

SESSION DE 2002**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques****option : physique**

problème de physique

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

Tournez la page S.V.P.

PROPRIETES MECANQUES DE L'ADN

Parce qu'il contient l'information pour la production de protéines spécifiques, l'ADN est le matériel génétique porteur de l'hérédité. Ce type de molécule, à la base de la vie, fait l'objet de très nombreuses études relevant de la génétique, de la biologie moléculaire, de la biochimie, etc. Les physiciens y contribuent aussi. Ce problème a pour but d'illustrer certaines de ces contributions concernant l'étude de propriétés mécaniques de l'ADN.

Dans sa forme la plus courante (ADN B), l'ADN est constitué de deux macromolécules très longues, enroulées, qui forment la double hélice découverte par Watson et Crick (cf. figure 1). Le squelette de chacun des brins de cette hélice (droite) est formé en alternance d'un groupement phosphate (chargé négativement) et d'un sucre (le désoxyribose), porteur lui-même d'une base azotée. Les deux brins sont reliés par des liaisons hydrogène entre les paires de bases. Dans l'ADN, il y a 4 bases possibles (A, T, G et C), qui s'apparient deux à deux : A s'apparie uniquement avec T (par deux liaisons hydrogène), et G uniquement avec C (par trois liaisons hydrogène). Les deux brins ont donc des structures complémentaires. Les paires de bases ont une forme à peu près plane et s'empilent à l'intérieur de la double hélice (un peu comme une pile d'assiettes).

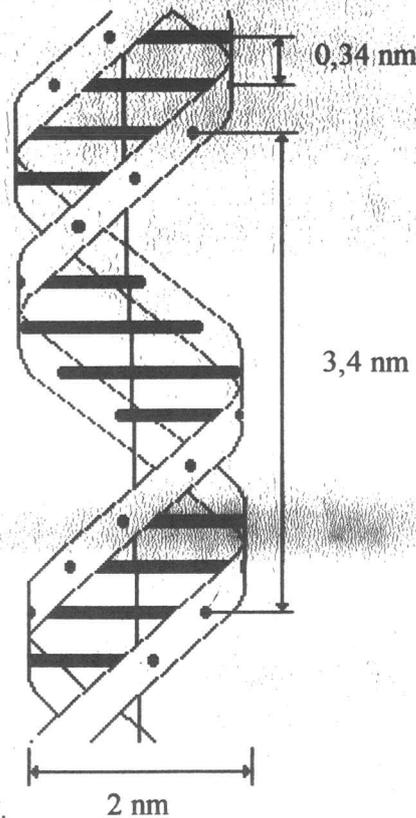


Figure 1 : Structure en double hélice de l'ADN.

Les paramètres géométriques de la structure en double hélice sont les suivants (en l'absence de toute contrainte mécanique extérieure) :

diamètre de l'hélice : $\Phi_0 = 2 \text{ nm}$
pas de l'hélice : $p_0 = 3,4 \text{ nm}$

distance entre les plans de deux paires de bases consécutives : $d_0 = 0,34 \text{ nm}$

Dans tout le problème, on étudie l'ADN du bactériophage λ (un virus), qui possède $M_0 = 48502$ paires de bases. Cet ADN est considéré en phase aqueuse, et à la température $T = 300 \text{ K}$.

On donne les valeurs numériques suivantes :

constante de Boltzmann :	$k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
charge élémentaire :	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
célérité de la lumière dans le vide :	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
accélération de la pesanteur :	$g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$
masse volumique de l'eau :	$\mu_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
masse volumique de la silice :	$\mu = 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
indice optique de l'eau :	$n_0 = 1,33$
indice optique de la silice :	$n = 1,45$
module d'Young de la silice :	$E = 7,2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$
viscosité de l'eau (à 20°C) :	$\eta = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$

L'espace est rapporté à un repère orthonormé Oxyz, dont on note \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y , \mathbf{u}_z les vecteurs unitaires .

Les différentes parties du problème, voire même les diverses questions à l'intérieur d'une même partie, sont très largement indépendantes.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

A - Caractéristiques géométriques de la molécule

- 1 - a - Déterminer la longueur au repos L_0 de cet ADN.
- b - Quelle est la longueur développée L_d de chaque brin ?

2 - L'ADN est une molécule flexible, dont on représente la conformation au repos par le modèle de la chaîne idéale : la molécule y est représentée par une suite de N segments rigides, de longueur $b = 100 \text{ nm}$. Le $n^{\text{ème}}$ segment est noté :

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{R}_n - \mathbf{R}_{n-1}$$

(où les vecteurs \mathbf{R}_{n-1} et \mathbf{R}_n correspondent à la position de chacune de ses extrémités). Chaque segment s'oriente de manière aléatoire, isotrope, et indépendamment des autres segments. Dans la suite du problème, on note entre crochets la moyenne statistique d'une grandeur aléatoire f , soit $\langle f \rangle$.

- a - Exprimer les valeurs moyennes $\langle \mathbf{r}_n \rangle$ et $\langle \mathbf{r}_n^2 \rangle$.
- b - Calculer $\langle \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_m \rangle$ pour $n \neq m$.
- c - On note $\mathbf{R} = \mathbf{R}_N - \mathbf{R}_0$ le vecteur joignant les deux extrémités de la chaîne. Calculer $\langle \mathbf{R} \rangle$ et $\langle \mathbf{R}^2 \rangle$ en fonction de N et b .
- d - Les résultats obtenus dépendent-ils de la dimension d de l'espace dans lequel se situe la chaîne aléatoire ?

Tournez la page S.V.P.

e - Combien chaque segment de la molécule d'ADN contient-il de paires de bases ?

Calculer numériquement N et $\bar{R} = \sqrt{\langle R^2 \rangle}$.

3 - Dans le modèle précédent, on suppose N grand.

a - Pourquoi la densité de probabilité de la variable \mathbf{R} est-elle Gaussienne ? Pour répondre à cette question, aucun calcul n'est à effectuer, mais on précisera le théorème utilisé.

b - En déduire que, en l'absence de contrainte extérieure, une macromolécule linéaire flexible, suffisamment longue, adopte la forme d'une pelote sphérique, de rayon caractéristique \bar{R} .

c - La distribution de probabilité ainsi obtenue paraît-elle en mesure de représenter convenablement la molécule très étirée ? Doit-on pour autant remettre en cause ce modèle ?

4 - Dans le modèle précédent, rien n'interdit à deux segments de se chevaucher. Dans la réalité, deux morceaux de l'ADN ne peuvent évidemment se chevaucher, ne serait ce que pour des raisons d'encombrement stérique. Expliquer qualitativement quelle incidence a cet effet sur la valeur de $\bar{R} = \sqrt{\langle R^2 \rangle}$.

B - Elasticité de l'ADN

1 - On soumet maintenant les deux extrémités de l'ADN à une force de traction F (plus précisément on exerce une force constante $\mathbf{F} = F\mathbf{u}_z$ sur l'extrémité \mathbf{R}_N , et une force $-\mathbf{F}$ sur l'autre extrémité \mathbf{R}_0 ; cf. figure 2), et on cherche à déterminer sa longueur moyenne $L = \langle |\mathbf{R}| \rangle$ à l'équilibre. On représente toujours la molécule comme une succession de N segments rigides de longueur constante b .

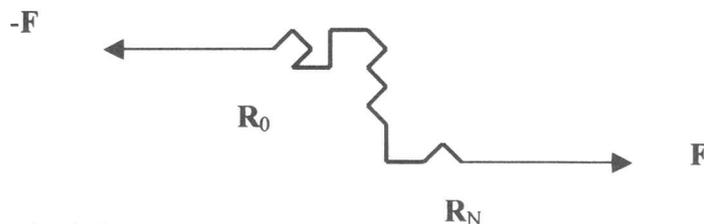


Figure 2 : Traction sur la molécule d'ADN.

a - Montrer que chaque segment est soumis de la part de ses voisins immédiats à deux forces, \mathbf{F} et $-\mathbf{F}$, en ses extrémités, qui tendent à aligner le segment \mathbf{r}_n colinéairement à \mathbf{F} .

b - En déduire que, dans ce champ de forces, chaque segment \mathbf{r}_n possède une énergie potentielle $E_p(\mathbf{r}_n) = -\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{F}$ (à une constante additive près).

c - Compte tenu de ces forces, l'orientation des différents segments n'est plus isotrope: chaque segment s'oriente indépendamment des autres, selon une distribution de Boltzmann à la température T . Ecrire la probabilité $d^2\mathcal{P}$ de trouver le segment \mathbf{r}_n orienté à l'intérieur de l'angle solide $d^2\Omega$. En déduire $\langle \mathbf{r}_n \rangle$.

d - Calculer $\langle \mathbf{R} \rangle$. Montrer que la longueur moyenne de l'ADN à l'équilibre est donnée par :

$$L = L_0 \mathcal{L}\left(\frac{Fb}{k_B T}\right)$$

où $\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$ est la fonction de Langevin. On posera $F_0 = \frac{k_B T}{b}$.

e - Etablir une analogie entre ce modèle et un modèle équivalent rencontré dans un autre domaine de la physique.

2 - a - Montrer que, si la force F est suffisamment faible, elle devient proportionnelle à la longueur de la molécule (loi de Hooke). Calculer sa constante de raideur K . Calculer numériquement F_0 et K pour l'ADN étudié.

b - Vers quelle limite tend $\langle \mathbf{R} \rangle$ si la force F est très grande devant F_0 ? Interpréter physiquement ce résultat.

3 - On appelle x_n, y_n, z_n les composantes de \mathbf{r}_n et X, Y, Z celles de \mathbf{R} selon les directions $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$ et \mathbf{u}_z (On rappelle que \mathbf{F} a été choisie colinéaire à \mathbf{u}_z).

a - Calculer $\langle x_n x_m \rangle, \langle y_n y_m \rangle$ et $\langle z_n z_m \rangle$. On envisagera séparément les cas $n = m$ et $n \neq m$.

b - En déduire $\langle X^2 \rangle, \langle Y^2 \rangle$ et $\langle Z^2 \rangle$, ainsi que les écarts quadratiques moyens $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$. On rappelle que l'écart quadratique moyen Δf d'une variable aléatoire f est défini par :

$$(\Delta f)^2 = \langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle$$

c - En déduire $(\Delta \mathbf{R})^2 = \langle (\mathbf{R} - \langle \mathbf{R} \rangle)^2 \rangle$.

d - Comment se comportent $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ et $\Delta \mathbf{R}$ à la limite des faibles forces (soit $F \ll F_0$) ? Commenter les résultats obtenus.

e - Donner les expressions de $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ et $\Delta \mathbf{R}$ à la limite des forces élevées (soit $F \gg F_0$).

f - On suppose N grand. Indiquer qualitativement comment sont distribuées les variables aléatoires X, Y et Z . En déduire la forme d'une macromolécule linéaire flexible lorsqu'elle est soumise à une force de traction. Discuter cette forme en fonction de la valeur de la force de traction.

4 - Calculer l'ordre de grandeur de la force F qui doit être appliquée à l'ADN étudié ici pour que sa longueur moyenne L soit égale à :

a - $L = 0,01 L_0$,

b - $L = 0,99 L_0$.

C - Expérience de mesure de force avec un micro-levier

Diverses techniques de micromanipulation permettent désormais d'exercer des forces contrôlées sur une macromolécule unique. Nous allons en explorer quelques unes qui ont permis d'étudier les propriétés mécaniques d'une molécule d'ADN.

La première expérience consiste à utiliser comme capteur de force une fibre optique amincie, en silice, de longueur $\ell = 7$ mm et de diamètre $2r = 10$ μm (de façon pratique, une fibre aussi fine est réalisée par attaque chimique d'une fibre optique commerciale). La fibre est tenue rigidement à l'une de ses extrémités A, et à l'autre B est fixée une des extrémités de la molécule d'ADN (par des techniques biochimiques). A l'autre extrémité de l'ADN est greffée une micro-bille, maintenue par dépression à l'extrémité d'une pipette. La bille peut

être déplacée très précisément en utilisant une platine piézo-électrique (le dispositif expérimental est illustré par la figure 3). Si on déplace l'extrémité de l'ADN solidaire de la bille, on tire transversalement sur l'extrémité de la fibre optique et on exerce ainsi une force contrôlée et mesurable sur l'ADN. On va maintenant estimer l'ordre de grandeur de cette force.

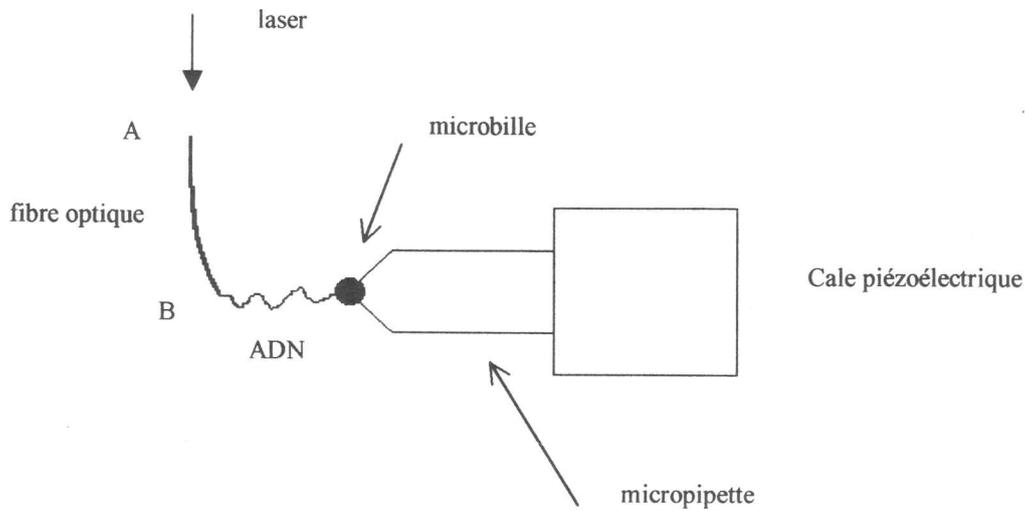


Figure 3 : Expérience de mesure de force avec un micro-levier.

1 – On assimile ici la fibre optique à une tige de longueur ℓ , fléchie sous l'effet d'une force F transversale appliquée à son extrémité B (cf. figure 4). On représente la déformation de la tige selon le modèle suivant : la tige est décomposée en fibres. La fibre A_2B_2 s'est allongée, tandis que la fibre A_1B_1 a diminué. Il existe une fibre AB, appelée fibre neutre, dont la longueur n'a pas changé. On admettra que, pour une tige cylindrique (de rayon r), la fibre neutre est son axe de symétrie.

La position d'une section droite de la tige est repérée par l'abscisse curviligne s du point M de cette section appartenant à la fibre neutre ($0 \leq s \leq \ell$, avec $s = 0$ en $M = A$). On notera $\alpha(s)$ l'angle que fait la section droite de la fibre avec l'axe Oy , et $\rho(s)$ le rayon de courbure de la fibre neutre en s . L'angle $\alpha(s)$ ainsi introduit sera toujours considéré comme petit. Enfin dans la suite, on supposera que la section de la tige n'est pas déformée.

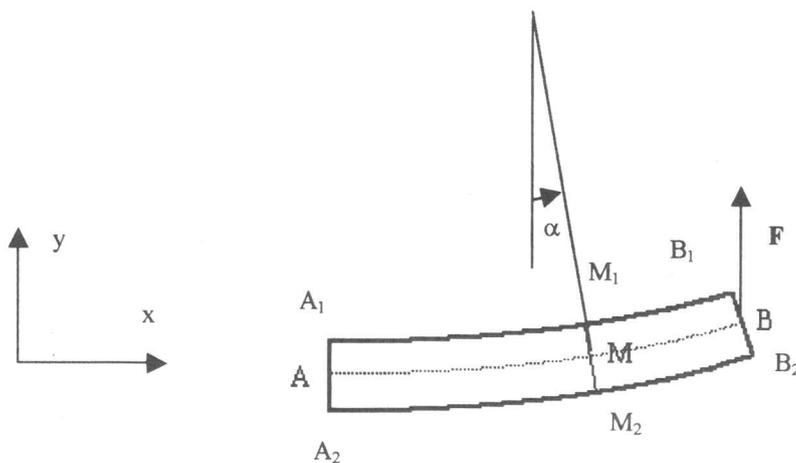


Figure 4 : Flexion du micro-levier.

a - La partie $M_2M_1B_1B_2$ de la tige exerce sur la section M_1M_2 une force $T(s)$ et un couple $\Gamma(s)$. Expliquer qualitativement l'origine physique du couple. Préciser les orientations de $T(s)$ et $\Gamma(s)$ (on rappelle que l'angle α est supposé petit).

b - On néglige le poids de la tige. En appliquant les lois de la mécanique à un élément de tige de longueur ds , montrer que, dans ce cas, T ne dépend pas de l'abscisse curviligne s , et relier $\frac{d\Gamma(s)}{ds}$ à T .

c - On rappelle que, lorsqu'on exerce une force de traction f sur une tige élastique, de longueur au repos a_0 , on constate que, à la limite des petites déformations, cette force est proportionnelle à l'allongement relatif $\frac{a - a_0}{a_0}$ et à la section S de la tige ; on pose :

$$f = ES \frac{a - a_0}{a_0}$$

où le coefficient de proportionnalité E est caractéristique du matériau étudié et est appelé son module d'Young.

En décomposant un élément ds de la tige en fibres élémentaires auxquelles s'applique la loi précédente, montrer que :

$$\Gamma(s) = \frac{EI}{\rho(s)} = EI \frac{d\alpha(s)}{ds}$$

où I est une grandeur que l'on définira, dont on donnera la dimension et pour laquelle on proposera une interprétation physique.

d - En déduire le déplacement $h = y(s = \ell)$ de l'extrémité B de la tige sous l'effet de la force F , et calculer la constante de raideur K_f du ressort ainsi constitué.

e - Calculer I pour une tige de section circulaire (de rayon r). En déduire que :

$$K_f = \frac{3\pi}{4} E \frac{r^4}{\ell^3}$$

f - Calculer numériquement la constante de raideur de la fibre amincie utilisée pour étirer l'ADN. On donne le module d'Young de la silice : $E = 7,2 \cdot 10^{10}$ Pa.

g - Calculer la valeur de la force F qui est ainsi exercée sur l'ADN pour un déplacement h de l'extrémité de la fibre égal à :

i) $h = 5$ nm

ii) $h = 5$ μ m

2 - Pour mesurer le déplacement de l'extrémité de la fibre optique, on injecte un faisceau laser dans la fibre optique amincie, et on fait l'image de son extrémité par un objectif de microscope (dans une situation où le grandissement est $G = 40$) sur un détecteur composé de deux photodiodes identiques (cf. figure 5), couvrant chacune un demi plan de part et d'autre de la droite $Y = 0$ ($Y = 0$ correspond à la position du centre de l'image en l'absence de déplacement, i.e. si $F = 0$). Chacune des photodiodes fournissant un signal de sortie s_1 ou s_2 ,

on construit ensuite le signal différentiel normalisé $s = \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2}$.

a - En supposant uniforme l'éclairement de l'extrémité de la fibre optique, montrer que, pour les très petites déviations h de cette extrémité, le signal mesuré s est proportionnel à h . Calculer s en fonction de h et r .

b - Montrer que, pour des valeurs de h plus grandes, le signal s n'est plus proportionnel à h . Quelle est la valeur maximale de h qui peut être mesurée par un tel dispositif ?

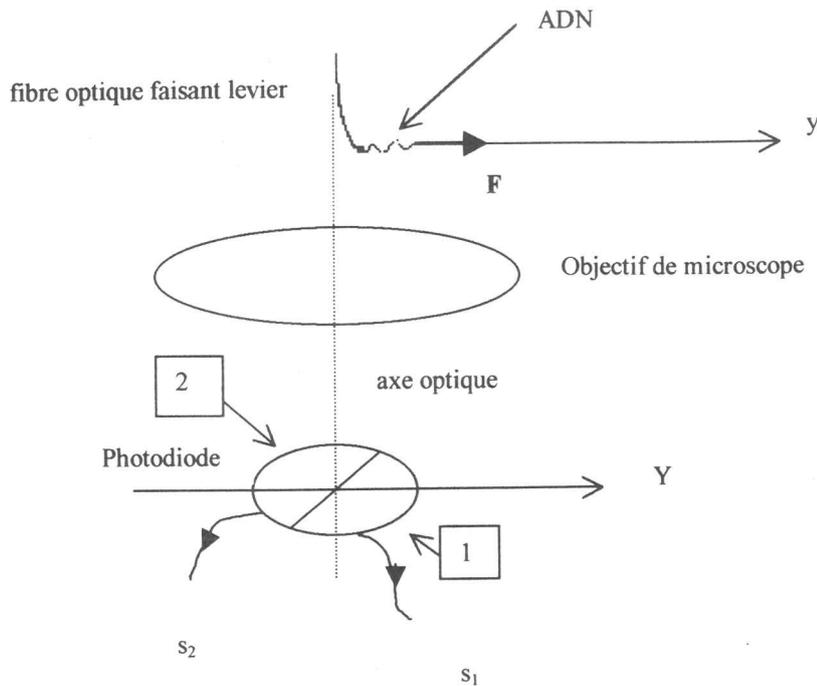


Figure 5 : Mesure optique de la position de l'extrémité de la fibre. Les photodiodes 1 et 2 ont une dimension latérale beaucoup plus grande que la taille de l'image de l'extrémité de la fibre optique.

c – On considère que la résolution spatiale d'un tel dispositif est $\Delta Y = 0,2 \mu\text{m}$. En déduire la valeur minimale de h qui peut être ainsi mesurée.

d – Calculer la plage de valeurs de la force F qui peut être exercée sur l'ADN par un tel dispositif. En comparant aux résultats obtenus à la question B4, préciser si on peut espérer observer le régime de Hooke, où l'élongation de l'ADN est proportionnelle à la force appliquée.

3 – Jusqu'à maintenant, on n'a pas tenu compte des forces dues à la gravité. On veut revenir ici sur cette hypothèse.

a – La fibre optique étant totalement immergée dans l'eau, quelle est la résultante P des forces supplémentaires exercées sur la fibre ? Cette force vous paraît-elle négligeable devant la force F exercée par l'ADN ?

On donne : masse volumique de la silice : $\mu = 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

b – On suppose ici que la fibre optique est tenue horizontalement et que l'axe OY (cf. figure 5) est orienté selon la verticale ($\mathbf{g} = -g\mathbf{u}_y$). Montrer que $T(s)$ dépend désormais de s .

Calculer $\frac{dT(s)}{ds}$ en fonction de $\frac{P}{\ell}$. En déduire $T(s)$.

c – Dans cette configuration géométrique, calculer le déplacement $h = y(\ell)$ de l'extrémité de la fibre en fonction de F , P et K_f . Montrer que les déplacements dus à F et P s'ajoutent algébriquement.

d – Cette configuration de l'expérience vous paraît-elle utilisable de façon pratique ? Expliquer l'intérêt qu'il y a à orienter la fibre optique selon la verticale.

4 – Les dimensions de la fibre étant mal connues, il est indispensable de déterminer expérimentalement sa constante de raideur K_f . On le fait en observant les fluctuations de l'extrémité de la fibre à la température T lorsqu'elle n'est soumise à aucune contrainte.

a - En utilisant le théorème de l'équipartition de l'énergie, calculer l'écart quadratique Δh des fluctuations de l'extrémité de la fibre. Calculer numériquement l'ordre de grandeur de ces fluctuations pour la fibre optique étudiée à la question C1f.

b - Montrer que la mesure de l'écart quadratique moyen Δs du signal permet de déterminer ainsi la constante de raideur de la fibre.

5 - On appelle y_0 la position de la bille (avec $y_0 = 0$ lorsque la bille est en contact avec l'extrémité de la fibre optique au repos). On fait varier y_0 en agissant sur la cale piézoélectrique.

a - Rappeler succinctement en quoi consiste la piézoélectricité. On suppose qu'en mesurant un signal physique approprié (préciser lequel), on est en mesure de déterminer y_0 .

b - On mesure simultanément y_0 et la position h de l'extrémité de la fibre. Montrer qu'on peut ainsi reconstruire la "courbe de force" $F(L)$ de l'ADN. A quelle courbe s'attend on si on fait confiance à la théorie développée dans la partie B ?

6 - En fait l'expérience conduit au résultat présenté sur la figure 6.

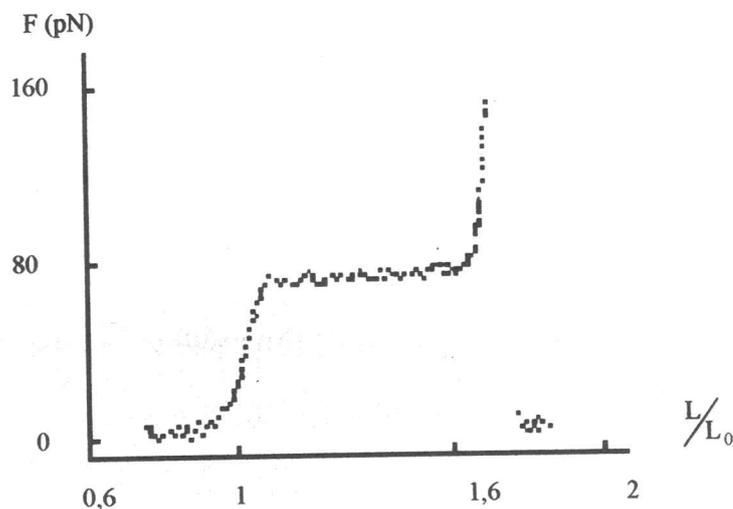


Figure 6 : Courbe de force $F(L)$ de l'ADN déterminée expérimentalement.

a - Comment peut-on expliquer l'observation de valeurs de L supérieures à L_0 ?

b - Dans la plage $1 \leq \frac{L}{L_0} \leq 1,05$, on constate que la pente de la courbe présentée sur la

figure 6 est $a = \frac{dF}{d(L/L_0)} \approx 0,62 \text{ nN}$. Déterminer la constante de raideur K' de la double hélice

de l'ADN. Comparer ce résultat à K .

c - En déduire la constante de raideur d'un des N segments de longueur b constituant la molécule d'ADN dans les modèles utilisés dans les parties A et B.

7 - a - Pour $F \approx 70 \text{ pN}$, la longueur L de l'ADN croît brusquement, de sorte qu'on observe un palier sur la courbe $F(L)$ (ce palier correspond à la partie de la courbe pour $1,1 < \frac{L}{L_0} < 1,7$).

En utilisant des analogies avec d'autres grandeurs physiques présentant un tel palier, proposer une interprétation du phénomène observé ici.

b - Pour $\frac{L}{L_0} \geq 1,8$, on obtient expérimentalement $F \approx 0$. Proposer une interprétation de cette constatation. Comparer la longueur où laquelle se produit cet "accident" à la longueur L_d de l'hélice développée (cf. question A1b).

D - Pièges optiques en régime de Rayleigh

Une autre méthode pour manipuler l'ADN et l'étirer est de fixer à une de ses extrémités une bille transparente, d'indice n et de rayon a (cf. figure 7). Cette bille est piégée ensuite dans un faisceau laser (de longueur d'onde dans le vide λ_0), focalisé avec un objectif de microscope. Dans cette partie, les mécanismes du piégeage de la bille seront étudiés, dans le cas où celle-ci est de petite dimension par rapport à la longueur d'onde du faisceau incident, soit $a \ll \lambda_0$. Ce régime correspond à celui de la diffusion Rayleigh.

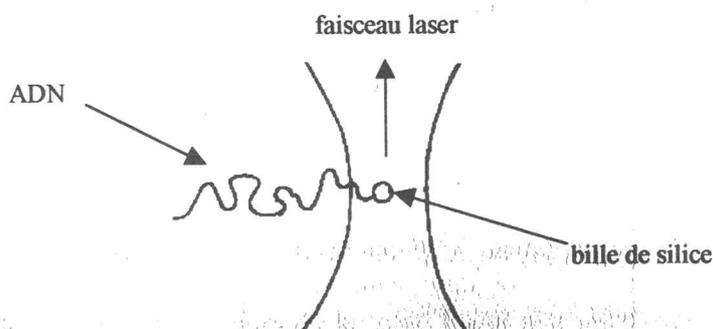


Figure 7 : Principe de la manipulation de l'ADN par un piège optique.

1 - Dans cette question, on se propose de déterminer la polarisabilité α d'une bille (de rayon a) constituée d'un diélectrique linéaire, homogène, isotrope, de susceptibilité électrique χ_e . La bille, non chargée, est supposée ici seule dans l'espace (en particulier, du point de vue diélectrique, le milieu dans lequel elle est plongée est assimilé au vide). Elle est placée dans une région de l'espace où, *en son absence*, règne un champ électrique E_i , qu'on suppose ici statique et uniforme.

a - Montrer que, dans l'hypothèse où le vecteur polarisation \mathbf{P} est uniforme à l'intérieur de la bille, le champ électrique $E_{P \text{ int}}$ créé à l'intérieur de la bille par la répartition de polarisation est uniforme et s'écrit :

$$E_{P \text{ int}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Quel est le champ électrique $E_{P \text{ ext}}$ créé à l'extérieur de la bille par cette répartition de polarisation ? Quelles sont les densités surfacique σ_P et volumique ρ_P de charges de polarisation caractérisant cette répartition de polarisation ?

b - En déduire le champ électrique total à l'intérieur de la bille et vérifier la validité de l'hypothèse effectuée à la question précédente.

c - Montrer que la polarisabilité α de la bille, définie par $\mathbf{d} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_i$, où \mathbf{d} est le moment dipolaire électrique associé à la répartition de charges de polarisation, s'écrit :

$$\alpha = 4\pi a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

où ϵ_r est la permittivité relative du matériau constituant la bille.

2 - La même bille est désormais plongée dans un milieu de permittivité relative ϵ_r' . Le champ E_i est toujours le champ électrique régnant dans le milieu extérieur, *en l'absence de la bille*. On le suppose encore uniforme et statique. On se propose de déterminer la susceptibilité de la bille dans ces conditions (et en particulier l'influence de ϵ_r'). La bille n'est pas chargée.

a - Désormais, il existe un champ de polarisation non seulement à l'intérieur de la bille, mais aussi à l'extérieur. Par la suite, on désignera ces champs de polarisation par P_{int} et P_{ext} . De même, les champs électriques à l'intérieur et à l'extérieur de la bille seront désignés par $E_{int}(r)$ et $E_{ext}(r)$, où r désigne la position du point considéré par rapport au centre de la bille.

Ecrire la relation de continuité entre $E_{int}(r = a)$ et $E_{ext}(r = a)$ à la surface de la bille.

b - Comme à la question précédente (cf. question D1a), on fait des hypothèses sur le champ de polarisation (hypothèses qu'il conviendra de vérifier ultérieurement). Ces hypothèses sont :

(i) P_{int} est uniforme,

(ii) La dépendance angulaire de la composante radiale de P_{ext} à la surface de la bille (en $r = a$) est la même que celle d'un champ de vecteur uniforme P_0 , soit :

$$u_r \cdot P_{ext}(r = a) = u_r \cdot P_0 ,$$

(iii) Dans le milieu extérieur (en $r > a$), le champ de polarisation P_{ext} est à divergence nulle.

Quelles sont les charges de polarisation caractérisant une telle répartition de polarisation ? En utilisant les résultats de la question D1a, calculer le champ E_P créé par cette répartition de polarisation tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la bille.

c - Calculer le champ électrique total à l'intérieur et à l'extérieur de la bille, et vérifier que les hypothèses proposées à la question précédente sont justifiées. On donnera en particulier l'expression de P_0 .

d - On définit ici la polarisabilité α de la bille par $d = \alpha \epsilon_0 E_i$, où d est le moment dipolaire électrique associé à la distribution de charges de polarisation. Montrer que :

$$\alpha = 4\pi a^3 \frac{\epsilon_r - \epsilon_r'}{\epsilon_r + 2\epsilon_r'}$$

3 - Le champ extérieur appliqué E_i est maintenant celui d'une onde électromagnétique, de pulsation ω et de longueur d'onde dans le vide λ_0 . La bille, de rayon $a \ll \lambda_0$, est constituée de silice, d'indice n . Le milieu extérieur est une solution aqueuse, d'indice n_0 . Les deux milieux sont considérés comme parfaitement transparents à la longueur d'onde λ_0 .

a - Montrer que la bille se comporte comme un dipôle induit, et déduire sa polarisabilité α de la question précédente. Exprimer α en fonction de l'indice relatif des deux milieux $n_r = \frac{n}{n_0}$ et de a .

b - On donne : $\lambda_0 = 1,06 \mu\text{m}$, $a = 0,1 \mu\text{m}$, $n = 1,45$ et $n_0 = 1,33$. Calculer numériquement α .

4 - a - Donner l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle induit $d = \alpha \epsilon_0 E$ plongé dans un champ extérieur E .

b - Démontrer que la force à laquelle est soumis ce dipôle de la part du champ E s'écrit :

$$F = \frac{\epsilon_0 \alpha}{2} \text{grad}(E^2)$$

5 - L'onde électromagnétique incidente sur la sphère de silice se propage selon la direction Oz. Son champ électrique est de la forme :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{i0}(\mathbf{r}) \cos(kz - \omega t + \varphi(\mathbf{r}))$$

a - Que signifie physiquement le fait que l'amplitude $\mathbf{E}_{i0}(\mathbf{r})$ et la phase $\varphi(\mathbf{r})$ dépendent du point \mathbf{r} ?

b - Calculer la force dipolaire moyenne (pendant une période d'oscillation de l'onde) exercée sur la bille. Cette force sera désormais notée \mathbf{F}_{dip} .

c - Quelle forme doit on donner au faisceau incident pour pouvoir piéger la bille au voisinage d'un point ?

6 - Pour piéger la bille, on utilise le faisceau d'un laser à YAG (longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 1,06 \mu\text{m}$, puissance $P = 1 \text{ W}$) qu'on focalise dans l'eau avec un objectif de microscope. On obtient alors un faisceau qu'on considère comme Gaussien (voir figure 8). En prenant comme origine le point où la section du faisceau est minimale, on a alors :

$$\mathbf{E}_{i0}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_\varepsilon A \frac{w(z)}{w_0} e^{-\frac{\rho^2}{w(z)^2}}$$

où \mathbf{u}_ε est le vecteur unitaire dans la direction de polarisation, et où $\rho^2 = x^2 + y^2$ et $w(z)^2 = w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)$. $w(z)$ représente le rayon du faisceau dans le plan d'abscisse z . $w(z)$

est minimum en $z = 0$ et est alors égal à w_0 . Le paramètre z_R , appelé longueur de Rayleigh, est relié à w_0 et à la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique dans l'eau par :

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Les expressions données ici sont valables à la limite où $w_0 \gg \lambda$. On admettra qu'elles le sont encore pour un faisceau d'ouverture $\theta = 20^\circ$.

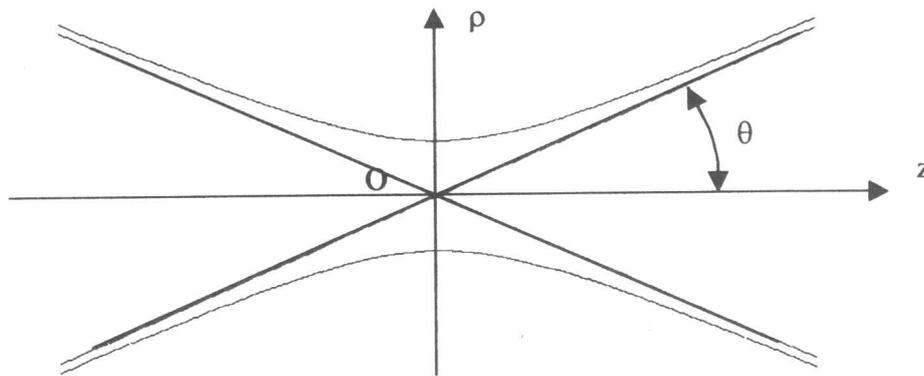


Figure 8 : Schéma du faisceau Gaussien au voisinage de son point de focalisation O.

a - Calculer le demi-angle d'ouverture θ du faisceau (cf. figure 8) en fonction de w_0 , n_0 et λ_0 . Déterminer numériquement w_0 et z_R pour $\theta = 20^\circ$.

b - Calculer la puissance P de ce faisceau en fonction de A , w_0 et n_0 .

c - Calculer la force dipolaire \mathbf{F}_{dip} exercée par ce faisceau sur la bille lorsqu'elle est située sur l'axe Oz. Montrer qu'il s'agit d'une force de rappel et calculer la constante de rappel K_z de la bille selon l'axe Oz au voisinage de sa position d'équilibre. En donner la valeur numérique pour $P = 1 \text{ W}$.

Quelle est la valeur maximale de la force qu'on peut ainsi exercer sur la bille de silice? Calculer numériquement cette valeur pour $P = 1 \text{ W}$, et la comparer aux ordres de grandeur des forces exercées sur l'ADN avec l'expérience décrite dans la partie C (question C2d).

d - Montrer que la bille est également piégée transversalement (c'est-à-dire pour des déplacements perpendiculaires à l'axe Oz). Calculer littéralement et numériquement la constante de rappel K_p de la bille pour des mouvements transversaux au voisinage de sa position d'équilibre, et la valeur minimale de la force qu'il faut exercer sur la bille pour la faire sortir transversalement du piège.

7 - En réalité, la force dipolaire n'est pas la seule force exercée par le faisceau laser sur la bille. Il existe une seconde force, appelée force de pression de radiation, F_{pr} .

a - Donner, sans démonstration, l'expression de la force par unité de volume f exercée dans le vide par un champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) sur une répartition de charges et de courants caractérisée par la densité de charge ρ et par la densité de courant \mathbf{j} .

b - A partir des équations de Maxwell, on montre que, dans le vide, cette densité de force est reliée aux champs \mathbf{E} et \mathbf{B} par la relation :

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} + \text{div} \mathbf{T}(\mathbf{u}) = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

avec $\mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ et $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{u} - \epsilon_0 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$.

\mathbf{u} est ici un vecteur unitaire quelconque, fixe.

Interpréter cette relation en terme de conservation d'une grandeur physique. Donner les interprétations physiques de \mathbf{p} et $\mathbf{T}(\mathbf{u})$.

c - Montrer que \mathbf{p} est relié au vecteur de Poynting \mathbf{P} du champ électromagnétique par :

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{P}}{c^2}$$

d - On considère une onde électromagnétique plane, de pulsation ω , se propageant selon \mathbf{u}_z . Calculer l'énergie et l'impulsion reçues pendant un temps dt sur une surface σ perpendiculaire à \mathbf{u}_z . Le rapport de ces deux quantités vous paraît-il conforme à vos connaissances sur le photon ?

8 - On souhaite ici effectuer un bilan de l'impulsion reçue et rayonnée par la bille de silice. On admettra dans la suite du problème que, dans un milieu diélectrique, la densité d'impulsion du rayonnement est encore reliée au vecteur de Poynting \mathbf{P} par $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{P}}{c^2}$.

a - On rappelle qu'un dipôle \mathbf{d} , dépendant du temps, situé à l'origine O, dans le vide, rayonne à grande distance un champ électromagnétique :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \mathbf{u}_r \times \left(\mathbf{u}_r \times \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2}(t_r) \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \mathbf{u}_r \times \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2}(t_r)$$

où $t_r = t - \frac{r}{c}$ et où \mathbf{u}_r désigne le vecteur unitaire dans la direction \mathbf{r} .

Quel est le champ rayonné par la bille de silice plongée dans l'eau et éclairée par un faisceau laser incident $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{i0}(\mathbf{r}) \cos(kz - \omega t + \varphi(\mathbf{r}))$?

b - Quelle est la puissance rayonnée \mathcal{P}_r par cette bille ?

c - Quelle est l'impulsion totale par unité de temps rayonnée par la bille ?

d - En effectuant un bilan des impulsions échangées par la bille et le rayonnement, montrer que la bille est soumise à une force supplémentaire, dite de pression de radiation, qui, moyennée sur une période du rayonnement incident, est égale à :

$$F_{pr} = \frac{\epsilon_0}{12\pi c^4} n_0 \alpha^2 \omega^4 E_{i0}^2$$

où α est la polarisabilité de la bille. Préciser son orientation.

9 - a - Calculer numériquement cette force lorsque la bille est située au centre du faisceau Gaussien (soit au point O de la figure 8). La comparer à l'ordre de grandeur de la force dipolaire étudiée à la question D6. Le piège est-il encore stable ?

b - En déduire comment l'équilibre de la bille de silice est modifié lorsqu'on prend en compte la force de pression de radiation. Calculer la nouvelle position d'équilibre (on pourra supposer que le déplacement de la position d'équilibre est faible devant z_R , hypothèse qu'on vérifiera a posteriori). Comment sont modifiées les constantes de rappel longitudinale K_z et transversale K_p du piège ?

10 - a - Comment varient K_p et K_z lorsqu'on fait varier la puissance P du faisceau laser ?

b - Dans le cas où on utilise des billes plus grosses, dont le diamètre est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde dans le vide λ_0 du faisceau laser, quelles sont la ou les hypothèses effectuées précédemment qui ne sont plus valables ?

E - Expériences de mesures de force avec des pièges optiques

Dans la pratique, on utilise des billes dont les dimensions ne sont pas négligeables par rapport à la longueur d'onde du faisceau laser incident. Ces billes sont aussi piégées au voisinage du point de focalisation d'un faisceau laser. Mais les constantes de raideur du piège ne peuvent plus être calculées comme dans la partie D. On est donc amené à les mesurer.

Dans toute cette partie, on utilise des billes de silice de diamètre $2a = 1 \mu\text{m}$. Leur masse sera désignée par m. Par ailleurs le piège optique est supposé harmonique.

1 - Pour étalonner la constante de raideur K_p , on capture une bille dans le piège optique immobile. La solution aqueuse dans laquelle baigne la bille s'écoule à la vitesse v_t , transversalement au faisceau laser (cf. figure 9). La bille est supposée très loin des parois de la cellule contenant la solution, et la viscosité de la solution est assimilée à celle de l'eau, prise égale à $\eta = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

a - La valeur de v_t est choisie dans la gamme $100 \mu\text{m/s}$ à $1000 \mu\text{m/s}$. Calculer le nombre de Reynolds associé à cet écoulement. Quelle est la nature de l'écoulement autour de la bille ?

b - Donner l'expression de la force créée sur la bille immobile par l'écoulement qui l'entoure (force de Stokes). On l'exprimera en fonction de η , a et v_t .

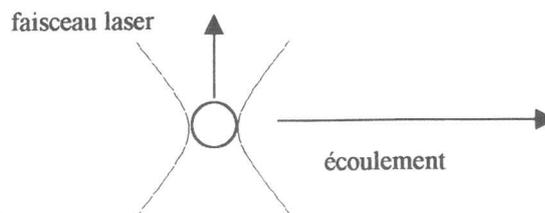


Figure 9 : Principe de l'étalonnage de la constante de raideur du piège optique.

c - Par des méthodes optiques, on sait mesurer très précisément la position ρ de la bille par rapport au centre du piège. Montrer que la mesure de la position de la bille à l'équilibre et la connaissance de v_l permettent d'étalonner le piège.

2 - Pour mesurer la vitesse d'écoulement v_l de la solution, on coupe instantanément le faisceau laser (à l'instant $t = 0$), et on observe le déplacement de la bille.

a - Donner l'expression de la force créée sur la bille animée d'une vitesse v par l'écoulement (de vitesse v_l) qui l'entoure.

b - Calculer la vitesse de la bille à un instant $t > 0$. Quelle est la constante de temps caractéristique τ d'établissement du régime permanent ? Calculer numériquement τ . Quelle est la vitesse limite atteinte ?

c - La première méthode pour mesurer v_l consiste à enregistrer le mouvement de la bille avec une caméra. Au bout de combien de temps peut-on considérer que la bille a atteint sa vitesse limite, à 100% près ?

d - Toutefois la précision de cette méthode est limitée par le temps de pose fini de la caméra. C'est pourquoi on lui préfère une autre méthode, consistant à enregistrer la trace de la bille entre les instants $t = 0$ et t . Calculer la longueur $\ell(t)$ de cette trace, et en déduire que la mesure de $\ell(t)$ permet de déterminer v_l .

3 - Une autre méthode d'étalonnage de la constante de raideur K_p du piège consiste à faire osciller (avec une cale piézoélectrique) la cellule perpendiculairement au faisceau laser et par conséquent le liquide entourant la bille piégée dans le piège optique, immobile. La position de la cellule en fonction du temps est :

$$X_c(t) = X_0 \cos(\Omega t)$$

où l'amplitude X_0 des déplacements de la cellule et leur pulsation Ω sont imposées par la tension de commande de la cale piézoélectrique.

a - Après avoir écrit l'équation du mouvement de la bille, expliquer pourquoi il est possible d'utiliser ici la notation complexe ($X_c(t) = X_0 e^{i\Omega t}$) pour déterminer la position ρ de la bille après établissement du régime forcé.

b - Calculer la position ρ de la bille par rapport au centre du piège en fonction du temps (on fera apparaître le temps caractéristique d'amortissement τ et la pulsation propre

$$\omega_0 = \left(\frac{K_p}{m} \right)^{1/2}.$$

c - On choisit des amplitude et fréquence de modulation égales respectivement à $X_0 = 10 \mu\text{m}$ et $\Omega/2\pi = 20 \text{ Hz}$. Dans ces conditions, on constate que la position $\rho(t)$ de la bille est en quadrature avec le signal $X_c(t)$, et qu'elle est modulée avec une amplitude $\rho_0 = 160 \text{ nm}$ pour une puissance laser $P = 150 \text{ mW}$. En déduire la constante de raideur K_p du piège.

4 - Si la résolution de la mesure de la position de la bille est $\Delta\rho = 2 \text{ nm}$, calculer la force minimale qu'il est possible d'appliquer sur l'ADN avec ce dispositif. En admettant que la constante de raideur K_p est proportionnelle à la puissance laser P , quelle est la puissance du faisceau laser à utiliser pour pouvoir exercer une force $F_0 \approx 40 \text{ fN}$? Montrer qu'il est possible d'observer ainsi une partie significative de la "courbe de force" $F(L)$ de l'ADN calculée dans la partie B ?

5 – On sait que la duplication de l'ADN implique l'ouverture de la double hélice. Des expériences ont été réalisées, où la force nécessaire pour ouvrir mécaniquement la double hélice a été mesurée. Leur principe est illustré sur la figure 10. L'extrémité de l'un des brins de l'ADN est fixée sur une surface de verre (qui peut être déplacée de façon contrôlée), tandis que celle de l'autre brin est fixée à une bille de verre. Le piège optique permet de mesurer la force exercée sur l'ADN.

a – En considérant que l'énergie de liaison d'une liaison hydrogène est de l'ordre de $k_B T$ à température ambiante ($T = 300 \text{ K}$), estimer la force moyenne F_{ouv} nécessaire pour ouvrir l'ADN.

b – On constate expérimentalement que cette force F_{ouv} fluctue au cours de l'ouverture d'une portion d'ADN. Montrer que la nature des liaisons entre les paires de base permet d'interpréter cette fluctuation et en estimer l'amplitude.

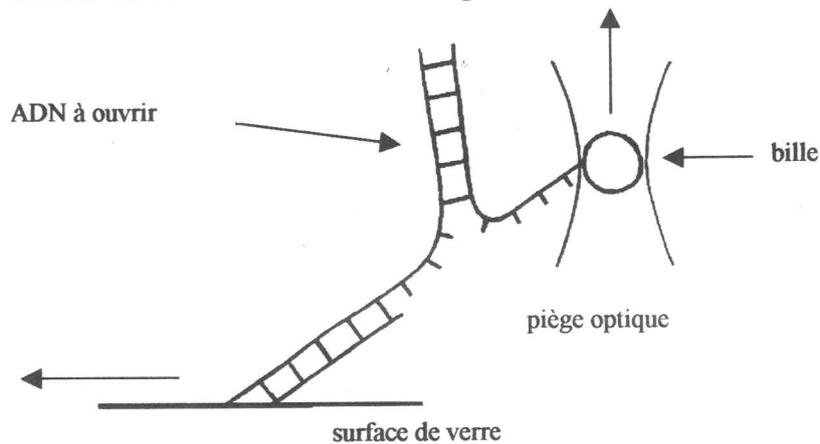


Figure 10: Ouverture de la double hélice.

6 – Le message génétique de l'ADN peut être recopié sous forme d'ARN messenger, sous l'effet d'une enzyme, l'ARN polymérase. On veut déterminer ici la force qu'exerce cette enzyme sur un ADN au fur et à mesure qu'elle le transcrit. Pour cela on réalise l'expérience schématisée sur la figure 11. L'ARN polymérase est fixé sur une surface de verre. La transcription ne peut avoir lieu que dans un sens (indiqué sur la figure). L'ADN en train d'être transcrit est retenu par son extrémité à laquelle est fixée une bille. Lorsqu'on bloque ainsi la transcription avec un piège de constante $K_p = 100 \text{ pN}/\mu\text{m}$, on observe un déplacement transversal $\rho = 130 \pm 40 \text{ nm}$ (la barre d'erreur étant due à la dispersion des résultats). Déterminer la force développée par l'ADN polymérase au cours de son déplacement le long de l'ADN lors de la transcription.

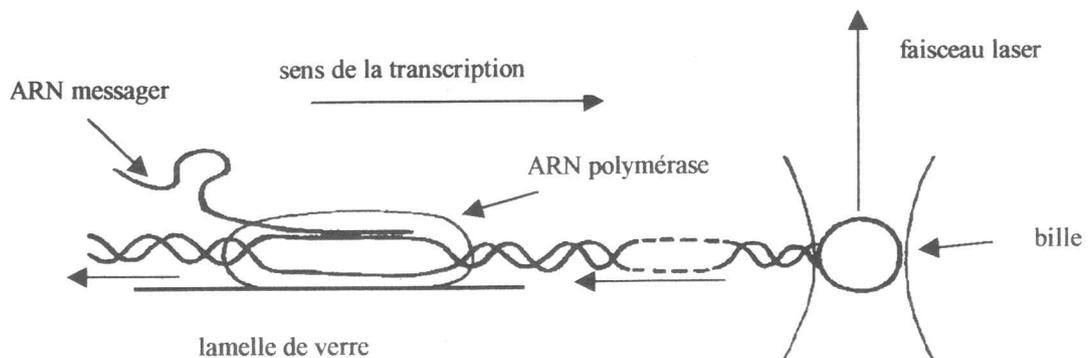


Figure 11 : Mesure de la force exercée sur l'ADN par l'ARN polymérase lors de la transcription de l'ADN en ARN messenger.