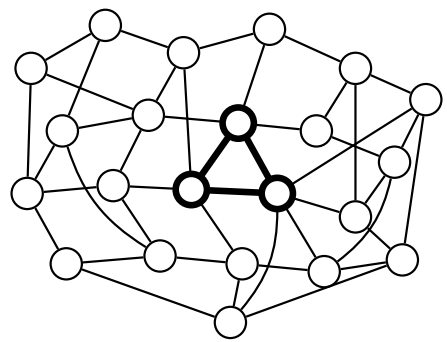
Exemple :
$\varphi_{\triangle} := \exists x \exists y \exists z \; x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge E(x, y) \wedge E(x, z) \wedge E(y, z)$



Logique comme cadre pour exprimer des problèmes

Premier ordre : relation d'adjacence $E(\cdot,\cdot)$ et $=$,
connecteurs booléens $\wedge, \vee, \neg$, quantification sur les sommets $\exists, \forall$

Exemple :
$\varphi_{\triangle} := \exists x \exists y \exists z \; x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge E(x,y) \wedge E(x,z) \wedge E(y,z)$



Logique comme cadre pour exprimer des problèmes

Monadique du second ordre (MSO) : Premier ordre + quantification sur des ensembles de sommets et appartenance

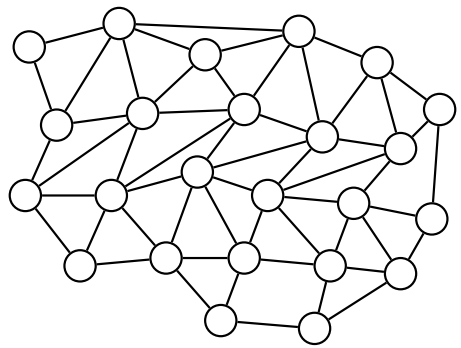
Logique comme cadre pour exprimer des problèmes

Monadique du second ordre (MSO) : Premier ordre + quantification sur des ensembles de sommets et appartenance

Exemple : $\varphi_{\text{3-col}} := \exists X \exists Y \exists Z \ \forall x \ (x \in X \vee x \in Y \vee x \in Z)$

$$\wedge \ \text{stable}(X) \wedge \text{stable}(Y) \wedge \text{stable}(Z)$$

avec $\text{stable}(X) := \forall x \forall y \ (x \in X \wedge y \in X) \Rightarrow \neg E(x, y)$



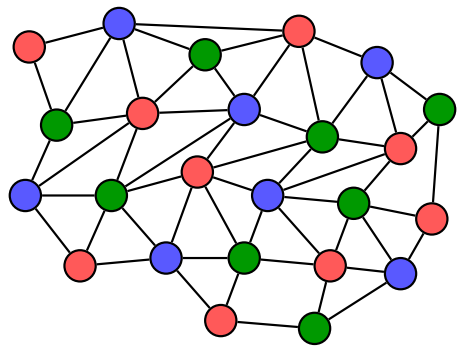
Logique comme cadre pour exprimer des problèmes

Monadique du second ordre (MSO) : Premier ordre + quantification sur des ensembles de sommets et appartenance

Exemple : $\varphi_{\text{3-col}} := \exists X \exists Y \exists Z \; \forall x \; (x \in X \vee x \in Y \vee x \in Z)$

$$\wedge \; \text{stable}(X) \wedge \text{stable}(Y) \wedge \text{stable}(Z)$$

avec $\text{stable}(X) := \forall x \forall y \; (x \in X \wedge y \in X) \Rightarrow \neg E(x, y)$



X,Y,Z

Méta-algorithmes

Théorème (Courcelle '90)

Tout problème exprimable en logique MSO a un algorithme linéaire sur les instances de largeur arborescente fixée.

Méta-algorithmes

Théorème (Courcelle '90)

Tout problème exprimable en logique MSO a un algorithme linéaire sur les instances de largeur arborescente fixée.

Théorème (Courcelle–Makowsky–Rotics '00)

Tout problème exprimable en logique MSO a un algorithme polynomial sur les instances de largeur de clique fixée.

On ne peut pas aller plus loin que la largeur de clique bornée

Méta-algorithmes

Théorème (Courcelle '90)

Tout problème exprimable en logique MSO a un algorithme linéaire sur les instances de largeur arborescente fixée.

Théorème (Courcelle–Makowsky–Rotics '00)

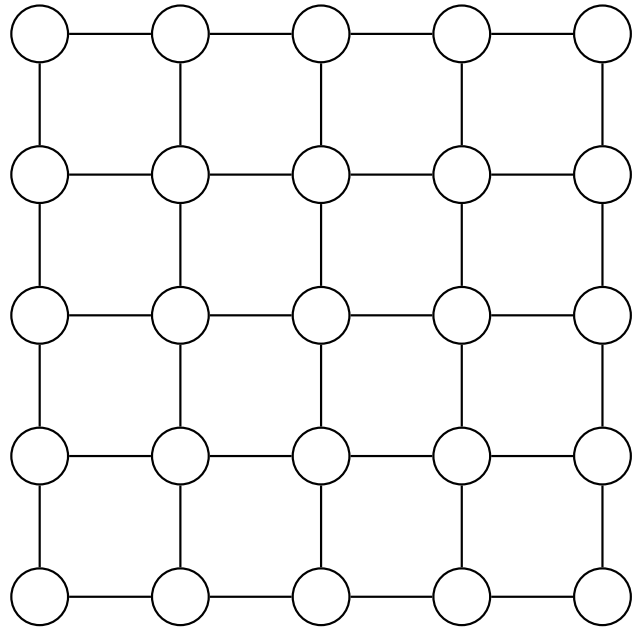
Tout problème exprimable en logique MSO a un algorithme polynomial sur les instances de largeur de clique fixée.

On ne peut pas aller plus loin que la largeur de clique bornée

Et la logique du premier ordre ?

La twin-width : une décomposition dynamique

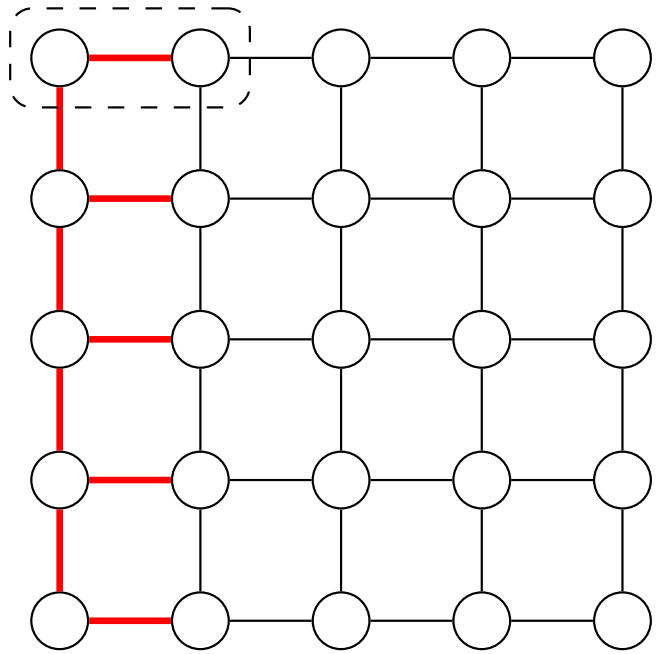
trigraphe : graphe avec deux types d'arêtes, noires et rouges



La twin-width : une décomposition dynamique

trigraphe : graphe avec deux types d'arêtes, noires et rouges

suite de contractions :
suite de trigraphes où tour à tour deux sommets sont unis

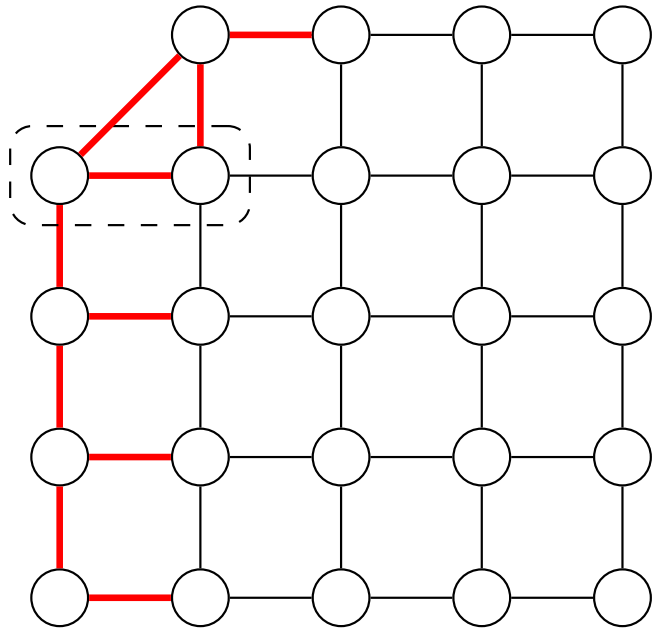


La twin-width : une décomposition dynamique

trigraphe : graphe avec deux types d'arêtes, noires et rouges

suite de contractions :
suite de trigraphes où tour à tour deux sommets sont unis

twin-width :
plus petit d tel que le (tri)graphe a une suite de contractions avec degré rouge au plus d

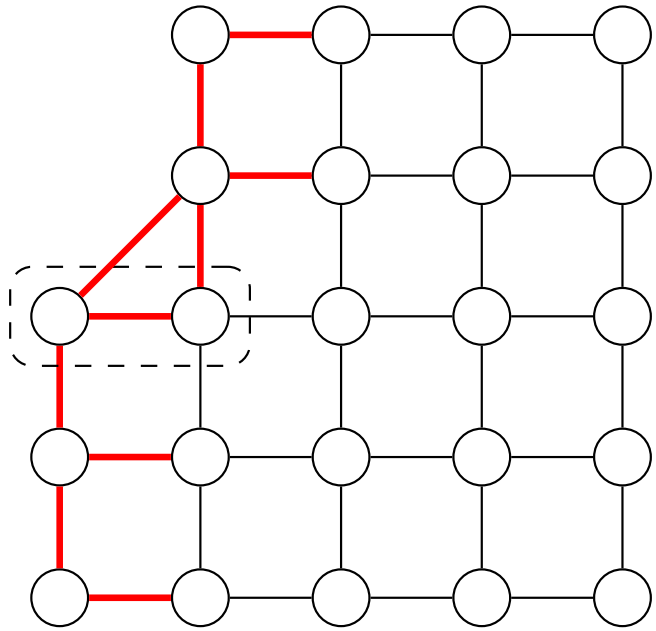


La twin-width : une décomposition dynamique

trigraphe : graphe avec deux types d'arêtes, noires et rouges

suite de contractions :
suite de trigraphes où tour à tour deux sommets sont unis

twin-width :
plus petit d tel que le (tri)graphe a une suite de contractions avec degré rouge au plus d

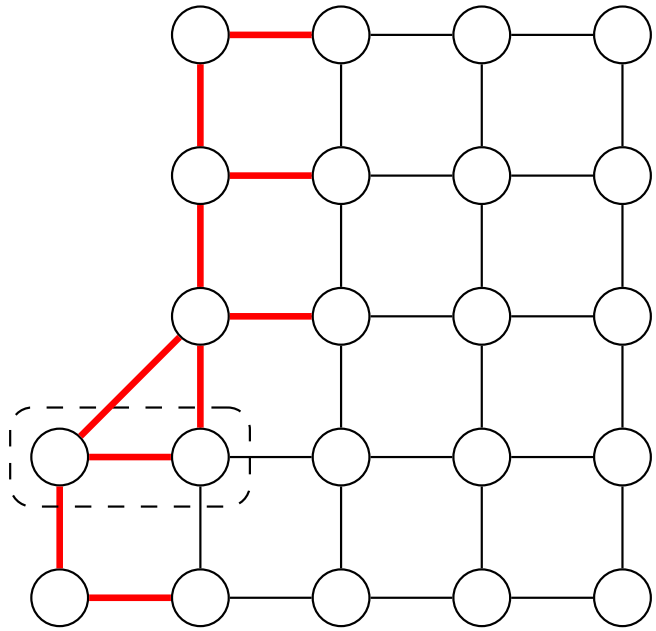


La twin-width : une décomposition dynamique

trigraphe : graphe avec deux types d'arêtes, noires et rouges

suite de contractions :
suite de trigraphes où tour à tour deux sommets sont unis

twin-width :
plus petit d tel que le (tri)graphe a une suite de contractions avec degré rouge au plus d

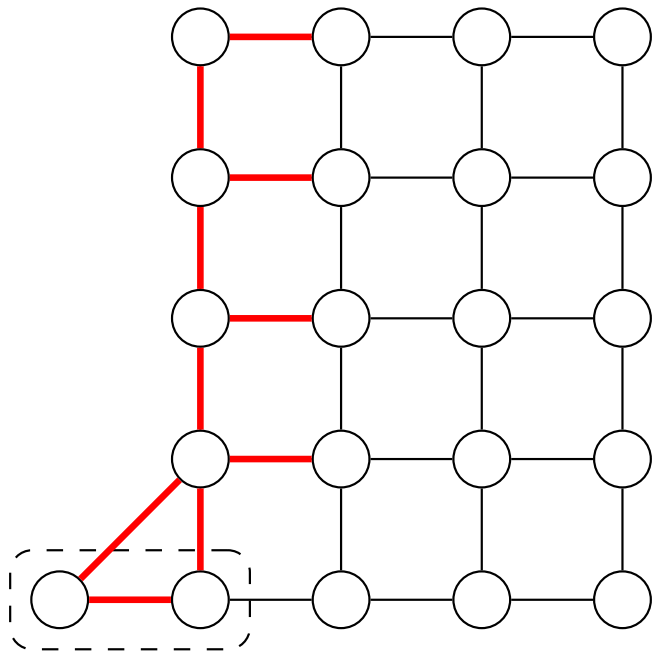


La twin-width : une décomposition dynamique

trigraphe : graphe avec deux types d'arêtes, noires et rouges

suite de contractions :
suite de trigraphes où tour à tour deux sommets sont unis

twin-width :
plus petit d tel que le (tri)graphe a une suite de contractions avec degré rouge au plus d

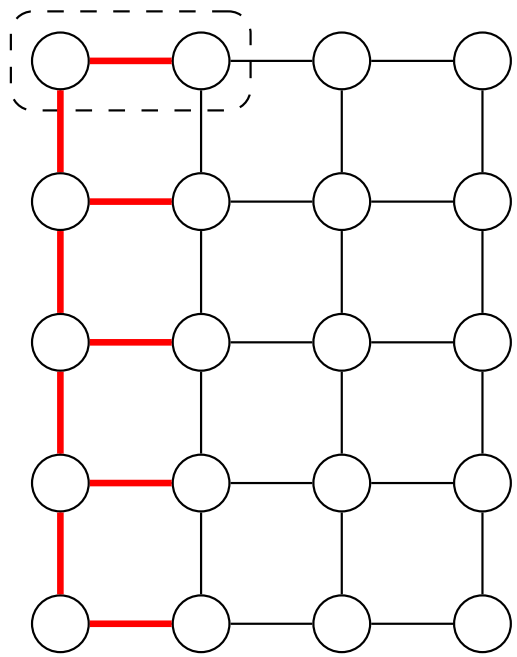


La twin-width : une décomposition dynamique

trigraphe : graphe avec deux types d'arêtes, noires et rouges

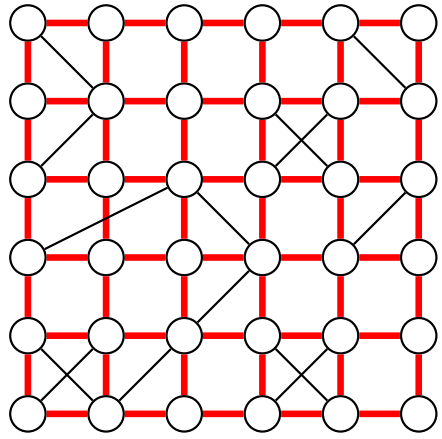
suite de contractions :
suite de trigraphes où tour à tour deux sommets sont unis

twin-width :
plus petit d tel que le (tri)graphe a une suite de contractions avec degré rouge au plus d

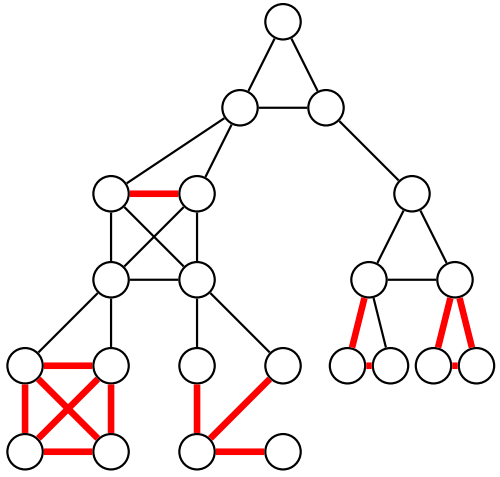


Paramètres réduits

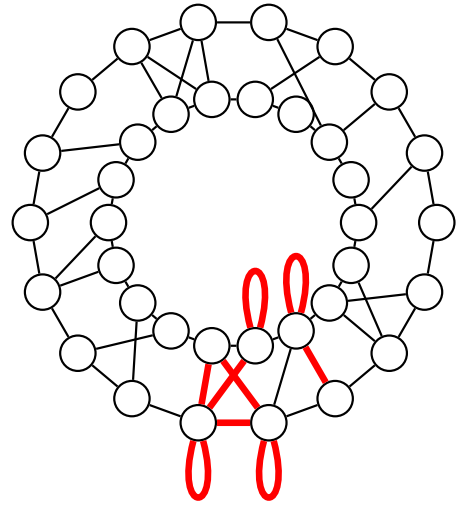
Autres conditions sur les graphes rouges



degré maximum réduit = twin-width



taille de composante réduite ≡ largeur de clique

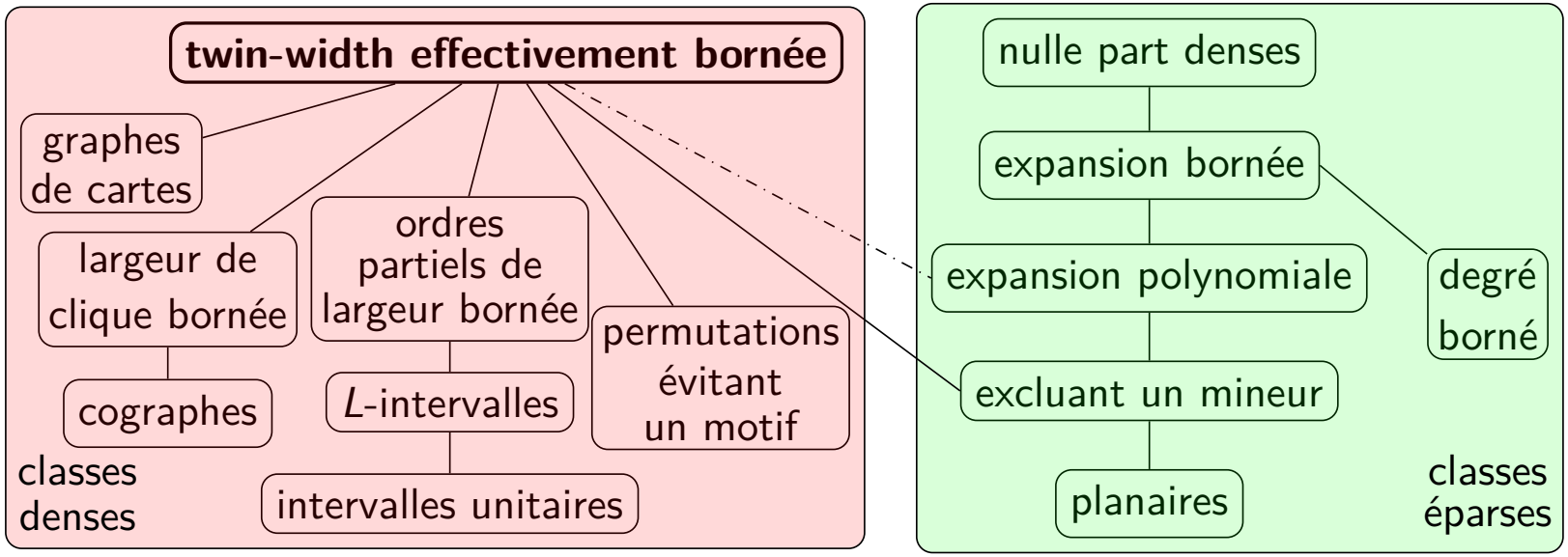


nombre d'arêtes réduit

Méta-algorithmes

Théorème (B., Kim, Thomassé, Watrigant '20)

Tout problème en logique du premier ordre a un algorithme linéaire sur les graphes de twin-width effectivement bornée.



Classes pour lesquelles on connaissait un tel algorithme en 2020

D'autres facettes des graphes au GdR-IFM

- **Coloration et sous-graphes induits**
  χ-bornitude ; grands stables et cliques (Erdős–Hajnal).

- **Reconfiguration de solutions**
  Colorations et stables : connexité, diamètre et complexité.

- **Algorithmique distribuée**
  Algorithmes locaux, certification et étiquetage des graphes.

- **Graphes et cartes aléatoires**
  Bijections, génération aléatoire et limites d'échelle.

- **Graphes géométriques et topologiques**
  Dessins, croisements, plongements et graphes d'intersection.

Merci pour votre attention !