

SESSION DE 2007**Concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****Section : sciences physiques**

Option : physique

Problème de physique

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit..

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

NB : *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

Quelques phénomènes électromagnétiques dans les plasmas du Système Solaire

Si on exclut les planètes et leur éventuelle atmosphère gazeuse, tout le Système Solaire est constitué de plasma, mélange d'électrons et d'ions (couronne solaire, vent solaire, magnétosphères et ionosphères qui entourent certaines planètes). Le but de ce problème est d'étudier quelques aspects de ces milieux. Il n'aborde que l'étude des plasmas globalement neutres (nombre de charges positives élémentaires égal au nombre de charges négatives élémentaires au repos) et totalement ionisés (ce qui est toujours vrai sauf dans les ionosphères). Les milieux étudiés sont des milieux très peu denses ; les collisions entre particules jouent donc en général un rôle négligeable (sauf dans certaines questions de la deuxième partie, où ce sera précisé). Dans tous ces plasmas un champ magnétique statique est présent, on le notera $\vec{B}_0$.

Dans un milieu ionisé, le couplage entre les charges et les champs rend la dynamique des particules indissociable de celle des champs électromagnétiques et les phénomènes électromagnétiques sont des manifestations de ce qui se passe dans le milieu.

L'exploration spatiale, possible depuis les années 1960-1970, a permis de découvrir les grandes régions du Système Solaire. L'arrivée de sondes plus sophistiquées permet à présent d'effectuer des observations détaillées, soit à distance pour l'observation du Soleil (avec SOHO par exemple), soit par des mesures *in situ* dans les milieux plus accessibles. Ces mesures conduisent à comprendre des phénomènes tels que l'émission de rayonnement non thermique.

La lecture de la partie introductive est nécessaire à la suite, les deux parties qui suivent sont indépendantes. Ces deux parties sont consacrées à deux approches qui se distinguent par la fréquence des phénomènes étudiés. En effet l'importante différence de masse entre les électrons et les ions entraîne une réponse très différente suivant la fréquence : à haute fréquence, les ions restent immobiles et la dynamique du plasma est celle des électrons (première partie), à basse fréquence au contraire, le mouvement des ions domine la dynamique (deuxième partie). Dans cette deuxième partie, les cinq applications peuvent être traitées de manière autonome (3, 4-5, 6-7, 8 et 9) en admettant les résultats principaux de la magnétohydrodynamique (1-2).

Formulaire:

Le produit vectoriel est noté $\times$, les deux notations $\times$ et $\wedge$ peuvent être utilisées indifféremment.

Pour deux vecteurs quelconques :

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

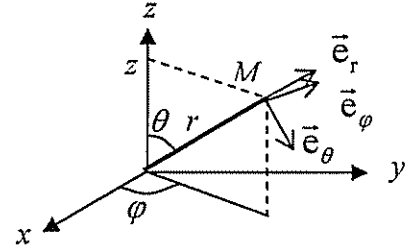
Pour trois vecteurs quelconques:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

Expressions en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla}(\psi) = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$



$$\vec{\nabla} \times (\vec{A}) = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial (A_r)}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi$$

Valeurs numériques : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg = 1836 m_e , $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C,

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \cong 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$$

Introduction

1. Pulsations caractéristiques d'un plasma

Les ions du plasma (de masse m_i et de charge q_i) sont caractérisés par des grandeurs macroscopiques : nombre de particules par unité de volume, appelé par la suite densité, n_i , vitesse $\vec{v}_i$, pression p_i .

Les électrons sont caractérisés par des grandeurs similaires, indiquées par un indice e .

On définit les pulsations caractéristiques pour les ions par les formules suivantes.

$$\text{Pulsation plasma : } \omega_{pi} = \sqrt{\frac{n_i q_i^2}{\epsilon_0 m_i}}.$$

$$\text{Pulsation de giration, ou gyropulsation, autour du champ magnétique : } \omega_{ci} = \frac{q_i B_0}{m_i}$$

Quelle est la signification physique de ces pulsations ? On répondra sans calcul.

On leur associe la fréquence plasma f_{pi} et la gyrofréquence f_{ci} .

On a des définitions identiques pour les électrons avec l'indice e (en prenant la valeur absolue de la charge).

2. Les équations du mouvement pour les ions et les électrons ("équations fluides")

Densités, vitesses et pressions, de même que les champs électromagnétiques, sont *a priori* des fonctions de l'espace et du temps ; en l'absence de forces autres que les forces de pression et les forces électromagnétiques, ces grandeurs vérifient les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_i \vec{v}_i) = 0 \\ n_i m_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + n_i m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}) (\vec{v}_i) = -\vec{\nabla}(p_i) + n_i q_i (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) - \vec{P}_{ei} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0 \\ n_e m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + n_e m_e (\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla}) (\vec{v}_e) = -\vec{\nabla}(p_e) + n_e q_e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) + \vec{P}_{ei} \end{cases}$$

où $\vec{P}_{ei}$ est la densité volumique de force qui caractérise les interactions électrons-ions (« collisions »).

Expliquer la signification de ces équations et le rôle des différents termes.

Première partie

Émissions aurales des planètes du Système Solaire

L'observation dans le domaine radio montre que les planètes sont émettrices de différents types d'ondes radio, les plus intenses étant les émissions aurales. Ces émissions ont reçu des noms en fonction de leurs longueurs d'onde : TKR pour la Terre (Terrestrial Kilometric Radiation), SKR pour Saturne, HOM pour Jupiter, la longueur d'onde étant dans ce cas de l'ordre de l'hectomètre. L'objet de cette partie est d'étudier les conditions d'émission, de propagation et d'observation de ces rayonnements.

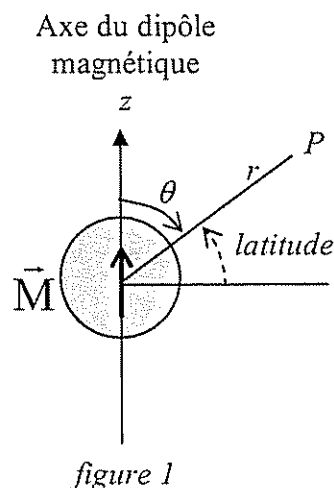
Chaque fois que des questions portent sur la comparaison entre les planètes on présentera les résultats sous forme d'un tableau où les planètes seront rangées par ordre croissant de distance au Soleil (D).

Planète	Mercure	Terre	Jupiter	Saturne
D , distance moyenne au Soleil (en UA, unité astronomique)	0,4	1	5,2	9,5
R , rayon de la planète (en km)	2400	6400	71000	60000
B_e , champ à la surface de la planète à l'équateur (en T)	$0,003 \cdot 10^{-4}$	$0,31 \cdot 10^{-4}$	$4,3 \cdot 10^{-4}$	$0,21 \cdot 10^{-4}$

I. Émission

Les observations montrent que les planètes qui émettent ce rayonnement auroral sont celles qui ont un champ magnétique propre et que les sources du rayonnement sont situées en région aurorale, région située au voisinage des pôles magnétiques vers $60-80^\circ$ de latitude nord ou sud.

1. On peut supposer en première approximation que le champ d'une planète est celui d'un dipôle magnétique $\vec{M}$ dirigé suivant l'axe z (figure 1).



1.a Rappeler l'expression du potentiel vecteur créé par ce dipôle en un point P situé à la distance r du centre de la planète.

1.b En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ en fonction de r , θ et M .

- 1.c Déterminer le module de ce champ magnétique en fonction de B_e , module du champ à la surface de la planète à l'équateur magnétique, de R , rayon de la planète qu'on supposera sphérique, et de r et θ .
2. On admettra que les ondes sont émises à la gyrofréquence électronique locale, f_{ce} : déterminer cette fréquence d'émission en fonction de r distance au centre de la planète. On supposera pour simplifier que l'émission se fait au voisinage de $\theta = 0$.
3. Calculer les fréquences d'émission pour Mercure, la Terre, Jupiter et Saturne en utilisant le tableau ci-dessus, sachant que l'altitude d'émission est d'environ 1 rayon planétaire (au-dessus de la planète).
4. Justifier les appellations données en introduction pour les différents rayonnements.

II. Propagation des ondes électroniques

Ces ondes radio se propagent dans un plasma constitué essentiellement de protons et d'électrons. Étant donné que leur fréquence est élevée, on peut considérer que ces ondes mettent en mouvement seulement les électrons, les ions restant immobiles. On étudiera seulement la dynamique des électrons pour établir leur relation de dispersion.

1. Étude des modes de propagation

1.a Exprimer les densités de charge et de courant en fonction de n_e , n_i , et $\vec{v}_e$.

1.b Écrire les deux équations fluides pour les électrons (voir Introduction 2.) en supposant que le plasma est froid ($p_e = 0$) et sans collisions entre les ions et les électrons. Compléter le système par les équations de Maxwell dans le milieu dont les permittivité et perméabilité sont celles du vide.

1.c En l'absence de perturbation, on suppose d'une part que le champ magnétique est uniforme, indépendant du temps et vaut $\vec{B}_0$ et d'autre part que les électrons n'ont pas de vitesse d'ensemble et ont une densité n_0 . On cherche à résoudre le système pour une petite perturbation : on pose pour toutes les grandeurs $u = u_0 + u_1$, où $|u_1| \ll |u_0|$ et on linéarise les équations. Écrire le système en fonction de n_{e1} , $\vec{v}_{e1}$, $\vec{B}_1$, $\vec{E}_1$, $\vec{B}_0$ et n_0 .

1.d On cherche maintenant une solution sous la forme d'une onde plane monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$, toutes les grandeurs du premier ordre dans le calcul de perturbation sont donc proportionnelles à $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$. Écrire le système de six équations en fonction de $\vec{k}$ et ω . Comme il n'y a pas d'autres variables que celles qui concernent les électrons, on pourra omettre l'indice e dans la suite de cette partie.

2. Relation de dispersion des ondes

2.a Pour calculer la relation de dispersion, on se limitera au cas particulier de la propagation perpendiculaire au champ magnétique. On supposera $\vec{k}$ parallèle à l'axe x , et $\vec{B}_0$ parallèle à l'axe z . Résoudre le système en éliminant toutes les variables au profit des composantes du champ électrique $\vec{E}_1$. Montrer que la relation de dispersion se met sous la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_{pe}^2 & i\omega\omega_{ce}\left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right) & 0 \\ -i\omega\omega_{ce} & \omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2 \end{vmatrix} = 0$$

2.b Mode ordinaire (mode O) : c'est celui dont la relation de dispersion s'écrit : $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$. Comment est polarisé ce mode ? Montrer qu'il présente une pulsation de coupure quand k tend vers 0.

2.c Montrer que les deux autres modes présentent aussi une pulsation de coupure quand k tend vers 0. On suppose que $\omega_p < \omega_c$ et on appelle mode Z celui qui a la pulsation de coupure la plus basse et mode X celui qui a la pulsation de coupure la plus haute.

2.d La polarisation des ondes est définie par rapport au champ magnétique statique (un mode droit tourne dans le sens direct par rapport au champ $\vec{B}_0$). Comment est polarisé le champ électrique associé aux modes X et Z à la fréquence de coupure ? Commenter.

2.e Étudier le comportement asymptotique des 3 modes quand k tend vers l'infini.

2.f Tracer le diagramme de dispersion, ω/ω_{ce} en fonction de k , en identifiant les trois modes X, O, Z.

2.g Les ondes émises près d'une planète se propagent et peuvent être observées ensuite loin de cette planète. Lorsqu'on s'éloigne de la planète, la densité varie peu mais le champ magnétique diminue fortement ; on supposera que le diagramme établi à la question précédente reste valable. Quels sont les modes sur lesquels peuvent se propager des ondes qu'on observe loin de la planète ?

3. Mode de propagation du rayonnement auroral

On a pu traverser pour la première fois les régions sources du rayonnement kilométrique auroral terrestre avec le satellite Viking en 1986. L'enregistrement d'un spectrogramme par l'antenne électrique de Viking est présenté sur la figure 2 : le temps est en abscisse, la fréquence en ordonnée. À chaque pas de temps le spectre du signal est calculé et tracé en code couleur.

3.a La densité du plasma dans la région traversée est d'environ 10^7 m^{-3} . Le satellite Viking garde une latitude proche de 70° pendant la traversée mais son altitude varie :

à 20h30 : altitude de 0,9 rayon terrestre au-dessus du sol.

à 20h35 : altitude de 1 rayon terrestre au-dessus du sol.

Calculer les fréquences caractéristiques du milieu : fréquence plasma et gyrofréquence électronique. Identifier la ligne A qui traverse le spectrogramme.

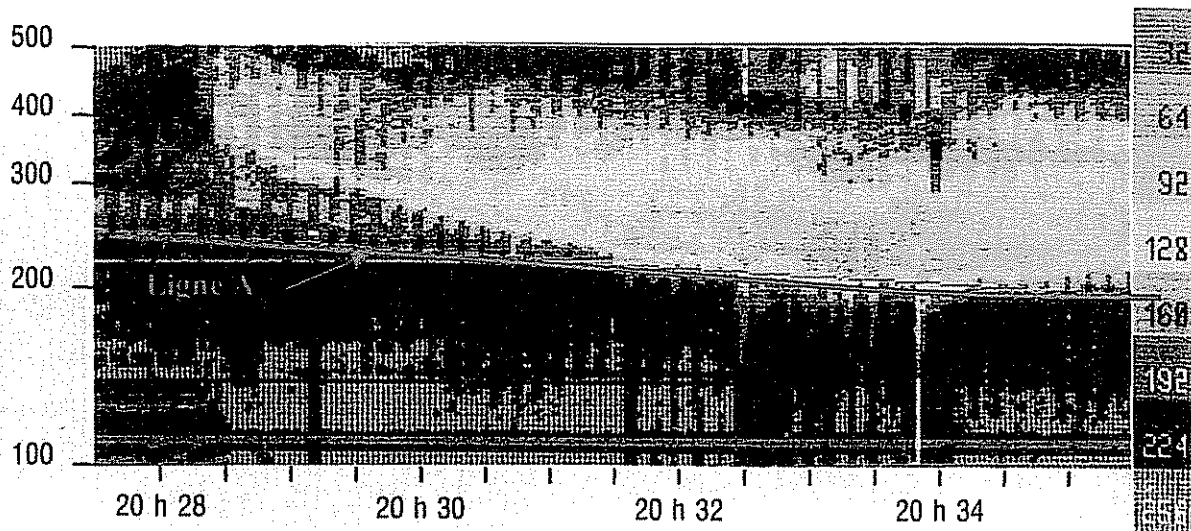


Figure 2 : Spectrogramme couleur d'une composante du champ électrique mesuré par Viking (orbite 165, 23/03/1986). En abscisse le temps, en ordonnée la fréquence en kHz. La couleur est d'autant plus rouge que l'intensité est forte.

3.b Compte tenu des intensités observées à quelle heure peut-on estimer que Viking traverse la région source de l'émission ?

3.c En admettant que les propriétés des modes étudiées au 2. sont valables dans le cas d'un angle entre $\vec{k}$ et $\vec{B}_0$ quelconque, et en considérant la gamme spectrale où sont observées principalement les ondes, identifier le mode sur lequel se propage le rayonnement kilométrique auroral.

4. Propagation dans le vent solaire

Les ondes, émises dans l'environnement proche de la planète, peuvent être observées sur place comme au 3., mais aussi à grande distance de la planète, par exemple depuis une sonde interplanétaire. Pour que cette observation soit possible il faut que l'onde puisse se propager dans le vent solaire (voir figure 3). Ici les ions ne sont plus immobiles, mais soumis à un mouvement d'ensemble. Les résultats précédents restent cependant inchangés.

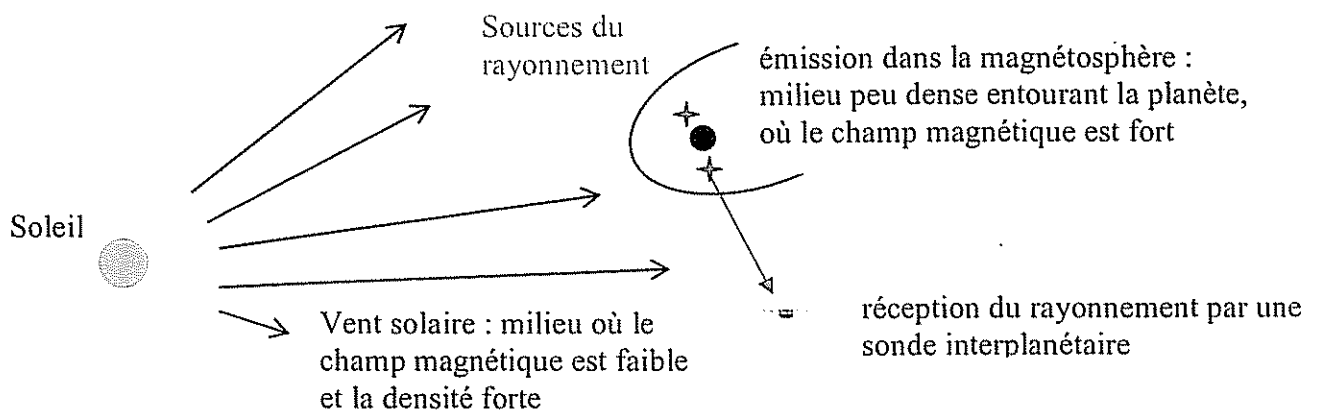


Figure 3 : Schéma des conditions d'émission et de réception des ondes. La planète est représentée en noir avec les sources d'émission au-dessus des régions polaires indiquées par des croix rouges.

4.a La densité d'électrons n_e dans le vent solaire dépend de la distance au Soleil. Supposant que la vitesse du plasma du vent solaire est radiale et de module constant, écrire l'équation de

conservation des électrons et en déduire la variation de n_e en fonction de D , où D est la distance planète-Soleil en unité astronomique (UA).

4.b Le champ magnétique dans le vent solaire est proportionnel à $\frac{1}{D} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{D^2}}$, où α est une constante dont la valeur numérique est proche de 1 UA. En déduire la dépendance du rapport f_{ce}/f_{pe} en fonction de D .

4.c Sachant que la densité du vent solaire vaut $5 \cdot 10^6 \text{ m}^{-3}$ et le champ magnétique 5 nT au niveau de l'orbite de la Terre ($D = 1 \text{ UA}$), calculer le rapport f_{ce}/f_{pe} à l'orbite des quatre planètes.

4.d L'onde se propage dans le vent solaire sur le mode sur lequel elle a été émise au voisinage de la planète. Montrer, en utilisant les résultats du 2.c et du 3.c, que la fréquence de coupure de ce mode est peu différente de f_{pe} .

4.e Calculer la fréquence de coupure dans le vent solaire au voisinage de chacune des planètes. Connaissant les fréquences caractéristiques des rayonnements émis (voir I.3) quels sont ceux qui peuvent se propager dans le milieu interplanétaire et donc être observés à distance de la planète ?

5. Observation par les radiotélescopes au sol

5.a L'ionosphère terrestre est une couche ionisée dense qui entoure la Terre. Cette ionisation est produite par le rayonnement ultra-violet solaire. On donne la courbe de densité de l'atmosphère neutre ainsi que le profil de densité électronique (figure 4). Justifier qualitativement la forme de ce deuxième profil.

5.b Compte-tenu du profil de densité électronique de l'ionosphère terrestre, quelles sont les planètes dont les rayonnements sont observables au sol ? Peut-on observer le rayonnement auroral terrestre depuis le sol ?

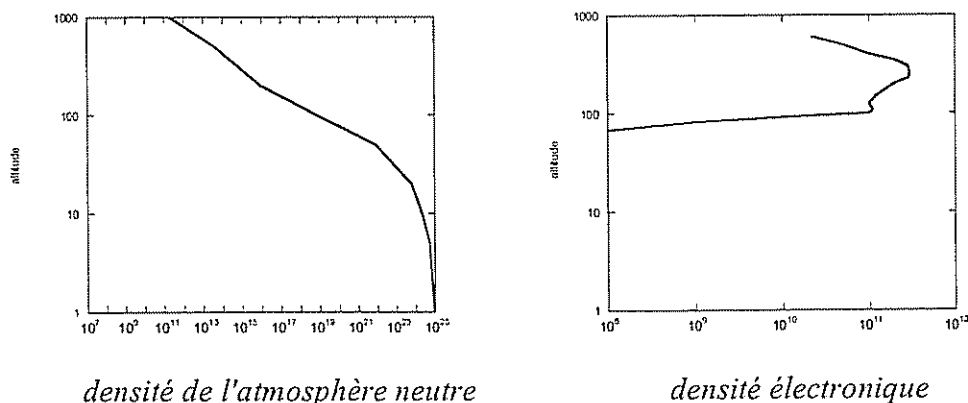


Figure 4. Échelles verticales en km, échelles horizontales en m^{-3} .

Deuxième partie

Magnétohydrodynamique et physique solaire

Comme un fluide neutre peut être décrit par les équations de l'hydrodynamique, un fluide ionisé peut être décrit par ce qu'on appelle la magnétohydrodynamique (MHD), tant qu'on se limite à des phénomènes suffisamment lents. On appliquera les résultats obtenus à l'interprétation d'observations expérimentales.

1. Le cadre général de la MHD

La MHD consiste à décrire le plasma comme un fluide unique. Les équations de la dynamique de ce fluide sont établies à partir des équations fluides pour les ions et les électrons (voir Introduction). Pour résoudre complètement le système couplé champ-particules, il faut compléter par les équations de Maxwell dans le milieu dont les permittivité et perméabilité sont celles du vide.

On introduit des grandeurs caractéristiques du fluide conducteur global, électrons et ions, fonctions de la position et du temps :

densité de charge $\rho = n_i q_i + n_e q_e$

densité de courant $\vec{j} = n_i q_i \vec{v}_i + n_e q_e \vec{v}_e$

vitesse $\vec{v} = \frac{n_i m_i \vec{v}_i + n_e m_e \vec{v}_e}{n_i m_i + n_e m_e}$

pression totale $p = p_e + p_i$

On supposera pour simplifier les écritures que les ions sont des protons :

$q_i = -q_e = e$ et que $m_i = 1836 m_e = m$.

1.a La première hypothèse faite dans le cadre de la description d'un plasma par la MHD est que le courant de déplacement est négligeable dans l'équation de Maxwell-Ampère. La validité de cette hypothèse sera vérifiée plus loin. Montrer, en écrivant l'équation de conservation de la charge, que cette hypothèse entraîne la quasi-neutralité du plasma. On note alors $n = n_e = n_i$.

1.b Compte-tenu du rapport des masses électronique et ionique, simplifier l'expression de la vitesse $\vec{v}$.

En MHD, les électrons et les ions sont fortement couplés et leurs vitesses sont peu différentes. Dans la suite de cette section 1, on ne tiendra compte de la différence de vitesse que quand elle intervient explicitement, par $\vec{v}_e - \vec{v}_i$.

Montrer que dans ce cas $\vec{v}_i \approx \vec{v}$ et $\vec{v}_e \approx \vec{v} - \frac{\vec{j}}{ne}$.

1.c Montrer en additionnant les équations fluides que l'équation de conservation de la densité

n s'écrit : $\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n \vec{v}) = 0$

1.d Montrer de même que l'équation de conservation de la quantité de mouvement globale s'écrit :

$$nm \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + nm(\bar{v} \cdot \nabla)(\bar{v}) = -\nabla(p) + \bar{j} \times \bar{B}$$

2. La loi d'Ohm généralisée

2.a Le terme de friction électrons-ions s'écrit $\bar{P}_{ei} = -\nu n m_e (\bar{v}_e - \bar{v}_i)$, où ν est la fréquence de collision. Justifier la forme de ce terme.

2.b Montrer que l'équation de conservation de la quantité de mouvement des électrons s'écrit :

$$\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B} - \frac{m_e \nu}{ne^2} \bar{j} - \frac{\bar{j} \times \bar{B}}{ne} + \frac{\nabla(p_e)}{ne} + \frac{m_e}{e} \frac{d\bar{v}_e}{dt} = \bar{0}$$

2.c Expliquer l'appellation de loi d'Ohm généralisée donnée à cette équation.

2.d Hypothèse fondamentale : on se limite dans le cadre de la MHD à l'étude de problèmes dans lesquels les échelles spatiales et temporelles sont grandes par rapport à toutes les échelles caractéristiques de la dynamique individuelle des particules. Vérifier que l'approximation faite au 1.b ($|\bar{v}_i - \bar{v}_e| \ll |\bar{v}|$) est une conséquence de cette hypothèse.

Montrer que la loi d'Ohm s'écrit dans ce cas : $\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B} = \frac{\bar{j}}{\sigma} + \frac{\bar{j} \times \bar{B}}{ne}$. Donner l'expression de la conductivité σ .

2.e Montrer que l'équation précédente permet de mettre $\bar{j}$ sous la forme suivante :

$$\bar{j} = \sigma \bar{E}_{//} + \sigma_{\perp} (\bar{E}_{\perp} + \bar{v} \times \bar{B}) + \sigma_H \frac{\bar{B}}{B} \times (\bar{E}_{\perp} + \bar{v} \times \bar{B})$$

où les indices // et $\perp$ caractérisent les composantes parallèle et perpendiculaire au champ magnétique. Calculer $\sigma_{\perp}$ et σ_H en fonction de σ , ω_{ce} et ν .

2.f On considère le cas de la région E de l'ionosphère (vers 100 km d'altitude), caractérisée par les paramètres suivants : $n = 2.10^{11} \text{ m}^{-3}$, $B = 50\,000 \text{ nT}$, $\nu = 6.10^4 \text{ s}^{-1}$. Comparer les valeurs des trois conductivités et discuter.

2.g On appelle MHD idéale le cas où la loi d'Ohm s'écrit : $\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B} = \bar{0}$.

Montrer que si le plasma est non collisionnel (ν tend vers 0), le plasma peut être décrit par la MHD idéale.

2.h À l'inverse quelle est la loi d'Ohm vérifiée dans un milieu fortement collisionnel ($\omega_{ce} \ll \nu$) ? On parle alors de MHD résistive.

3. Équation d'évolution du champ en MHD résistive

On considère dans cette partie le cas d'un milieu fortement collisionnel.

3.a Montrer que l'équation d'évolution du champ magnétique s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{v} \times \bar{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 (\bar{B})$$

3.b Expliquer le rôle des différents termes de cette équation.

3.c On définit le nombre de Reynolds magnétique par $R_m = VL\mu_0\sigma$ où V et L sont les ordres de grandeur typiques de la vitesse et de la taille caractéristique de l'écoulement. Expliquer sa signification physique grâce à l'équation ci-dessus.

3.d On donne des ordres de grandeur de la conductivité de différents fluides conducteurs, calculer les nombres de Reynolds magnétiques correspondants en utilisant des ordres de grandeur réalistes pour les dimensions et les vitesses :

- mercure à 20°C : 10^6 Sm^{-1}
- plasma dans le caisson Jonas de l'ONERA (dimensions de l'ordre de 2 mètres) : 10^5 Sm^{-1}
- plasma de la couronne solaire calme (taille et vitesse caractéristiques des structures observées 10^8 m et 100 kms^{-1}) : $2 \cdot 10^6 \text{ Sm}^{-1}$

Est-il facile de reproduire en laboratoire les phénomènes observés dans la couronne solaire ?

3.e Résoudre l'équation d'évolution du champ magnétique pour un cas où on suppose la vitesse du plasma nulle et le champ magnétique de la forme $\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0(t) \cos kx$. Interpréter le résultat obtenu.

4. L'onde d'Alfven

Dans un plasma magnétisé, plusieurs types d'onde peuvent se propager. Comme on l'a vu à la question 2., seules les ondes de très basse fréquence sont susceptibles d'être décrites par les équations de la MHD, l'onde d'Alfven est l'une d'elles. On l'étudie ici dans le cas du plasma froid ($p = 0$) et de la MHD idéale (cf 2.g). En l'absence de perturbation, seuls la densité et le champ magnétique sont non nuls et ils valent n_0 et $\vec{B}_0$.

4.a. Écrire le système des équations MHD (au nombre de 3) et des équations de Maxwell (au nombre de 3 aussi, on omettra l'équation de Maxwell-Gauss qui peut permettre éventuellement de vérifier a posteriori l'hypothèse de quasi-neutralité). On cherche à résoudre le système pour une perturbation de faible amplitude. Il faut donc linéariser les équations : on pose pour toutes les grandeurs $u = u_0 + u_1$, où $|u_1| \ll |u_0|$. Écrire les équations reliant les grandeurs d'ordre 1 : n_1 , $\vec{v}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{B}_1$ et $\vec{E}_1$ et les grandeurs d'ordre 0 : n_0 et $\vec{B}_0$.

4.b On cherche maintenant une solution sous la forme d'une onde plane monochromatique de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation ω ; toutes les grandeurs d'ordre 1 sont donc proportionnelles à $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$. Écrire le système en fonction de $\vec{k}$ et ω .

4.c Montrer qu'il existe une solution non triviale à ce système qui vérifie $\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0$, à condition que k et ω soient liés par une relation que l'on exprimera en fonction de la vitesse d'Alfven définie par $V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 n_0 m}}$ et de $\cos \theta$, où θ est l'angle entre $\vec{k}$ et $\vec{B}_0$.

4.d Calculer le rapport entre le courant de déplacement et le courant porté par les ions. L'hypothèse faite au 1.a est-elle justifiée ? On s'appuiera sur les ordres de grandeur donnés dans le tableau ci-dessous.

Milieu considéré	Couronne solaire	Vent solaire
Densité électronique	10^{15} m^{-3}	10^6 m^{-3}
Champ magnétique	10^{-2} T	$5 \cdot 10^{-9} \text{ T}$

4.e Montrer que pour l'onde d'Alfven on a la relation $\bar{B}_1 = \pm K \bar{v}_1$ où K est une constante.

La résolution complète du système d'équations montre que c'est le seul mode de propagation qui vérifie cette propriété.

5. Analyse des fluctuations dans le vent solaire

La sonde Mariner a enregistré les fluctuations de vitesse et de champ magnétique dans le vent solaire (composé d'électrons et de protons). Elles sont présentées sur la figure 5 en fonction du temps, projetées dans le repère RTN où R est la direction radiale sortant du Soleil, T est dans le plan équatorial dans le sens du mouvement des planètes, N est normale aux deux autres dirigée vers le Nord solaire. La vitesse du vent solaire est radiale.

5.a Vérifier que les échelles de temps des fluctuations mesurées sont compatibles avec une modélisation par la MHD idéale.

5.b Vérifier que ces fluctuations remplissent la relation établie au 4.e pour l'onde d'Alfven.

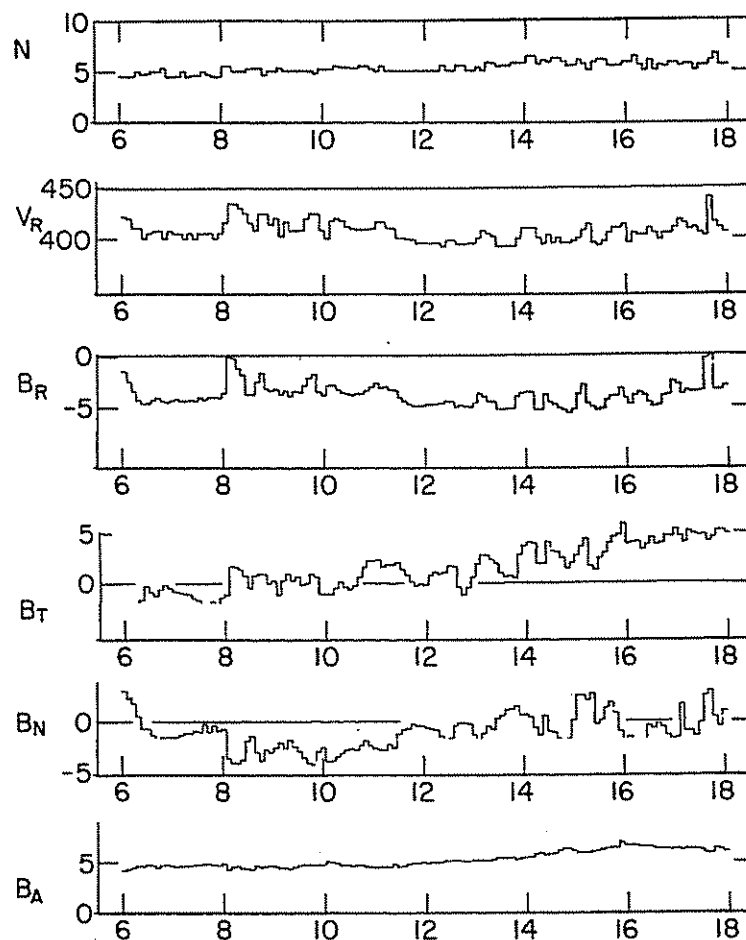


Figure 5. Tracé de la densité en cm^{-3} , de la seule composante de la vitesse mesurée en kms^{-1} et des trois composantes et du module du champ magnétique en nT enregistrés par la sonde Mariner 5 pendant une journée (l'abscisse est en heure)

5.c Discuter plus particulièrement la relation établie au 4.e. sachant que la mesure de densité est faite avec un instrument qui ne permet pas de distinguer la nature des ions et que depuis d'autres mesures ont montré que de l'hélium est présent dans le vent solaire en plus des protons qui sont majoritaires.

5.d Les fluctuations ne sont pas monochromatiques, contrairement aux calculs effectués dans la section 4. Expliquer pourquoi les propriétés établies au 4. sont quand même valables.

5.e Une étude statistique sur un nombre de cas beaucoup plus grand montre que $\vec{B}_1$ et $\vec{v}_1$ sont en phase quand le champ magnétique moyen est dirigé vers le Soleil (comme c'est le cas ici) et en opposition de phase quand il est dirigé en sens inverse. Que peut-on en déduire quant à la direction de propagation des ondes ?

6. La force magnétique volumique.

C'est le terme en $\vec{j} \times \vec{B}$ qui intervient dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement du fluide.

6.a. Montrer que cette force se met sous la forme $\vec{\nabla} \left(-\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$.

6.b. Tension magnétique:

On définit les vecteurs $\vec{t}$ tangent à la ligne de champ et $\vec{n}$ normal à la ligne de champ. Ils sont liés par $(\vec{t} \cdot \vec{\nabla}) \vec{t} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R_c}$ où s est l'abscisse curviligne et R_c est le rayon de courbure de la

ligne de champ. Montrer que le deuxième terme de la force magnétique se met sous la forme :

$$\left[\vec{t} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right] \vec{t} + \frac{B^2}{\mu_0 R_c} \vec{n}.$$

6.c Écrire l'expression complète de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en prenant en compte la pression cinétique. Expliquer le rôle des termes en $\vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right)$. Comment interviennent-ils dans la dynamique du plasma ? Comment agit l'autre terme ?

6.d On considère un champ magnétique, exprimé en coordonnées cartésiennes, de la forme

$$\vec{B} = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ x/l \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ (où } l \text{ est une constante). Contrôler que ce champ vérifie les équations de}$$

Maxwell. Établir l'équation des lignes de champ et les tracer dans le plan (x, y) . Déterminer la densité de force magnétique dans cette configuration et tracer les forces sur le schéma.

6.e Mêmes questions pour un "point en X", caractérisé par un champ, exprimé en coordonnées

$$\text{cartésiennes, de la forme } \vec{B} = B_0 \begin{pmatrix} y/l \\ x/l \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.f Comparer la stabilité des deux situations étudiées en 6.d et 6.e. Comment la pression cinétique du plasma peut-elle intervenir pour maintenir les lignes de champ à l'équilibre ?

7. Tache solaire

On considère une tache solaire comme celle présentée sur la figure 6. Elle apparaît comme une zone sombre sur la photosphère, ce qui signifie que c'est une région froide. La température dans la tache est d'environ 4500 K, alors que celle de la photosphère voisine est d'environ 6000K. Les taches solaires sont des régions particulièrement stables qu'on peut décrire par la MHD idéale.

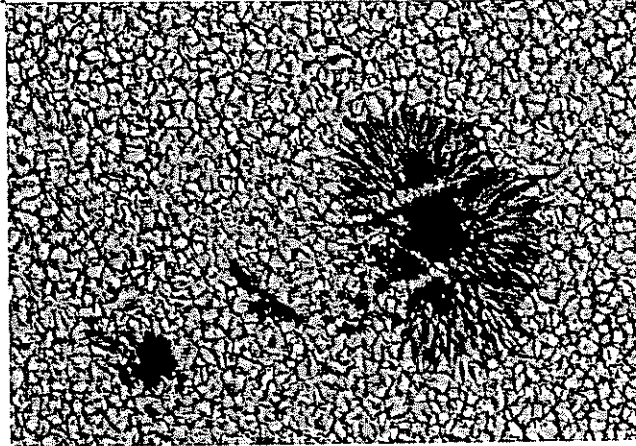


Figure 6. Image NASA

7.a Résoudre l'équation de conservation de la quantité de mouvement en régime stationnaire et en présence d'un champ magnétique vertical, perpendiculaire à la surface de la photosphère. On suppose qu'il n'y a pas de mouvement de convection.

7.b Montrer que la stabilité de la tache peut s'expliquer par la présence d'un champ magnétique fort dans la tache alors qu'il est négligeable dans la photosphère voisine. On supposera que pression et température sont reliées par $p = nk_B T$.

7.c Estimer la valeur du champ magnétique dans la tache, en prenant pour la densité du plasma 10^{24} m^{-3} .

8. La MHD idéale et ses limites

8.a. Le gel du champ dans le plasma.

Cette question établit une des propriétés majeures de la MHD idéale qui est le fait qu'une ligne de champ magnétique transporte avec elle le fluide dans ses déplacements et réciproquement : le champ est « gelé » dans le fluide.

Pour le démontrer, considérons une ligne de champ magnétique donnée à l'instant t et deux éléments du fluide qui sont au même instant sur cette ligne de champ ; ils sont reliés par un vecteur $\delta \vec{L}$. Le vecteur $\vec{C}(t) = \delta \vec{L} \times \vec{B}$ est donc nul. Montrer qu'au temps $t + dt$ le vecteur $\vec{C}(t + dt) = \vec{0}$.

En déduire que le fluide et le champ se déplacent ensemble.

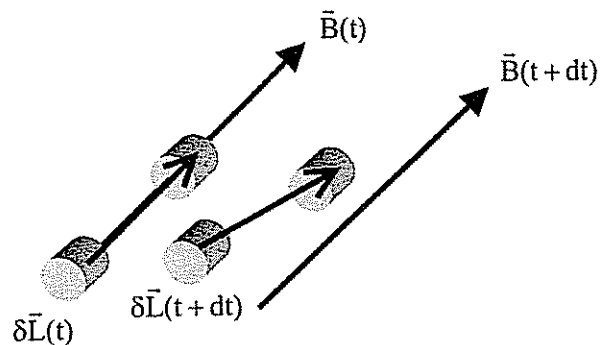


Figure 7

8.b La reconnexion : en MHD idéale, deux particules fluides reliées par une ligne de champ restent donc sur la même ligne de champ au cours du temps. Une ligne de champ, qui est maintenant une ligne matérielle, ne peut donc être coupée pour être "reconnectée". Une reconfiguration comme celle décrite par le schéma de la figure 8 est interdite.

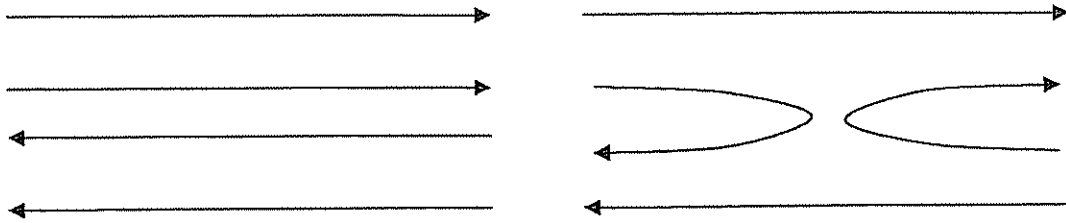


Figure 8. Configuration magnétique au temps t à gauche et au temps $t' > t$ à droite.

Dans un certain nombre de situations réelles on constate pourtant que ce phénomène a lieu et on l'appelle « reconnexion ». On étudie ici l'exemple d'une éjection de matière dans la couronne solaire (dite Éjection de Masse Coronale): la matière retenue dans la boucle magnétique fermée de la figure de gauche (figure 9) a été éjectée une heure plus tard (figure de droite). Montrer par des schémas comment la reconnexion peut expliquer cette éjection.

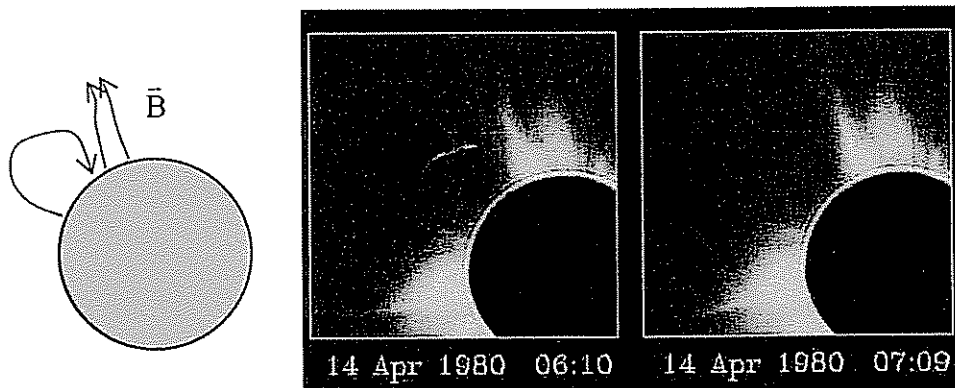


Figure 9. Images prises par un coronographe (source High Altitude Observatory) à une heure d'intervalle. Le disque noir est le disque occulteur qui cache le Soleil. La lumière est émise par les particules qui sont piégées sur les lignes de champ, elle permet donc de visualiser les lignes de champ (le schéma de gauche montre comment interpréter la figure de gauche).

Proposer des raisons possibles de la rupture de la MHD idéale qui permettent cette reconnexion.

9. Champ magnétique dans le vent solaire

Le vent solaire est un plasma dont la vitesse est radiale à partir du Soleil dès qu'on s'éloigne suffisamment de la surface. Le champ magnétique est gelé dans le plasma (MHD idéale).

On écrit l'équation différentielle d'évolution du champ magnétique $\vec{B}$ en fonction de la vitesse $\vec{v}$ (voir 3.a) en régime stationnaire et dans le cadre de la MHD idéale.

9.a Pour résoudre cette équation on se place en coordonnées sphériques (r, θ, φ) et on fait les hypothèses restrictives supplémentaires :

On limite l'étude au plan équatorial, et on suppose que la vitesse et le champ magnétique n'ont que deux composantes, radiale (v_r, B_r) et azimutale (v_φ, B_φ) et qu'il y a une symétrie de rotation autour de l'axe de rotation du Soleil. Exprimer la relation algébrique qui relie v_r, v_φ, B_r , et B_φ

9.b Pour déterminer la constante d'intégration, on utilise les conditions aux limites

- *très près du Soleil (photosphère)*, on suppose que la vitesse radiale tend vers 0 et que la vitesse azimutale est due à la rotation du Soleil ($v_{\phi 0} = \Omega R$, où R est le rayon du soleil et Ω sa vitesse de rotation) qui entraîne le plasma et les pieds des lignes de champ magnétique. Ces lignes de champ sont à peu près radiales et on note $B_0 = B_{r0} \gg B_{\phi 0}$.

- *à grande distance*, la vitesse est purement radiale.

Calculer $B_{\phi}(r)$ à grande distance.

9.c Utiliser les équations de Maxwell pour calculer l'autre composante du champ.

9.d Calculer le rapport $B_r(r)/B_{\phi}(r)$. On suppose la vitesse radiale constante, ce qui est vrai à grande distance du Soleil. En déduire l'équation des lignes de champ magnétique dans le vent solaire et la forme de ces lignes. (On rappelle que l'étude est menée dans le plan équatorial).

9.e Calculer l'angle entre la ligne de champ magnétique et la direction radiale à l'orbite de la terre, sachant que le champ mesuré à cette distance est de l'ordre de 5 nT.

Données : la période de rotation du Soleil (dans le plan équatorial) est de 25 jours, la vitesse moyenne du vent solaire est de 400 km s^{-1} , la distance Terre-Soleil $r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ et le rayon du Soleil $R = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$.

9.f Calculer le champ magnétique moyen au niveau de la photosphère, B_0 . Comparer à la valeur obtenue dans une tache solaire (voir 7.c).

