

SESSION 2012

**AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE**

**Section : SCIENCES PHYSIQUES
Option A : PHYSIQUE**

PROBLÈME DE PHYSIQUE

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Instabilités statique et dynamique des fluides Influence de la tension superficielle

Les instabilités hydrodynamiques occupent une place de choix au sein de la mécanique des fluides. La tension superficielle y joue un rôle prépondérant. L'objectif de ce problème est de rendre compte des effets de la tension superficielle sur les instabilités de Saffman-Taylor de fluides visqueux et sur les instabilités magnéto-hydrostatiques de ferrofluides.

L'instabilité de Saffman-Taylor est un phénomène de digitation qui apparaît lorsqu'un fluide peu visqueux pousse un fluide plus visqueux dans un canal de faible dimension.

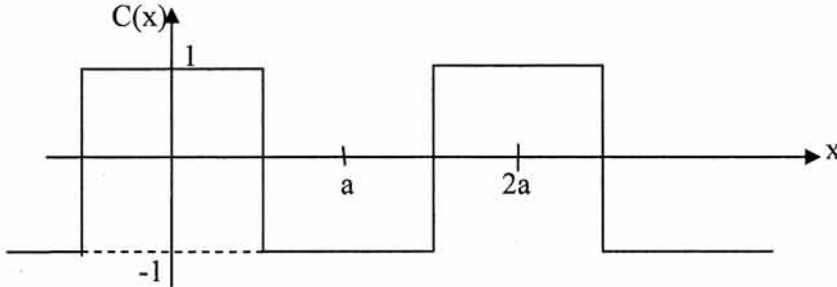
L'instabilité magnéto-hydrostatique de fluides magnétiques appelés ferrofluides est une instabilité de surface provoquée par un champ magnétique. Elle génère des structures périodiques dont les caractéristiques sont fonction de l'intensité du champ magnétique.

Ce problème a été construit en s'appuyant sur les deux articles fondateurs de l'étude théorique de ces instabilités, celui de Saffman et Taylor en 1958 (The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **245**, 312, 1958) et celui de Cowley et Rosensweig en 1967 (The interfacial stability of a ferromagnetic fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, **30**, 671, 1967).

Nous recommandons aux candidats une première lecture complète du sujet.

FORMULAIRE :

- 1- Série de Fourier du signal créneau périodique de période $2a$, pair, de valeur moyenne nulle :



$$C(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^p}{2p+1} \cos \frac{(2p+1)\pi x}{a} \right).$$

- 2- Ecart-type σ défini par : $\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$ où $\bar{x}$ désigne la valeur moyenne.

- 3- Développements limités en $x=0$: $\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots$
 $\operatorname{coth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \dots$

4- $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

- 5- $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$ somme des N premiers termes d'une suite géométrique de raison q .

- 6- Soit $\overline{\overline{T}}$ un tenseur d'ordre 2 (matrice 3×3) d'élément générique T_{ij} .

$\operatorname{div} \overline{\overline{T}}$ est le tenseur d'ordre 1 (vecteur) d'élément générique $d_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}.$

- 7- Soit f un champ scalaire et $\overline{\overline{I}}$ la matrice identité (3×3) : $\operatorname{div} (f \overline{\overline{I}}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f.$

8- $\overrightarrow{\operatorname{grad}} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{b} + \vec{b} \times \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{a} + (\vec{a} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{a}.$

VALEURS NUMERIQUES ET EQUATIONS FONDAMENTALES :

Charge élémentaire : $e = 1,60.10^{-19} \text{ C}$.

Masse de l'électron : $m_e = 9,11.10^{-31} \text{ kg}$.

Constante de Planck : $h = 6,63.10^{-34} \text{ J.s}$.

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$.

Equations de Maxwell :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B} &= 0 ; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho ; \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} ;\end{aligned}$$

où $\vec{J}$ et ρ sont la densité de courant et la densité volumique des charges libres, respectivement.

Equation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} P + \vec{f}_v + \eta \Delta \vec{v} ,$$

où on note ρ la masse volumique du fluide, η sa viscosité, et $\vec{f}_v$ la densité volumique des forces de volume.

Dans tout ce problème, la tension superficielle (ou interfaciale selon les cas) est notée γ .

I) La tension superficielle

- 1/ a. Préciser l'origine physique de la tension superficielle γ .
b. Quelle est l'unité de γ ?
c. Donner un ordre de grandeur de γ pour l'eau et pour l'huile.
- 2/ Une goutte d'huile de rayon R est plongée dans l'eau. La tension interfaciale est ici notée $\gamma_{E.H}$.
a. Expliquer pourquoi la goutte est sphérique.
b. Etablir la loi de Laplace $\Delta P = \gamma_{E.H} \frac{2}{R}$, où $\Delta P = P_H - P_E$ est la différence de pression à l'interface entre l'huile et l'eau.
c. On considère une surface quelconque. En un point donné, les rayons de courbure principaux sont R_1 et R_2 . Définir la courbure C en fonction de R_1 et R_2 .
d. Généraliser sans démonstration l'équation de Laplace obtenue pour la goutte à une surface quelconque.
- 3/ Afin d'établir l'expression analytique de la courbure C , on considère le cas classique d'une goutte ondoïdale (de révolution autour de l'axe Ox) posée sur une fibre de rayon constant. La figure 1 ci-dessous représente le profil dans le plan (x,z) , d'une goutte posée sur la fibre. Ce profil est décrit par une fonction notée $z(x)$. On souhaite ici calculer la courbure à un point quelconque M de la surface caractérisé par le vecteur surface $\vec{n}$.

On appelle s la coordonnée curviligne qui décrit le profil de la goutte dans le sens positif fixé de gauche à droite.

$\overline{MP}$ et $\overline{MQ}$ définissent respectivement les rayons R_1 et R_2 au point M .

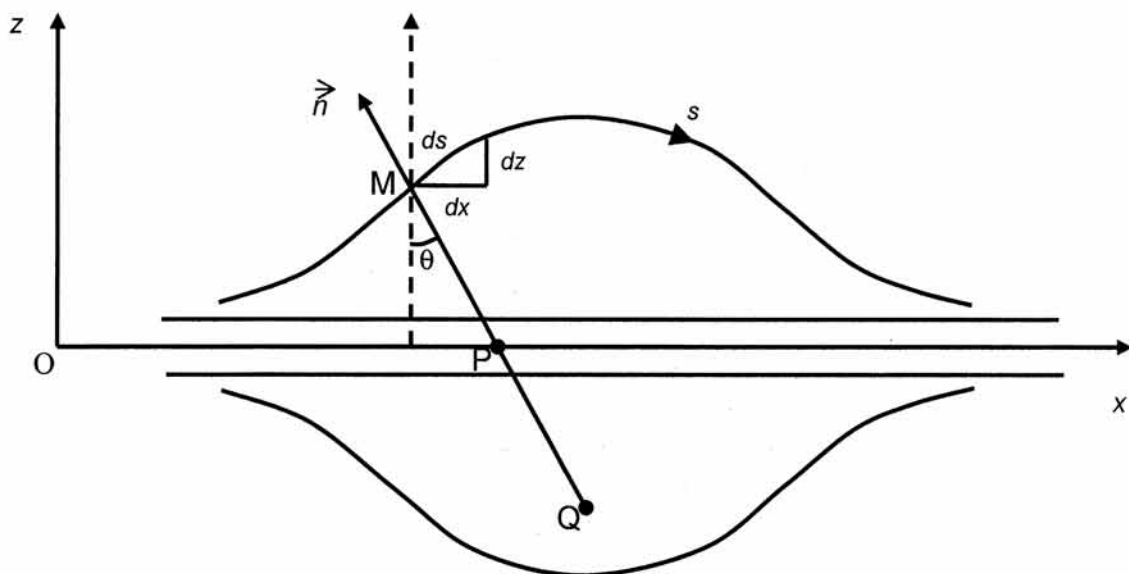


Figure 1 : Coupe d'une goutte ondoïdale posée sur une fibre d'axe Ox . Le point M est quelconque.

a. Identifier les plans auxquels appartiennent les courbes respectives de rayons R_1 et R_2 . Est-ce que ces rayons sont toujours positifs ?

b. On notera $\dot{z} = \frac{dz}{dx}$ et $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dx^2}$.

Etablir que $ds = dx\sqrt{1 + \dot{z}^2}$ puis en déduire que $\cos\theta = \left(\sqrt{1 + \dot{z}^2}\right)^{-1}$.

c. Démontrer alors que la courbure prend l'expression générale suivante :

$$C = \frac{-\ddot{z}}{(1 + \dot{z}^2)^{3/2}} + \frac{1}{z(1 + \dot{z}^2)^{1/2}}.$$

II) Hydrodynamique en cellule de Hele-Shaw

On se propose ici d'étudier l'hydrodynamique d'un fluide newtonien dans un canal rectangulaire appelé cellule de Hele-Shaw (figure 2). Ce canal est caractérisé par les dimensions (L, w, b) dans le repère orthonormé $\{O, x, y, z\}$.

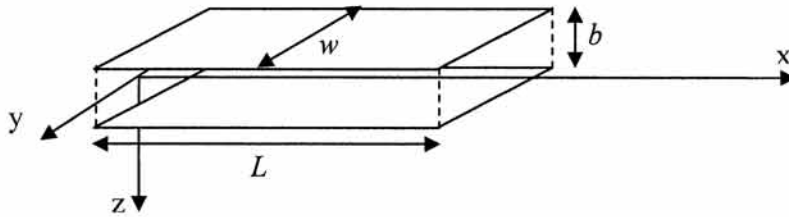


Figure 2 : Cellule de Hele-Shaw, définie par : $x \in [0; L]$; $y \in \left[-\frac{w}{2}; \frac{w}{2}\right]$; $z \in \left[-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right]$.

L'écoulement est stationnaire, incompressible et à faible nombre de Reynolds. Le fluide est caractérisé par sa viscosité η et sa masse volumique ρ . L'écoulement dans la cellule est assuré par un gradient de pression uniforme $\frac{\partial P}{\partial x} = -G$, avec $G > 0$. Les effets de la pesanteur sont négligés.

1/ Définir le nombre de Reynolds. Qualifier la nature de l'écoulement selon l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds.

2/ Justifier sans calcul que le champ de vitesse du fluide en écoulement est de la forme : $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$ où $\vec{e}_x$ est le vecteur unitaire du repère orthonormé $\{O, x, y, z\}$.

3/ Etablir que $v_x = v_x(y, z)$.

4/ Dans un cellule de Hele-Shaw $b \ll w$ et $b \ll L$. Montrer alors que l'écoulement est régi par l'équation de Stokes : $-\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0$.

5/ Montrer que $P = P(x)$.

6/ Calculer l'expression de v_x et représenter le profil de vitesse $v_x(z)$ dans le canal rectangulaire.

7/ A partir du calcul du débit volumique Q , établir l'expression de la vitesse moyenne (loi de Darcy) : $\bar{v}_x = \frac{b^2}{12\eta} G$.

8/ Expliquer pourquoi le champ de vitesse uniforme, égal à la vitesse de Darcy, caractérise un écoulement potentiel.

9/ Afin de rendre compte des phénomènes de glissement à la paroi, on introduit la longueur de Navier L_s en écrivant que la vitesse v_g du fluide au voisinage immédiat de la paroi est de la

forme: $v_g = L_s \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|$.

- Proposer un ordre de grandeur pour L_s .
- Reprendre le calcul de la vitesse v_x en tenant compte du glissement à la paroi.
- Représenter le nouveau profil de vitesse $v_x(z)$.

10/ Dans la réalité, l'épaisseur b de la cellule de Hele-Shaw n'est pas négligeable devant la largeur w . On cherche alors à résoudre l'équation de Stokes à l'aide des séries de Fourier en négligeant le glissement à la paroi (problème de Dirichlet).

- Justifier l'utilisation des séries de Fourier.
- L'écoulement est-il toujours unidirectionnel ? De quelles variables dépend v_x ?
- Ecrire les conditions aux limites pour le champ v_x .
- Pour calculer la vitesse, on développe tout d'abord cette dernière en série de Fourier suivant y : $v_x = a_0(z) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(z) \cos(\beta_n y) + b_n(z) \sin(\beta_n y)]$. Justifier que $b_n(z) = 0$.
- En déduire les relations vérifiées par les coefficients $a_n(z)$ imposées par les conditions aux limites.
- Etablir l'équation différentielle en $a_n(z)$. Indication : on utilisera l'équation de Stokes et la série de Fourier d'une fonction créneau. On distinguera deux équations différentielles selon la parité de n .
- En déduire que $a_n(z) = 0$ pour n pair.
- Pour n impair (on posera $n = 2p + 1$), donner l'expression de β_n et en déduire que l'équation différentielle prend la forme suivante : $\ddot{a}_{2p+1} - \beta_{2p+1}^2 a_{2p+1} = -\frac{4G(-1)^p}{w\eta\beta_{2p+1}}$.
- Résoudre cette équation différentielle en $a_n(z)$.
- En déduire l'expression générale de la vitesse v_x .
- Calculer le débit réel dans la cellule de Hele-Shaw.
- Pour un rapport $w/b \gg 1$, montrer que l'on peut retrouver le débit calculé à la question 7/.

III) Instabilité de Saffman-Taylor

Dans cette partie, on souhaite étudier le mécanisme de digitation visqueuse (formation d'un doigt de fluide). Dans un premier temps, on se propose d'établir l'effet de la tension interfaciale sur le critère d'instabilité de Saffman-Taylor. Puis dans un deuxième temps, on étudiera l'écoulement autour du doigt en suivant l'approche des écoulements potentiels.

On considère maintenant deux fluides newtoniens de viscosité η_1 et η_2 , avec $\eta_1 < \eta_2$. Ces deux fluides sont incompressibles. Le fluide le plus visqueux est tout d'abord injecté dans une cellule de Hele-Shaw en verre, d'épaisseur b (cellule identique à celle étudiée dans le II). Puis le fluide le moins visqueux est injecté à son tour à faible vitesse dans la cellule et pousse ainsi le fluide de viscosité η_2 . Dans le repère orthonormé $\{O, x, y, z\}$, l'écoulement des deux fluides se fait vers les x croissants et l'épaisseur de la cellule est selon l'axe des z .

On suppose que l'écoulement des deux fluides est régi par la loi de Darcy établie au II-7.

La déstabilisation de l'interface entre les deux fluides et la formation des doigts de Saffman-Taylor dans le plan $(x-y)$ sont observées par caméra (figure 3).

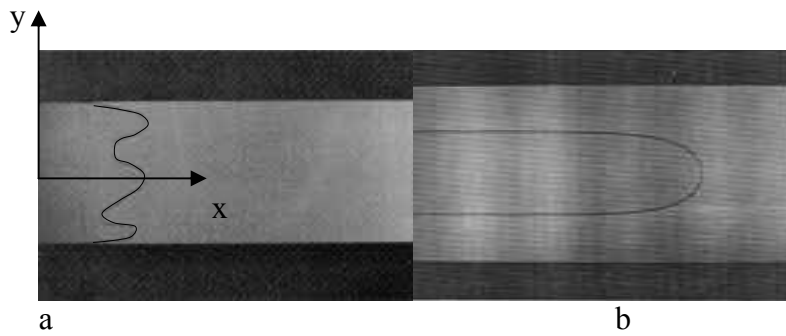


Figure 3 : Mécanisme de digitation visqueuse : a) déstabilisation de l'interface entre les deux fluides ; b) propagation d'un doigt de Saffman-Taylor. D'après Saffman et Taylor (1958).

La coordonnée ξ détermine l'abscisse de l'interface entre les deux fluides.

A un instant t , l'interface entre les deux fluides est stable, parallèle à l'axe des y et se déplace parallèlement à Ox , à une vitesse moyenne $\bar{v}_x$ indépendante du temps.

1/ Donner l'expression de la coordonnée interfaciale ξ_t en fonction de la vitesse. On pourra considérer qu'à $t = 0$, $\xi_t = 0$.

2/ Pour les deux fluides écrire les relations qui relient les gradients de pression à la vitesse $\bar{v}_x$.

3/ Calculer alors les pressions P_1 et P_2 au temps t et à la position x . Les constantes d'intégration seront considérées comme nulles par commodité car seuls les gradients de pression interviennent dans ce problème.

4/ On suppose qu'à partir de $t = t_0$ donné, l'interface entre les deux fluides subit une déformation spatiale périodique de faible amplitude. La coordonnée interfaciale prend alors

l'expression suivante : $\xi = \xi_i + \varepsilon e^{\Omega t} \sin(ky)$ où ε est l'amplitude de la perturbation ($\varepsilon \ll \xi_i$) et Ω le taux de croissance de la perturbation. On prendra Ω réel et k réel strictement positif.

- a. Définir la longueur d'onde de la perturbation de l'interface.
- b. Décrire les trois comportements hydrodynamiques qui correspondent aux différentes valeurs de Ω .

Dans la suite de cette partie, l'exposant « p » désigne la composante perturbée des grandeurs considérées.

5/ La perturbation de l'interface génère une perturbation de faible amplitude du champ des vitesses et des pressions. Calculer la perturbation de la vitesse de l'interface, v_i^p au temps $t > t_0$.

6/ En utilisant la loi de Darcy, démontrer que les perturbations de la pression des deux fluides obéissent à l'équation de Laplace : $\Delta P_i^p = 0$ où $i=1,2$.

7/ On cherche les perturbations de pression sous la forme : $P_i^p = F_i(x,t) \sin(ky)$. En utilisant une nouvelle fois la loi de Darcy, calculer l'expression complète des perturbations de pression au temps t et à la position x pour les deux fluides. On montrera alors que P_1^p et P_2^p prennent la forme suivante: $P_1^p = A_1 e^{\Omega t + k(x-\xi)} \sin(ky)$ et $P_2^p = A_2 e^{\Omega t - k(x-\xi)} \sin(ky)$.

8/ Ecrire le saut de pression à l'interface $P_1 - P_2$ en fonction de la tension interfaciale.

9/ Donner l'ordre de grandeurs des rayons de courbures principaux et démontrer que la courbure peut se simplifier sous la forme suivante : $C \approx -\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$. Calculer C .

10/ Montrer alors que la relation de dispersion $\Omega(k)$ qui relie le taux de croissance de la perturbation au vecteur d'onde k s'écrit : $\Omega = \frac{k}{\eta_1 + \eta_2} \left((\eta_2 - \eta_1) \bar{v}_x - \frac{\gamma b^2}{12} k^2 \right)$.

11/ Dans le cas où la viscosité η_1 est négligeable devant η_2 , simplifier la relation de dispersion.

12/ Calculer alors le vecteur d'onde $k_{\max}$ qui correspond au maximum du taux de croissance de la perturbation.

13/ Tracer l'allure de la courbe de la fonction $\Omega(k)$. Pour quel vecteur d'onde k_0 la perturbation de l'interface se stabilise-t-elle ?

14/ En déduire la valeur critique de k qui correspond au seuil d'apparition de l'instabilité.

15/ Discuter le comportement de cette instabilité si la tension interfaciale est nulle.

16/ Le doigt étant formé, on cherche à modéliser l'écoulement du fluide le plus visqueux autour de ce dernier dans le plan $(x-y)$. Justifier que l'on pourra utiliser la méthode des écoulements potentiels.

17/ En première approximation, l'extrémité du doigt est analogue à un solide de Rankine pour lequel l'écoulement peut être modélisé grâce à la superposition de deux écoulements simples, un écoulement uniforme et un écoulement source. Par commodité, on réalise un changement de référentiel pour lequel un doigt de Saffman-Taylor fixe est plongé dans un fluide en écoulement. On utilisera les coordonnées sphériques $\{r, \theta, \varphi\}$, pour lesquelles le plan (x, y) correspond à un plan méridien $\varphi = \text{constante}$.

La source Q est placée à l'origine des coordonnées.

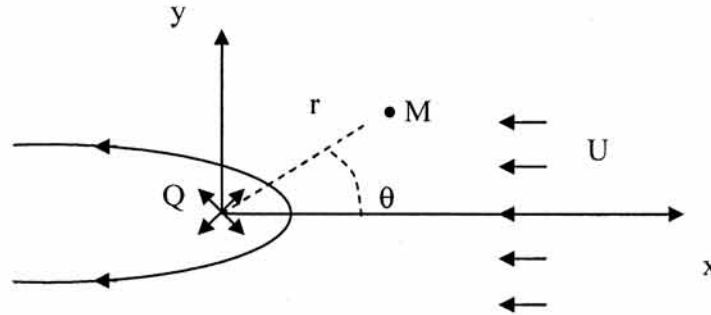


Figure 4 : Schéma d'un solide de Rankine.

Le potentiel des vitesses pour un écoulement uniforme est $\Phi_u = Ur \cos \theta$ et celui d'un écoulement source est $\Phi_s = -\frac{Q}{4\pi r}$, où $U (< 0)$ est la vitesse du fluide à l'infini et parallèle à l'axe des x et $Q (> 0)$, le débit de la source (ici donné par unité d'épaisseur).

a. Que représente la vitesse U dans l'expérience de digitation visqueuse ?

b. Calculer les composantes du vecteur vitesse.

NB : L'opérateur gradient en coordonnées sphériques s'écrit : $\left(\frac{\partial}{\partial r}; \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}; \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$.

18/ Dans le cadre de ce modèle, donner les coordonnées du point d'arrêt A.

19/ A ce stade, on souhaite écrire les relations qui relient la fonction de courant ψ aux composantes du vecteur vitesse. A partir de l'équation de continuité, établir ces relations.

NB : En coordonnées sphériques, $\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$.

20/ Calculer alors la fonction de courant ψ (à une constante additive près, que l'on choisira nulle).

21/ Il existe une ligne de courant particulière qui prend la forme de l'extrémité du doigt de Saffman-Taylor.

- Donner la valeur de la fonction de courant qui correspond à cette ligne.
- Etablir alors l'équation de cette ligne de courant.

22/ Représenter les lignes de courant autour du doigt.

23/ La largeur relative du doigt λ est définie par le rapport entre la largeur du doigt et la largeur de la cellule de Hele-Shaw. De nombreux auteurs ont mesuré λ pour différents fluides et différentes vitesses. Ils ont montré que λ est déterminé par le nombre capillaire Ca (figure 5).

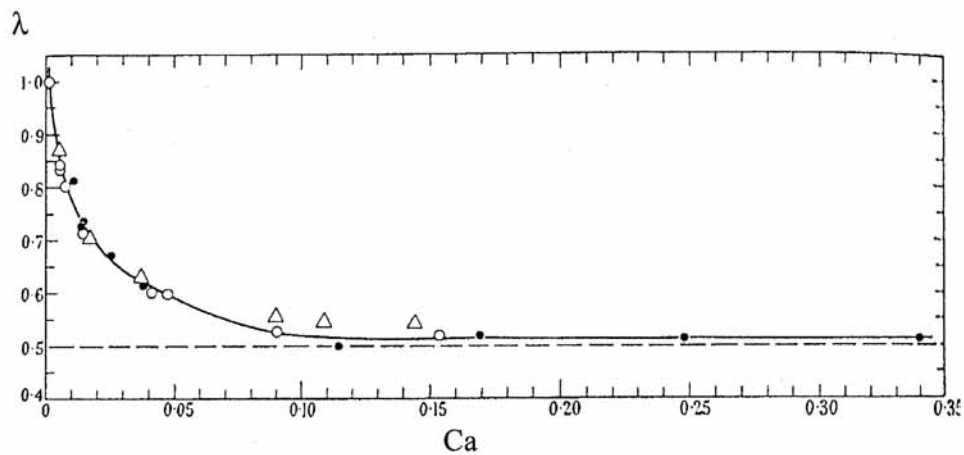


Figure 5 : Evolution de la largeur relative du doigt λ en fonction du nombre capillaire Ca . D'après Saffman et Taylor (1958).

- a. Définir le nombre capillaire.
- b. Expliquer ce résultat expérimental.

24/ Montrer enfin que la vitesse U du modèle de Rankine obéit à la relation $U \approx (\lambda - 1)v_D$, où v_D est la vitesse du doigt.

25/ Présenter une courte synthèse de l'influence de la tension interfaciale sur les mécanismes de digitation visqueuse.

IV) Les ferrofluides

Les ferrofluides sont des liquides magnétiques dont les applications sont de plus en plus nombreuses. Aujourd'hui, on en trouve dans des bobines de haut-parleur, des amortisseurs de vibrations, des joints magnétiquement sustentés, et des accéléromètres. Ils ont fait leur apparition dans les années 60.

Les ferrofluides sont des solutions colloïdales de nanoparticules solides ferromagnétiques très stables. Sous excitation magnétique, le comportement de ces nanoparticules se transmet à l'ensemble du liquide qui peut se déplacer et se déformer tout en conservant une grande stabilité de la suspension.

Les ferrofluides sont caractérisés par des propriétés de « paramagnétisme géant » que l'on souhaite ici étudier.

1/ On considère que les ferrofluides sont des milieux matériels linéaires homogènes et isotropes. Donner la relation entre les vecteurs densité de courant $\vec{J}_M$ et aimantation volumique $\vec{M}$.

2/ Définir le vecteur excitation magnétique $\vec{H}$. Donner son unité. On appellera μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

3/ Donner les quatre équations de Maxwell pour ce milieu magnétique en régime permanent.

4/ Définir la susceptibilité magnétique χ_m et la perméabilité relative μ_r du milieu magnétique.

5/ Dans certaines notices techniques, la susceptibilité est définie par la relation : $\vec{M} = \chi'_m \frac{\vec{B}}{\mu_0}$.

Etablir la relation entre χ_m et χ'_m . Dans quel cas observe-t-on que $\chi'_m \approx \chi_m$?

6/ En discutant du signe et de l'ordre de grandeur de χ_m , définir le paramagnétisme et le diamagnétisme.

7/ On désire maintenant mesurer la susceptibilité magnétique d'un ferrofluide. On place ce ferrofluide dans un tube en U de section s constante. Pour une des branches du tube, l'extrémité du ferrofluide est soumise à un champ magnétique $\vec{B}$ irrotationnel produit par un électroaimant. Faire un schéma de l'expérience et décrire le phénomène observé.

8/ Calculer la force volumique totale exercée sur ce fluide de masse volumique ρ et déduire l'expression de χ_m en fonction de la hauteur h de déplacement du liquide dans l'entrefer lorsque le champ magnétique varie de 0 à B .

9/ Afin d'évaluer la reproductibilité des mesures de χ_m , on réalise cinq fois cette expérience pour différentes valeurs du couple tension-courant appliqué à l'électroaimant. Le champ magnétique $\vec{B}$ est mesuré au moyen d'un « Gaussmètre » et la hauteur h est mesurée par

ombroscopie. Indiquer le principe de fonctionnement d'un « Gaussmètre » parfois appelé « Teslamètre ».

10/ Les résultats sont rassemblés dans le tableau 1 ci-dessous.

$2 \times h$ (mm)	B (Tesla) $\times 10^2$
4,00	1,88
4,75	2,09
5,00	2,24
5,50	2,36
5,50	2,61

Tableau 1 : Mesure de la hauteur h en fonction du champ magnétique B appliqué.

Calculer la valeur moyenne de χ_m et l'écart type de la mesure. Peut-on substituer χ_m à χ'_m ?

NB : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ F.m}^{-1}$. $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. $\rho = 1020 \text{ kg/m}^3$.

11/ Le diamètre des particules colloïdales est compris entre 3 et 20 nm. En champ nul, les moments magnétiques des particules sont orientés au hasard et l'aimantation totale du ferrofluide est nulle. Sous excitation magnétique $\vec{H}$, les moments magnétiques s'alignent dans la direction du champ. En champ fort, $\vec{M}$ atteint une valeur maximale à saturation $\vec{M}_s$. Quand le champ magnétique est coupé, les moments magnétiques reprennent des directions aléatoires et l'aimantation redevient nulle. Dessiner la courbe type d'aimantation $M(H)$ des ferrofluides et commenter.

12/ La théorie quantique du paramagnétisme permet de comprendre la forme de la courbe d'aimantation des ferrofluides. Soit un atome de moment cinétique total $\vec{J}$. Exprimer la relation qui définit le moment magnétique de l'atome $\vec{m}$ en fonction de $\vec{J}$. On appellera μ_B le magnéton de Bohr et g le facteur de Landé.

13/ Donner l'expression de μ_B et calculer sa valeur.

14/ Donner l'expression de l'énergie de cet atome placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ parallèle à Oz puis écrire cette énergie en fonction du nombre quantique azimutal (ou nombre quantique magnétique) m_j .

15/ En utilisant la statistique de Boltzmann, établir que la valeur moyenne du moment magnétique $\langle m_z \rangle$ prend l'expression suivante :

$$\langle m_z \rangle = g\mu_B \left[\left(J + \frac{1}{2} \right) \coth \left(\left(J + \frac{1}{2} \right) X \right) - \frac{1}{2} \coth \left(\frac{X}{2} \right) \right],$$

où $X = \frac{gB\mu_B}{k_B T}$.

16/ Si n_v représente le nombre d'atomes par unité de volume, établir l'expression de l'aimantation M . On considère que le champ magnétique est selon z .

17/ a- Exprimer l'aimantation à saturation M_s en fonction de J .

b- On se place maintenant dans la limite classique. Indiquer ce que cela implique pour le nombre quantique J .

c- Montrer que dans ce cas, l'aimantation M s'écrit sous la forme : $M = M_s L(Y)$ où

$L(Y) = \coth Y - \frac{1}{Y}$ est la fonction de Langevin et $Y = \frac{Jg\mu_B B}{kT}$.

d- Trouver les expressions limites de la fonction $L(Y)$ pour $Y \ll 1$ et $Y \gg 1$ et commenter.

e- En considérant que le modèle quantique peut s'appliquer aux particules colloïdales des ferrofluides, discuter si la relation précédente permet de décrire la courbe d'aimantation de ces liquides.

18/ Pour les ferrofluides, M_s est proportionnel à la fraction volumique Φ : $M_s = A_s \Phi$, où A_s est l'aimantation à saturation du matériau magnétique constitutif des particules colloïdales. Pour le ferrofluide étudié précédemment, les mesures donnent $M_s = 35 \text{ kA/m}$. Φ est fixé à 10%. Calculer A_s .

19/ Le moment magnétique d'une particule peut s'exprimer en fonction de A_s : $m_p = A_s V_p$, où V_p est le volume d'une particule. Le rayon des particules étant de 10 nm, calculer m_p puis le rapport $\frac{m_p}{\mu_B}$. Expliquer alors la terminologie de « paramagnétisme géant ».

V) Instabilité magnéto-hydrostatique de ferrofluide

Dans cette partie on se propose d'étudier l'instabilité de surface d'un ferrofluide sous l'action d'un champ magnétique $\vec{B}$ normal à la surface. Dès l'application de ce champ magnétique la surface devient instable et se déforme en créant une structure régulière et périodique (cf. figure 6 ci-dessous)

Pour comprendre l'apparition de cette instabilité et l'effet de la tension superficielle, on se propose d'établir le critère d'instabilité en suivant l'approche de Cowley et Rosensweig, puis de calculer la longueur d'onde critique et le champ critique caractéristique de ce phénomène. On confrontera alors les valeurs prédites par le modèle à celles obtenues expérimentalement.



Figure 6 : Instabilité magnéto-hydrostatique d'un ferrofluide générée par un aimant.

Soit un ferrofluide au repos déposé sur un substrat isolant. Dans un repère cartésien, ce liquide présente une surface en contact avec l'air parallèle au plan $(x-y)$. On désignera par (Oz) la verticale ascendante.

Cette surface est naturellement perturbée et présente des oscillations de faible amplitude et de grande longueur d'onde. La position de la surface libre est donnée par la fonction $z = z_0(x, y)$.

Un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ avec $B_0 > 0$, est appliqué au ferrofluide. Ce dernier est un milieu linéaire et est caractérisé par une matrice perméabilité magnétique

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\mu} \end{bmatrix}, \text{ où } \mu \text{ est la perméabilité magnétique transverse au champ et } \hat{\mu} \text{ la}$$

perméabilité magnétique parallèle au champ. Sous l'action du champ $\vec{B}$, les courants de charges libres sont négligeables.

Pour établir le critère d'instabilité, on appliquera aux grandeurs calculées les indices « 1 » pour le ferrofluide et « 2 » pour l'air.

1/ Préciser la nature des forces qui déstabilisent et stabilisent l'interface ferrofluide-air.

2/ La surface étant perturbée, les champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ sont eux-mêmes perturbés.

On notera de la manière suivante les champs et excitations magnétiques dans les deux milieux :

- Milieu 1 (ferrofluide) : $\vec{B}_1 = \vec{B}_0 + \vec{b}_1$ $\vec{H}_1 = \vec{H}_{0,1} + \vec{h}_1$;

- Milieu 2 (air) : $\vec{B}_2 = \vec{B}_0 + \vec{b}_2$ $\vec{H}_2 = \vec{H}_{0,2} + \vec{h}_2$.

D'autre part, l'aimantation volumique dans le milieu 1 est notée $\vec{M}_1 = \vec{M}_{0,1} + \vec{m}_1$. Les vecteurs en lettres minuscules désignent les perturbations.

a- Donner la relation entre $\vec{B}_0$, $\vec{H}_{0,1}$ et $\vec{M}_{0,1}$ puis la relation entre $\vec{B}_0$ et $\vec{H}_{0,2}$.

b- Que deviennent ces relations en projection sur l'axe z ?

c- Donner les relations liant les composantes de $\vec{b}_1$ et celles de $\vec{h}_1$, et celles liant les composantes de $\vec{b}_2$ à celles de $\vec{h}_2$.

3/ a- A partir des équations de Maxwell rappelés dans la partie IV, montrer que $\text{div } \vec{b} = 0$ et que $\vec{h}$ dérive d'un potentiel magnétique : $\vec{h} = \text{grad } \phi$.

b- Etablir alors l'équation différentielle en ϕ_i pour le ferrofluide (milieu 1). Pour l'air (milieu 2), $\hat{\mu} = \mu = \mu_0$. En conclure que $\Delta\phi_2 = 0$.

4/ L'amplitude des perturbations étant très petite devant celle des champs non perturbés, on se placera dans la suite à l'ordre 1 des perturbations. En « linéarisant » les conditions aux limites, montrer alors que la conservation des composantes tangentielle de $\vec{H}$ à l'interface

liquide-air permet d'écrire $\left[h_x + H_0 \frac{\partial z_0}{\partial x} \right]_I = 0$ et $\left[h_y + H_0 \frac{\partial z_0}{\partial y} \right]_I = 0$, avec la notation $[X]_I^2 = X_2 - X_1$. En déduire que $[\phi]_I^2 = -z_0 [H_0]_I^2$.

5/ Montrer que la continuité des composantes normales de $\vec{B}$ conduit à $[b_z]_I^2 = 0$.

6/ Puisque $[B_0]_I^2 = 0$ et $[M_0]_I^2 = -[H_0]_I^2$, déduire des questions précédentes que $\phi_1 - \phi_2 = z_0 M_{0,1}$ et $\mu_0 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right)_{z=z_0} = \hat{\mu} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)_{z=z_0}$.

7/ On suppose que la surface présente une déformation sinusoïdale z_0 dont l'amplitude est faible devant la longueur d'onde de la déformation. Par commodité pour les calculs, z_0 est défini dans la représentation complexe par la relation suivante: $z_0 = \bar{z}_0 \exp \left[ik \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) \right]$. Pour calculer les expressions de ϕ_1 et ϕ_2 , on recherchera des solutions de la forme

$$\phi = f(z)z_0(x, y). \quad \text{Démontrer alors que} \quad \phi_1 = \frac{z_0 M_{0,1} \exp\left(k \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} (z - z_0)\right)}{1 + r} \quad \text{et}$$

$$\phi_2 = -\frac{r z_0 M_{0,1} \exp(-k(z - z_0))}{1 + r}, \quad \text{où } r = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\mu_0^2}}.$$

8/ Calculer $b_{z,2}$ à l'interface et expliquer pourquoi le flux du champ magnétique se concentre au sommet des pics de l'interface.

9/ La loi de comportement d'un ferrofluide est fonction du champ magnétique. Les composantes du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ s'écrivent alors : $\sigma_{ij} = -\left(P + \frac{1}{2}\mu_0 H^2\right)\delta_{ij} + H_i B_j$, où P est la pression hydrostatique et δ_{ij} le symbole de Kronecker.

En considérant que la densité volumique de forces de surface $\vec{f}$ est reliée au tenseur des contraintes par la relation $\vec{f} = \text{div } \bar{\sigma}$, démontrer que $\vec{f}$ prend la forme suivante : $\vec{f} = -\text{grad } P + \mu_0 (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{H}$.

10/ Démontrer que la condition d'équilibre du ferrofluide est donnée par la relation suivante, si l'on tient compte de la gravité : $P + \rho_1 g z - \mu_0 M_{0,1} h_z = \text{cste}$, où ρ_1 est la masse volumique de liquide magnétique.

11/ En considérant la continuité des composantes tangentielles de $\vec{H}$ et normales de $\vec{B}$, justifier que $[\sigma_{xz}]_1^2 = 0$ et $[\sigma_{yz}]_1^2 = 0$.

12/ Calculer ensuite la différence des contraintes normales à l'interface $[\sigma_{zz}]_1^2$ en fonction de $M_{z,1}$ et $P_2 - P_1$.

13/ Ecrire $[\sigma_{zz}]_1^2$ en fonction de la tension superficielle γ du ferrofluide.

14/ En combinant les relations obtenues dans les questions précédentes, montrer que l'on obtient après linéarisation de $M_{z,1}^2$ ($M_{z,1}^2 \approx M_{0,1}^2 + 2M_{0,1}m_{z,1}$, $m_{z,1}$ étant la perturbation de l'aimantation du ferrofluide) : $(\rho_2 - \rho_1)gz_0 + M_{0,1}\mu_0(h_{z,1} + m_{z,1}) - k^2\gamma z_0 = \text{cste}$. ρ_2 est ici la masse volumique de l'air et, $h_{z,1}$ et $m_{z,1}$ sont évalués en $z = z_0$.

15/ L'égalité précédente doit être vérifiée pour tout ferrofluide et en absence de perturbation. En conséquence, la constante est obligatoirement nulle : $\text{cste} = 0$. En tenant compte du résultat de la question 8/, montrer alors que l'instabilité magnéto-hydrostatique est

caractérisée par la relation de dispersion : $\frac{\mu_0 M_{0,1}^2}{1 + \frac{1}{r}} = -\frac{g}{k}[\rho]_1^2 + k\gamma$.

16/ Calculer le vecteur d'onde critique k_c correspondant à la plus petite aimantation du ferrofluide susceptible de donner une instabilité magnéto-hydrostatique.

17/ Déterminer ensuite l'aimantation critique $M_{0,1}^c$ des ferrofluides qui permet de visualiser ces instabilités. Conclure sur l'effet de la tension superficielle pour cette instabilité.

18/ Expérimentalement, nous avons trouvé une longueur d'onde critique voisine de 9 mm (figure 7).

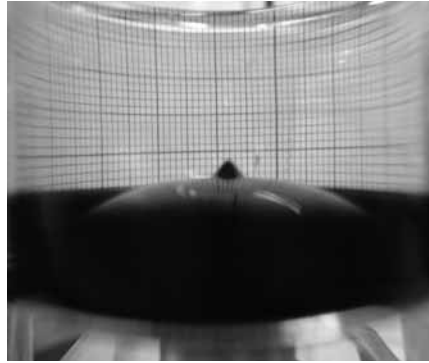


Figure 7 : Mesure de la longueur d'onde critique à l'apparition du seuil d'instabilité.

Calculer la longueur d'onde critique dans le cadre de ce modèle.

$$\rho_f = 1020 \text{ kg/m}^3 ; \gamma = 30 \text{ mJ/m}^2.$$

Comment expliquer les différences observées ?

19/ Quelles sont les valeurs limites du terme $\frac{I}{r}$, où r est défini question V-7/ ?

20/ Des expériences d'aimantation pour différentes valeurs du champ $\vec{B}$ ont été réalisées afin de mesurer l'aimantation critique du ferrofluide isotrope étudié aux questions IV-7 à IV-10. Ces mesures ont donné une valeur de 6200 A.m^{-1} pour l'aimantation critique. Comparer cette valeur à celle du modèle. Conclure.