

# TP 4 - Jeux sur les entiers

25 novembre 2011

Pour toutes questions, suggestions, remarques ou autres, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à edbonnet@hotmail.com en mettant en objet [TP Caml].

## 1 Malin comme un sphinge

Un sphinx (qui pour les besoins de l'exercice prendra mieux la défaite que le sphinx d'Édipe) vous propose le jeu suivant. Il vous donne deux entiers  $x$  et  $y$  ainsi qu'une liste  $S$  d'opérations sur les entiers. Partant de l'entier 1, vous devez alors trouver une séquence minimale d'opérations de  $S$  pour atteindre  $x$  en restant tout le temps dans l'intervalle  $[[1, y]]$ . On note  $\nu(S, x, y)$  la taille d'une telle séquence minimale et on fixe l'ensemble d'opérations  $\mathcal{R} = \langle x \mapsto x + 1, x \mapsto 3x, x \mapsto 4x, x \mapsto x - 2 \rangle$ .

**Question 1** Combien valent  $\nu(\mathcal{R}, 15, 99)$ ,  $\nu(\mathcal{R}, 39, 99)$ ? Proposer un bon majorant pour  $\nu(\mathcal{R}, 99, 99)$ . Au fait, pourquoi  $\forall x \leq y, \nu(\mathcal{R}, x, y) < \infty$ ?

**Question 2** Trouver le plus petit triplet d'entiers  $(x, y, z)$  pour l'ordre lexicographique tel que  $\nu(\mathcal{R}, x, z) < \nu(\mathcal{R}, x, y)$ . Trouver le plus petit couple d'entiers  $(x, y)$  pour l'ordre lexicographique tel que  $\nu(\mathcal{R}, x, y) < \nu(\mathcal{R} \setminus \{x \mapsto x - 2\}, x, y)$ . À quel adage populaire cette situation correspond-elle?

**Question 3** Écrire une fonction de type `(int -> int) list -> int -> int -> automate` qui prend en entrée un ensemble d'opérations  $S$  et un entier cible  $k$  et un entier maximum  $n$  et qui renvoie l'automate  $A_{S,k,n}$  correspondant au jeu du sphinx. À quoi correspond  $L(A_{S,k,n})$ ?

**Question 4** À quoi correspond  $\nu(S, k, n)$  pour l'automate  $A_{S,k,n}$ ? En déduire une fonction de type `(int -> int) list -> int -> int -> int` qui prend en argument  $S, k, n$  et retourne  $\nu(S, k, n)$ .

**Question 5** Calculer  $\nu(\mathcal{R}, 99, 99)$ . Aviez-vous vu juste à la première question?

**Question 6** Que valent  $\max_k \nu(\mathcal{R}, k, 99)$ ,  $\max_k \nu(\mathcal{R}, k, 999)$ ,  $\max_k \nu(\mathcal{R}, k, 9999)$ ?

## 2 Juniper Green

Le jeu de Juniper Green, aussi appelé jeu des diviseurs et des multiples, est un jeu à deux joueurs où chaque joueur joue à tour de rôle un entier entre 1 et  $N$  (ici on prendra  $N=100$ ), diviseur ou multiple du nombre précédemment joué par l'adversaire. Chaque nombre ne peut être joué qu'une seule fois. Voici un exemple de début de partie 43-86-2-16-64-8-4-96-6-30...

**Question 7** *Quelle règle est-on obligé d'ajouter sur le premier coup pour que le jeu présente un intérêt ?*

**Question 8** *Écrire une fonction de type `int -> int list -> int list` qui prend en argument un entier et la liste des coups déjà joués et renvoie la liste des coups suivants possibles.*

**Question 9** *Qui gagne si les deux joueurs adoptent la même stratégie de jouer le plus gros entier possible à chaque coup ? Quelle est alors la partie ?*

**Question 10** *Qui gagne si les deux joueurs adoptent la même stratégie de jouer le plus petit entier parmi tous leurs coups possibles minimisant le nombre de réponses de l'adversaire ? Quelle est alors la partie ?*

Une stratégie est une fonction qui associe à un historique de partie (liste des coups de la partie en cours) le coup choisi. Une stratégie gagnante est une stratégie qui, appliquée, amène toujours à la victoire.

**Question 11** *Expliquer pourquoi un des deux joueurs a une stratégie gagnante. Proposer un algorithme qui calcule une stratégie gagnante pour le joueur concerné. Quelle est sa complexité ?*

**Question 12** *Au moyen d'heuristiques concevoir un petit programme qui joue le mieux possible. Faire s'affronter vos programmes.*

Le jeu de Juniper Green possède une version solitaire où le but est de trouver une séquence maximale respectant les règles du jeu.

**Question 13** *Proposer un algorithme qui calcule une plus longue séquence. Quelle est sa complexité ?*

**Question 14** *Essayer de trouver une plus longue séquence possible.*