Introduction à la combinatoire

Edwige Cyffers

Ce document regroupe le contenu des deux cours donnés au groupe débutant du club de mathématiques discrètes de Lyon les 11 et 25 mars 2018. Le premier cours correspond aux parties 1 à 3 et le second aux suivantes. Il contient plus d'exercices que ce qui a pu être traité pendant ces huit heures. Notamment il n'inclut pas tous les indices qui ont été donnés pendant les séances et les exercices peuvent donc sembler un peu difficile, et les solutions apportées sont assez courtes. Cependant, j'espère qu'il permettra à ceux qui le souhaitent de retravailler plus facilement ce sujet.

Table des matières

1 Préliminaires

1.1 But de la combinatoire

Le but de cette séance va être de répondre à la question combien y a-t-il d'objets qui vérifient cette propriété ? On va faire ce qu'on appelle plus précisément de la combinatoire énumérative. On appelle dénombrement cette action de compter le nombre d'objets.

1.2 Les ensembles

Le but est de déterminer le cardinal d'un ensemble, c'est-à-dire le nombre d'objets que contient cet ensemble.

Un ensemble est une collection d'objets dont l'ordre n'a pas d'importance, et comptés sans multiplicité. On peut définir un ensemble en listant ses éléments ou en donnant les propriétés qu'ils vérifient.

On va se concentrer sur les ensembles qui n'ont qu'un nombre fini d'éléments. On dit de plus qu'un élément x appartient à l'ensemble A et on note $x \in A$ si cet élément fait partie des éléments de A. On dit que B est inclus dans A, noté $B \subseteq A$ si tous les éléments de B appartiennent à A.

Exemple 1. — définition en listant les éléments : $\{1, 5, 3\}$ ou $\{pomme, poire\}$
— définition par sélection : $\{n : n \leq 30, \text{n est un entier naturel pair}\}$
— l'ordre n'importe pas : $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$
— la multiplicité non plus : $\{1, 2, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
— Les cardinaux des ensembles précédents sont : $3, 2, 16, 3$

Remarque 1. On définit aussi l'ensemble qui ne contient aucun élément, on l'appelle l'ensemble vide et on le note $\emptyset$.

Remarque 2. On considère que deux ensembles sont égaux lorsqu'ils contiennent les mêmes éléments. Si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ alors les deux ensembles sont égaux.

On dit qu'un élément x appartient à un ensemble A quand x fait partie des éléments de A, et on note $x \in A$. On dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B quand tous les éléments de A font aussi partie des éléments de B, et on note $A \subseteq B$.

1.3 Tourisme mathématique

On peut utiliser la combinatoire dans différents domaines : pour compter tout type d'objets comme des graphes, pour calculer des probabilités, pour prouver l'existence de certaines propriétés. On retrouve souvent certains nombres dans des problèmes qui n'ont a priori rien à voir, comme la suite de Fibonacci, les nombres de Catalan.

Ainsi la suite de Fibonacci apparaît dans le nombre de façon de pouvoir parcourir une droite de longueur fixée avec des pas de taille 1 ou 2, dans les spirales logarithmiques, dans des modèles simplifiés d'évolution de population.

Les nombres de Catalan qui sont à la fois le nombre de parenthésages, le nombre d'arbres binaires, de triangulation du polygone convexe .

1.4 Exercices

Calculer le cardinal des ensembles suivant :
— $E = \{n : 0 \leq n \leq M\}$
— $F = \{n : 0 < n < 100$ et n est divisible par $5\}$

2 Le principe des tiroirs

2.1 Énoncé

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si on range $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, alors on dispose d'au moins un tiroir contenant au moins deux chaussettes.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant que chaque tiroirs contient au plus une chaussettes. On peut alors majorer le nombre de chaussettes par n.

Une preuve sans utiliser l'absurde est la suivante :

Par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons le résultat acquis pour n. On considère $n+1$ tiroirs et $n+2$ objets. On fixe un tiroir. S'il contient plus de deux chaussettes le résultat est acquis, sinon il contient au plus une chaussette donc il reste au moins $n+1$ chaussettes à ranger dans les n autres tiroirs, et on applique l'hypothèse de récurrence. $\square$

Remarque 3. Ce résultat est aussi appelé principe des tiroirs de Dirichlet ou pigeonhole principle en anglais.

2.2 Version généralisée

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \mathbf{N}^*$. Si on range k chaussettes dans n tiroirs alors il existe un tiroir contenant au moins $\lceil \frac{k}{n} \rceil$ chaussettes.

2.3 Exercices

2.3.1 Application directe

On range 23 pommes dans 5 paniers. Montrer qu'il existe au moins un panier contenant 5 pommes.

Démonstration. Exacte application avec les paniers qui remplacent les tiroirs et les pommes les chaussettes : $\lceil \frac{23}{5} \rceil = 5$ $\square$

2.3.2 Lemme des poignées de main

On considère l'ensemble des élèves présents dans la salle. On suppose que la relation "se connaître" est symétrique, c'est-à-dire que si Paul connaît Julie alors Julie connaît Paul. Alors il existe deux élèves qui connaissent le même nombre de personnes.

Démonstration. On range les personnes selon leur nombre d'amis. (personnes = chaussettes, nombre d'amis = tiroirs). On note n le nombre d'élèves. A priori, chaque élève peut connaître entre 0 et $n-1$ personnes. Mais on peut améliorer cet encadrement car on ne peut pas avoir simultanément un élève ne connaissant personne et un connaissant tout le monde. Il y a donc $n-1$ nombre d'amis possibles, donc deux personnes ont le même nombre d'amis. $\square$

2.3.3 Cheveux lyonnais

Il y a 1300000 qui vivent dans la métropole de Lyon. Un être humain a au plus 600000 cheveux sur la tête. Montrer que l'on peut trouver 3 personnes avec le même nombre de cheveux.

2.3.4 Théorème d'Erdös-Szekeres

On écrit les entiers de 1 à 101 dans un ordre quelconque. Alors il est toujours possible d'en sélectionner 11 qui forme une suite monotone, c'est-à-dire soit croissante soit décroissante.

Démonstration. On raisonne par l'absurde. A chaque nombre i on associe deux nombres : l'un est la taille de la plus longue suite croissante qui finit en i, qu'on note c_i et l'autre la taille de la plus longue suite décroissante d_i. Par hypothèse, $1 \leq c_i \leq 10$ et $1 \leq d_i \leq 10$. Il y a donc 100 choix possibles pour chaque nombre. D'après le principe des tiroirs, il existe donc deux nombres distincts a et b (on suppose que a apparaît avant b dans la suite de nombres) qui ont leur couple identique. Le fait que $c_a = c_b$ impose $a > b$: sinon, on pourrait continuer la suite croissante finissant en a en ajoutant b. Mais alors $d_a < d_b$ ce qui est absurde. □

Remarque 4. Il faut bien un certain nombre d'éléments au minimum, par exemple : $6, 5, 9, 8$ ne contient pas de suite de trois éléments monotones.

Remarque 5. Bien sûr le théorème n'est pas formulé avec 100 et 11. Essayez de généraliser avec $(r-1)(s-1)+1$ montrez qu'on a au moins une suite croissante de r termes ou décroissante de s termes.

2.3.5 Suppléments

- On fixe dix entiers inférieurs strictement à 100. On peut trouver deux sous ensembles de même somme (990 <1024).
- Ramsey : Theorem on friends and strangers.
- soit $n+1$ entiers, on peut en trouver deux dont la différence est multiple de n.
- Parmi quatre entiers, on peut en trouver deux dont la somme ou la différence est multiple de cinq. $(4, 2, 5)$ est un contre exemple avec seulement trois.
- en géométrie : 6 points dans un rectangle de 3×4. Il y en a deux à moins de $\sqrt{5}$ de distance.

3 Principe d'inclusion exclusion

Idée générale : calculer directement le cardinal d'un ensemble est souvent compliqué, on introduit d'autres ensembles dont on peut calculer le cardinal et on en déduit le résultat.

3.1 Opérations sur les ensembles

On définit l'union, l'intersection et le complémentaire d'un ensemble.

On note $A \cup B$ l'union des ensembles A et B. Par exemple $\{1, 6, 3\} \cup \{2, 6, 5\} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$. Si les ensembles n'ont aucun élément commun le cardinal de l'union est la somme des cardinaux.

On suppose qu'un ensemble A est dans un ensemble plus grand E. On note $E - A$, A^c ou $\overline{A}$ le complémentaire de A par rapport à E, c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui sont dans E mais pas dans A. En particulier on a $|\overline{A}| = |E| - |A|$

On note $A \cap B$ l'intersection des ensembles A et B. Par exemple $\{1, 6, 3\} \cap \{2, 6, 5\} = \{6\}$

3.2 Formule pour deux

On a $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

3.3 Généralisation

A simple titre de curiosité. Soient (A_i) des ensembles.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \left|\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i}\right|$$

3.4 Exercices

Le prouver si vous connaissez les récurrences ou les fonctions indicatrices.

Écrire la formule pour 3 et 4. Application directe : $A = \{n : 1 \leq n \leq 1000$ et n multiple de 3 de 5 ou de $7\}$ et $B = \{n | 1 \leq n \leq 1000$ et n non multiple de 2, 3, 5 ou $7\}$. Calculer le cardinal de A et B.

Démonstration. On note C, D et E respectivement les multiples de 3, de 5, et de 7. On a donc $A = C \cup D \cup E$. Par ailleurs, $|\{n | 1 \leq n \leq 1000$ n est multiple de q$\}| = \lfloor \frac{1000}{q} \rfloor$. Donc $|A| = 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543$

De même on calcule le complémentaire de B. On a $|B| = 1000 - (500 + 333 + 200 + 142) + (166 + 100 + 71 + 66 + 47 + 28) - (33 + 23 + 14 + 9) + 4 = 228$. □

250 copies non blanches d'un concours d'Animath, avec trois exercices :
- 174 avec l'exercice 1,
- 136 avec l'exercice 2,
- 106 avec l'exercice 3,
- 74 avec les exercices 1 et 2,
- 80 avec les exercices 2 et 3,
- 38 copies complètes.

Combien ont fait les exercices 1 et 3 ? Combien sans faire le 2 ?

Démonstration. On a $250 = 174 + 136 + 106 - (74 + 80 + x) + 38$ donc il y a 50 copies de ce type, dont $50 - 38 = 12$ qui ont exactement les exercices 1 et 3. □

4 Comparaisons de cardinaux via des fonctions

4.1 D'un ensemble à un autre : les fonctions

Pour l'instant nous sommes toujours restés dans le même ensemble pour compter les objets. Un premier élargissement a été de partitionner cet ensemble ou de considérer un ensemble plus grand. Une autre généralisation possible est de compter un autre ensemble qui a le même nombre d'objet. Pour cela, il faut passer d'un ensemble à l'autre, et on utilise pour cela des fonctions.

Une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B va associer à chaque élément de A exactement un élément de B.

Exemple 2. La fonction de $\{1, ..., 10\} \to \{1, ..., 50\}$ qui associe à i l'élément $i \times 5$. Ou bien $\{1, n\} \to \{2, n + 1\}$ et $i \mapsto i + 1$.

Remarque 6. Au collège, la notion de fonction est surtout introduite via les fonctions linéaires et affines, ce qui conduit à faire surtout attention à l'opération faite sur un élément, et peu aux ensembles d'arrivée et de départ.

4.2 Injections, surjections et bijections

On parle d'injection quand tous les éléments de l'ensemble de départ sont associés à des éléments différents de l'ensemble d'arrivée. C'est-à-dire que si on prend deux éléments $x, y \in A$ et que $f(x) = f(y)$ alors $x = y$. Dans ce cas l'ensemble d'arrivée est au moins aussi gros que celui de départ donc $|A| \leq |B|$.

Exemple 3. Les fonctions $f : x \in \{1, \ldots, 5\} \mapsto x \in \{1, \ldots, 15\}$ et $g : x \in \mathbf{R} \mapsto 3 \times x + 2 \in \mathbf{R}$ sont injectives.

On parle de surjection quand tous les éléments de l'ensemble d'arrivée sont au moins associé à un élément de l'ensemble de départ. Dans ce cas, vu qu'on retrouve tout l'ensemble d'arrivée, l'ensemble de départ est au moins aussi gros, donc $|A| \geq |B|$.

Exemple 4. Les fonctions $f : x \in \mathbf{N} \mapsto 0 \in \{0\}$ et $g : x \in \{1, \dots, 100\} \mapsto \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \in \{0, \dots, 50\}$ sont surjectives.

On parle de bijection quand une fonction est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, chaque élément de l'ensemble d'arrivée est relié à un unique élément de l'ensemble de départ, donc les cardinaux sont égaux.

Exemple 5. La fonction identité est toujours bijective. La fonction $f : x \in \{0, \dots, 10\} \mapsto x + 5 \in \{5, \dots, 15\}$ est bijective.

4.3 Exercices

Démontrer les résultats précédents à l'aide du principe des tiroirs.

4.3.1 Lemme des bergers

Supposons qu'on dispose d'une fonction f de A dans B telle que chaque élément de B ait exactement n éléments qui pointent sur lui. Alors $|A| = n \times |B|$

Démonstration. Pour $y \in B$, on note A_y l'ensemble des éléments x de A tels que $f(x) = y$. Alors $A = \cup_{y \in B} A_y$, et l'union est disjointe avec $|A_y| = n$ pour tout y par hypothèse.

Donc $|A| = \sum_{y \in B} |A_y| = |B| \times n$ □

Une application : montrer que si une bergère connaît le nombre de pattes de ces moutons, elle peut en déduire le nombre de moutons.

Démonstration. On sait qu'il existe une fonction qui à chaque patte associe le mouton correspondant. On a donc $f : \{pattes\} \to \{moutons\}$ avec $|\{pattes\}|$ connus. Chaque mouton a quatre pattes, d'où $|\{moutons\}| = \frac{|\{pattes\}|}{4}$ □

4.3.2 Pour les forts

(Olympiades Balkaniques 1997) Soient $m, n > 1$ des entiers et S un ensemble de cardinal n, $A_1, ...A_m$ des sous ensembles de S. On suppose que $\forall x, y \in S, \exists i, (x \in A_i \wedge y \notin A_i) \vee (x \notin A_i \wedge y \in A_i)$ Montrer que $n \leq 2^m$

5 Coefficients binomiaux, arrangements et permutations

5.1 Choisir des éléments

Lorsqu'un problème demande de choisir des éléments, on va essayer de construire une fonction associée à un choix, et on va compter de combien de façon on peut construire la fonction, et regarder si plusieurs fonctions donnent lieu au même choix.

5.2 Avec répétition et ordre : une fonction

Rappel sur les puissances : pour $p, n \in \mathbf{N}*$, on note $n^p = n \times \cdots \times n$ avec p facteurs.

On a n choix successifs à faire parmi un ensemble de cardinal m. Par exemple on attribue un nombre inférieur à m à chaque élève. Une configuration va être décrite par une fonction de l'ensemble A des élèves de cardinal n dans l'ensemble $B = \{l | 1 \leq l \leq m\}$.

Alors on a m^n fonctions possibles, et autant de configurations différentes.

Exercice 1. Démontrer ce résultat.

Combien y a-t-il de codes possibles pour un cadenas à 4 chiffres ? (10000)

Combien y a-t-il de sous ensembles différents de $\{1, ..., n\}$? (2^n)

On choisit une glace à trois boules en choisissant avec soin l'ordre dans lequel les boules sont dans le cornet. Il y a 20 parfums possibles. Combien y a-t-il de cornets différents ? (8000)

5.3 Sans répétition mais avec un ordre

Rappel sur la factorielle. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on note $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$.

On doit à nouveau attribuer des éléments d'un ensemble B à des éléments d'un ensemble A. Cependant, on considère cette fois-ci qu'un éléments ne peut être attribué qu'une seule fois. On reprend le même exemple que précédemment mais on imagine qu'on a un grand chapeau dans lequel on a préparé des papiers avec chacun un numéro distincts entre 1 et m. On remarque que ce n'est possible d'aller jusqu'au bout que si $m \geq n$.

Alors on a $\frac{m!}{(m-n)!}$ choix possibles.

Exercice 2. Démontrer la formule précédente.

Des amis vont dans un parc d'attractions. Ils doivent choisir dans quel ordre ils vont faire cinq manèges différents. Combien y a-t-il de possibilités.(120)

Combien de façon peut-on ranger un jeu de cartes ? ($52! \simeq 10^{68}$)

Retour au glacier : cette fois-ci on ne veut pas avoir deux fois le même parfum. (6840)

5.4 Sans répétition et sans ordre : les coefficients binomiaux

Remarque 7. On s'autorise dans cette partie des preuves assez informelles, voire une simple indication pour les exercices qui n'ont pas été abordés. L'idée est avant tout de voir comment se ramener à des ensembles plus simples, en décomposant l'ensemble en des ensembles plus simples notamment et d'interpréter les formules.

Contrairement au paragraphe précédent, on peut aussi ne pas se soucier de quel élément de A est relié à un élément donné de B, et s'intéresser uniquement aux éléments qui ont été choisis. On se demande seulement quels sont les papiers qui ne sont plus dans le chapeau.

On note alors $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ le nombre de choix possibles.

Exercice 3. Démontrer ce résultat. Pour cela, utiliser le lemme des bergers pour regrouper les fonctions qui ont le même ensembles d'images.

5.4.1 De la symétrie

Montrer que $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ de deux façons.

Démonstration. Immédiat avec la formule.

Sinon, choisir les éléments que l'on prend, c'est comme choisir les éléments qu'on ne prend pas. A chaque ensemble de cardinal n on associe son complémentaire, qui est de cardinal $m-n$. □

5.4.2 Retour au glacier

Désormais on ne prend plus un cornet mais un pot, donc il n'y a plus d'ordre. Combien de choix possibles a-t-on ?($1140 = \binom{20}{3}$).

5.4.3 Le binôme de Newton

On connaît bien $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$. Avec quelques efforts, on a $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. Peut-on généraliser cette formule ?

C'est la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Démonstration. Chaque terme de la somme a une puissance globale de n car on prend un élément dans chacune des n parenthèses, donc on peut bien écrire la résultat sous la forme $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k y^{n-k}$.

Il faut maintenant calculer le nombre d'apparition de chaque type de terme (c'est-à-dire les c_k). Il suffit de choisir dans quelles parenthèses on prend x (car on prend alors y dans toutes les autres). Pour choisir k fois x on a $\binom{n}{k}$ choix possibles, d'où le résultat : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k y^{n-k}$ □

5.4.4 Marches sur un quadrillage

On souhaite passer du point $(0,0)$ au point $(5,3)$ en suivant uniquement le quadrillage, et en allant que vers le haut ou vers la droite. Combien de chemins sont possibles ? $\binom{8}{3}$

Généraliser ce résultat pour aller de $(0,0)$ à (p,q).

Démonstration. Pour choisir un chemin, il faut choisir les q pas parmi les $p+q$ pas qui vont vers le haut, d'où $\binom{q+q}{q}$ choix possibles. □

5.4.5 La formule de Pascal

Montrer la formule de Pascal : $\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} = \binom{m+1}{n}$.

Démonstration. On fixe un élément x de notre partie à $m+1$ éléments. On peut aller séparer les ensembles à n éléments selon si x est ou non dans l'ensemble. S'il y est, il ne reste plus que $n-1$ éléments à choisir parmi m, donc $\binom{m}{n-1}$ choix possibles. Dans l'autre cas, on a $\binom{m}{n}$ choix possibles, et on fait la somme car l'union est disjointe.

On peut aussi le faire avec la formule. □

5.5 Exercices

5.5.1 Jeu de cartes

On suppose qu'on a les combinaisons suivantes possibles au poker, avec une main de cinq cartes :

— La quinte flush : cinq cartes consécutives de la même couleur (on peut mettre l'As en premier ou après le Roi)
— La couleur : cinq cartes de la même couleur
— La quinte : cinq cartes consécutives mais pas forcément de la même couleur, sans être un quinte flush
— Le carré : quatre cartes de la même valeur
— La double paire : deux paires qui ne forment pas un carré.
— La paire : 2 cartes de même valeur qui ne forment pas un double paire ni un full ni un carré

Comptez le nombre de cas possibles pour chaque cas. ($10 \times 4, \binom{13}{5} \times 4 - 10 \times 4 = 5108, 10 \times 4^5 - 10 \times 4 = 10200, 13 \times 12 \times 4 = 624, 6 \times 13 \times 6 \times 12 \times 4 \times 11/2 = 123552, 6 \times 13 \times 48 \times 44 \times 40/6 = 1098240$)

5.5.2 Géométrie

On place n droites dans un plan qui ne sont ni parallèles ni concourantes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de point avec strictement plus de deux droites qui se croisent. Combien y a-t-il de triangles ? ($\binom{n}{3}$)

5.5.3 Intuitions combinatoires

On fixe un ensemble E à n éléments. Combien y a-t-il de façons de choisir A et B deux sous-ensembles tels que $A \subseteq B \subseteq E$? Et si on ne suppose plus $A \subseteq B$?

Démonstration. Dans le premier cas 3^n et dans le second 4^n, car il y a une bijection avec le nombre de fonctions de $\{1,\ldots,n\} \to \{1,2,3\}$ et $\{1,\ldots,n\} \to \{1,2,3,4\}$ respectivement. □

Montrer que $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

Démonstration. Compter de deux façons le nombre de façons de choisir un groupe de k personnes avec un chef parmi n personnes. □

Plus difficile : montrer l'égalité de Vandermonde : $\binom{p+q}{n} = \sum_0^n \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$.

Démonstration. On choisit n éléments dans un ensemble de $p+q$ éléments séparés en deux parties. $\square$

Montrer qu'un ensemble à $n > 0$ éléments a autant de sous ensembles de cardinal pair que de cardinal impair.

Démonstration. On fixe un élément x, et on construit une fonction qui à un ensemble associe un ensemble de parité opposée : si x est dans l'ensemble, on l'enlève, si x n'est pas dans l'ensemble, on l'ajoute. $\square$