Rapport : Autour du Théorème de VAN DER WAERDEN

Les objectifs précédemment énoncés ont pu être remplis : le théorème peut être démontré grâce aux savoir-faire de CPGE, et il est possible d'établir une borne inférieure des nombres de van der Waerden. Enfin on a pu retrouver les valeurs effectives des plus petits d'entre eux par l'écriture d'algorithmes en Caml.

1 Introduction

Le théorème de van der Waerden, sous les formes finie et infinie, toutes deux équivalentes, assure l'existence de suites arithmétiques quelle que soit la partition des entiers naturels effectuée. Démontré en 1927, il a fait depuis l'objet de nombreuses preuves. On exposera ici la preuve proposée par A.Y. KHINCHIN.
On démontrera l'équivalence des différentes formulations du théorème. Les nombres de van der Waerden sont aujourd'hui toujours assez mal connus. Ce TIPE propose une minoration de certains nombres de van der Waerden puis propose différents algorithmes permettant de calculer les valeurs connues.

2 Le Théorème de van der Waerden

Commençons par quelques définitions et remarques nécessaires à la compréhension du théorème.

Définition 1 On appelle r-**coloriage** toute application de $\mathbb{N}$ ou de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, r]\!]$.

Définition 2 On appelle **suite arithmétique** de longueur ℓ toute partie de la forme $\{u, u+a, ..., u+(\ell-1)a\}$, où $a \geqslant 1$ et $u \geqslant 0$ sont des entiers.

On peut alors énoncer le théorème.

Théorème 2 (théorème de VAN DER WAERDEN, version infinie). Pour tout coloriage de $\mathbb{N}^*$ en $r > 0$ couleurs, pour tout $\ell > 0$, il existe dans $\mathbb{N}^*$ une progression arithmétique monochromatique de longueur ℓ.
On démontre en fait une autre version du théorème, qui s'avère être équivalente.

Théorème 1 (théorème de VAN DER WAERDEN, version finie). Soit ℓ et r deux entiers strictement positifs. Il existe un entier $w(\ell, r)$ tel que pour tout $n \geqslant w(\ell, r)$, pour tout coloriage de $[\![1, n]\!]$ en r couleurs, il existe dans $[\![1, n]\!]$ une progression arithmétique monochromatique de longueur ℓ.

preuve En annexe.

Théorème 3 Soit $r > 0$ Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $\ell \geqslant 2$, tout r-coloriage de $\mathbb{N}$ admet une suite arithmétique de longueur ℓ
2. Pour tout $\ell \geqslant 2$, $w(\ell, r)$ existe

preuve En annexe.

3 Calcul d'une borne inférieure pour w(l,2)

On démontre l'inégalité suivante. **Théorème** $w(\ell, 2) \geqslant 2^{\ell/2} \cdot \sqrt{\ell - 1}$.

Preuve La preuve repose sur la méthode probabiliste d'Erdös et sur le lemme suivant :
Lemme. Nombre de suites arithmétiques de longueur ℓ
Soit n un entier naturel strictement positif. Le cardinal de l'ensemble S des suites arithmétiques de longueur ℓ contenues dans $[\![1, n]\!]$ est majoré par $\dfrac{n^2}{2(\ell - 1)}$

4 Calcul informatique des nombres de van der Waerden

Seuls cinq nombres de van der Waerden non triviaux sont connus : $w(3, 2) = 9, w(3, 3) = 27, w(4, 2) = 35, w(3, 4) = 76, w(5, 2) = 178$. Si le premier peut se calculer à la main, les autres requièrent l'assistance d'un ordinateur. Nous avons réalisé trois différents programmes pour les calculer en CamL.
Le premier, algorithme naïf, teste tous les coloriages possibles pour une longueur donnée. Il est très peu performant, seul $w(3, 2)$ peut être ainsi retrouvé.
Une deuxième idée consiste à stocker les coloriages sans suite arithmétiques monochromatiques. A chaque entier, on regarde si l'on peut prolonger les coloriages précédentes, ce qui permet de construire une nouvelle liste exhaustive des coloriages sans suites monochromatique. Le nombre de van der Waerden est le premier entier pour laquelle la liste de coloriage est vide. Trois nombres de van der Waerden peuvent ainsi être calculé.
Enfin, nous avons codé l'algorithme A décrit dans l'article *Some new van der Waerden numbers* de D. Beeler et E. O'Neil. On construit un coloriage sans suite arithmétique monochromatique aussi longtemps que possible. Pour cela, on associe la plus petite couleur possible à l'entier auquel on étend le coloriage. Si aucune couleur n'est possible, on change la couleur de l'entier précédent. Lorsque l'algorithme tente de modifier la couleur de 1, on a atteint le nombre de van der Waerden, car toutes les couleurs jouent le même rôle. On obtient ainsi quatre des cinq nombres actuellement connus.

5 Conclusion

Nous avons démontré le théorème de van der Waerden à partir d'une preuve connue et établi l'équivalence des version finie et infinie. Puis nous avons calculé une borne pour les nombres de van der Waerden et pu retrouver une part significative (4/5) des nombres actuellement connus.

6 Annexe

6.1 Preuve de la version finie

On raisonne par récurrence sur ℓ en montrant que pour tout $r > 0$, il existe un entier $\tilde{w}(\ell, r)$, ce qui assurera que l'ensemble des entiers vérifiant la propriété " contenir une suite arithmétique monochromatique de longueur ℓ pour tout coloriage " est non vide. $w(\ell, r)$ est

alors le minimum de cet ensemble ($w(\ell, r) \leqslant \tilde{w}(\ell, r)$)
Pour $\ell = 2$, le résultat est évident. En effet, $w(2, r) = r + 1$ car parmi $r + 1$ points coloriés en r couleurs, il existe deux points de la même couleur, qui forment donc une suite arithmétique de longueur 2.
Supposons le résultat acquis au rang ℓ. Soit $r > 0$ fixé. On définit par récurrence deux suites, q et w telles que $q_0 = 1$ et $w_0 = w(\ell, r)$ et, pour $s > 0$, si q_{s-1} et w_{s-1} sont construits, $q_s = 2w_{s-1}q_{s-1}$ et $w_s = w(\ell, r^{q_s})$. Montrons que $w(\ell + 1, r) \leqslant q_r$.

On notera $a \approx b$ si a et b sont de même couleur, et, plus généralement, pour $k > 0$, $\delta = (a, a+1, ..., a+k-1) \approx \delta' = (b, b+1, ..., b+k-1)$ si pour tout $i \in [\![0, k-1]\!], a+i \approx b+i$ et on dira que δ et δ' sont de même type. On remarque que pour des segments de longueur k, il y a r^k types possibles.

On fixe désormais un segment Δ de longueur q_r. Par définition, $q_r = 2q_{r-1}w(\ell, r^{q_{r-1}})$, donc on peut voir Δ comme une suite de $2w(\ell, r^{q_{r-1}})$ sous-segments de longueur q_{r-1}. On dispose donc dans la moitié gauche de Δ d'un progression arithmétique de longueur ℓ de sous-segments de même type, notés $\Delta_1, ..., \Delta_l$. On note d_1 la différence entre deux sous-segments, c'est-à-dire la différence entre les premiers termes de deux sous-segments consécutifs. On ajoute Δ_{l+1} le sous-segment à distance d_1 de Δ_l. Δ_{l+1} est encore dans Δ (éventuellement dans la seconde moitié), et on ignore son type.

On itère ce procédé en l'appliquant au segment Δ_1, ce qui nous donne ℓ sous-segments de même type dans chacun des Δ_i, puisque ceux-ci sont de même type d'après la première étape, et ℓ sous-segments de types inconnus dans Δ_{l+1}. On définit de même d_2 entre deux termes consécutifs de la suite de sous-segments dans un des Δ_i. On ajoute les $\ell + 1$ termes qui continuent les suites arithmétiques, et qui sont bien dans les Δ_i On procède ainsi r fois.

On ainsi obtenu des segments de longueurs q_0, i.e. des entiers, que l'on peut noter $\Delta_{i_1 1_2 ... i_r}$ où $1 \leqslant i_1, ..., i_r \leqslant \ell + 1$.
On a, pour $1 \leqslant s \leqslant r$ et $1 \leqslant i_1, ..., i_s, i'_1, ..., i'_s \leqslant \ell$, $\Delta_{i_1...i_s} \approx \Delta_{i'_1...i'_s}$ et donc en particulier pour $1 \leqslant i_{s+1}, ..., i_r \leqslant \ell + 1$, on a

$$\Delta_{i_1...i_s i_{s+1}...i_r} \approx \Delta_{i'_1...i'_s i_{s+1}...i_r}$$

.
On a de plus, pour $1 \leqslant s \leqslant r$, et $1 \leqslant i_1, ..., i_r \leqslant \ell$,

$$\Delta_{i_1...i_{s-1} i_s+1, i_{s+1}...i_r} - \Delta_{i_1...i_{s-1} i_s, i_{s+1}...i_r} = d_s$$

On considère les $r + 1$ nombres $a_0 = \Delta_{(l+1)(l+1)...(l+1)}, a_1 = \Delta_{1(l+1)...(l+1)}, ..., a_r = \Delta_{1...1}$. Par le principe des tiroirs, on dispose de s et t, $s \leqslant t$ tels que $a_s \approx a_t$.

On vérifie alors que la suite $c_i, 1 \leqslant i \leqslant \ell + 1$ définie par

$$c_i = \Delta \underbrace{1...1}_{s} \underbrace{i...i}_{t-s} \underbrace{(l+1)...(l+1)}_{r-t}$$

convient. Les ℓ premiers termes sont de même couleur d'après la première remarque, et le dernier de la couleur du premier par choix de s et t. De plus, ils forment bien une progression arithmétique de raison $d_{s+1} + d_{s+2} + ... + d_t$.

6.2 Preuve de l'équivalence des versions finie et infinie

La deuxième proposition implique clairement la première. Pour un coloriage de $\mathbb{N}$ donné, pour ℓ et r fixés, on se restreint au coloriage de $[\![1, w(\ell, r)]\!]$, où l'on dispose d'une suite

arithmétique monochromatique de longueur ℓ qui convient.
Réciproquement, on raisonne par l'absurde. Soit $r > 0$. On suppose qu'il existe $\ell > 0$ tel que $w(\ell, r)$ n'existe pas. On a donc pour tout $n \geqslant 1$, c_n un r-coloriage de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas de suite arithmétique de longueur ℓ.
On construit par récurrence un r-coloriage de $\mathbb{N}$ qui ne contient pas de suite arithmétique monochromatique.
La suite $(c_n(1))_{n\geqslant 1}$ est à valeurs dans $[\![1, r]\!]$ donc d'après le principe des tiroirs infini on dispose de ψ_1 une extractrice telle que $(c_{\psi_1(n)}(1))$ soit constante.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons $\psi_1, ..., \psi_n$ construites. On a $(c_{\psi_1 \circ ... \circ \psi_n(p)}(n+1))_p$ à valeurs dans $[\![1, r]\!]$ donc, à nouveau d'après le principe des tiroirs infini on dispose de ψ_{n+1} une extractrice telle que $(c_{\psi_1 \circ ... \circ \psi_n \circ \psi_{n+1}(p)}(n+1))$ soit constante.
On définit φ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ par $\forall n \in \mathbb{N}*, \varphi(n) = \psi_1 \circ ... \circ \psi_n(n)$. Enfin, on pose c le r-coloriage défini par $\forall n \in \mathbb{N}^*, c(n) = c_{\varphi(n)}(n)$ Vérifions que c est un r-coloriage sans suite arithmétique monochromatique de longueur ℓ.
La fonction φ est strictement croissante. En effet, pour tout n, ψ_n est strictement croissante, donc pour n fixé, on a $\varphi(n+1) = \psi_1 \circ ... \circ \psi_{n+1}(n+1) > \psi_1 \circ ... \circ \psi_n \circ \psi_{n+1}(n) \geqslant \psi_1 \circ ... \circ \psi_n(n) = \varphi(n)$.
Considérons une suite arithmétique de longueur ℓ de $\mathbb{N}$ colorié par c. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ le dernier terme de cette suite. Sur $[\![1, N]\!]$, c coïncide avec $c_{\psi_1 \circ ... \circ \psi_N(N)}$ donc c ne contient pas de suite arithmétique monochromatique. C'est absurde.
Ainsi, pour tout $\ell \geqslant 2, w(\ell, r)$ existe.