

# TP 3 - Algorithmes sur les graphes

21 octobre 2011

Pour toutes questions, suggestions, remarques ou autres, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à edbonnet@hotmail.com en mettant en objet [TP Caml].

## 1 Introduction

Si les graphes n'apparaissent pas en tant que tel dans le programme ils sont sous-jacemment omniprésents :

- un automate n'est rien d'autre qu'un graphe étiqueté avec des sommets distingués (initiaux et finals).
- un arbre est un graphe très particulier (sans cycle et connexe).

Les graphes constituent un outil puissant et fondamental en informatique théorique et, à ce titre, apparaissent fréquemment dans les sujets de concours. Nous allons donc nous y préparer ici en découvrant quelques incontournables.

Un graphe  $G$  non orienté et valué (ou étiqueté, ou encore pondéré) est la donnée d'un ensemble de sommets  $S$  et d'un ensemble d'arêtes  $A$  inclus dans  $Set_2(S) \times V$  où  $V$  est l'univers des étiquettes, est  $Set_i(E)$  est l'ensemble des sous-ensembles à  $i$  éléments de  $E$ . Dans toute la suite,  $n$  désigne le nombre de sommets et  $m$  le nombre d'arêtes. Constatons que la définition interdit les boucles (i.e., les arêtes ayant pour extrémités le même sommet) En outre, les graphes seront supposés sans multiplicité (i.e., on n'aura pas deux arêtes distinctes partageant les mêmes extrémités), et  $V$  sera un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  (pas d'arêtes de poids négatifs). Un chemin dans  $G$  est une séquence  $s_1, s_2, \dots, s_k \in S^k$  telle que  $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, \exists v_i \in V, (\{s_i, s_{i+1}\}, v_i) \in E$ . La longueur du chemin est  $\sum_{i=1}^{k-1} v_i$ . Un cycle est un chemin tel que le premier sommet de la séquence est aussi le dernier sommet.

## 2 Plus courts chemins

### 2.1 Algorithme de Dijkstra

Un problème naturel, utile dans de nombreuses situations (télécommunication, transport, ...) est de trouver le plus court chemin d'un sommet  $s$  à un sommet  $t$  donnés.

**Question 1** Implémenter un parcours de graphe depuis le sommet  $s$  réalisant des choix gloutons et mettant à jour la distance minimale entre  $s$  et un autre sommet rencontré. Le programme devra renvoyer un plus court chemin de  $s$  à  $t$  sous la forme d'une liste de sommets, ainsi que la longueur de ce chemin.

**Question 2** Votre algorithme donne-t-il toujours le plus court chemin entre  $s$  et  $t$ ? Quelle est sa complexité en fonction de  $n$  et de  $m$ ?

## 2.2 Algorithme de Floyd-Warshall

On souhaite maintenant calculer les longueurs des plus courts chemins entre toutes les paires de sommets du graphe. On cherche bien sûr quelque chose de plus efficace que d'itérer Dijkstra.

**Question 3** Se souvenir de l'astuce principale de l'algorithme de Mac-Naughton et Yamada afin de trouver et d'implémenter un algorithme en  $O(n^3)$  qui renvoie la table des distances.

## 3 Arbres couvrants de poids minimal

Un sous-graphe  $G' = (S', A')$  d'un graphe  $G = (S, A)$  est un graphe tel que  $S' \subseteq S$  et  $A' \subseteq A$ . Un arbre est un graphe connexe sans cycle. Un arbre couvrant d'un graphe  $G = (S, A)$  est un sous-graphe  $G' = (S, A')$  de  $G$  tel que  $G'$  est un arbre. Le poids d'un arbre couvrant est la somme des poids de ses arêtes. On s'intéresse maintenant au problème suivant : étant donné un graphe  $G$ , trouver un arbre de poids minimal.

### 3.1 Algorithme de Prim

**Question 4** Proposer et implémenter un algorithme glouton qui calcule un arbre couvrant du graphe.

**Question 5** Un arbre couvrant calculé par cet algorithme est-il toujours de poids minimal?

### 3.2 Génération aléatoire de labyrinthe

Dans le film "Inception" de Christopher Nolan, Tom Cobb (L. DiCaprio) demande à Ariane (E. Page) de dessiner en 2 minutes un labyrinthe qui soit suffisamment difficile pour demander plus d'une minute de réflexion pour en sortir. Ici, vous allez faire mieux ; vous allez écrire un programme (vous n'êtes pas obligés de l'écrire en moins de 2 minutes) qui en quelques millisecondes affiche un labyrinthe qui satisfait les exigences de Cobb.

**Question 6** Dédurre de Prim un programme qui dessine un labyrinthe aléatoire dans la fenêtre graphique.